扫码获取详解详析

第一单元　预备知识

第1讲　集合

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)确定性　互异性　(2)①∈　②∉　(3)描述法　图示法(Venn图)　(4)$\mathbf{N}$　$\mathbf{N}^*$或$\mathbf{N}_+$　$\mathbf{Z}$　$\mathbf{Q}$　$\mathbf{R}$　$\mathbf{R}_+$
2. 任何一个元素　$B\supseteq A$　$A\subseteq B$　$A\neq B$　$\subsetneqq$　$A=B$　不含
3. 且　$A\cap B$　或　或　$A\cup B$　$\notin$　$\complement_U A$
4. (1)$\subseteq$　(2)$B\cup A$　A　(3)$\varnothing$　A　$\cap$　($\complement_U A$)　($\complement_U B$)

【对点演练】

1. -1或6　**【解析】**因为$6\in A$,所以$x^2-5x=6$,解得$x=-1$或$x=6$.
2. $\{(1,1)\}$　$\supseteq$　**【解析】**由$\begin{cases}2x-y=1,\\x+4y=5,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$所以$D=\{(1,1)\}$.显然点$(1,1)$在直线$y=x$上,所以$C\supseteq D$.
3. $\{0,2,4,6,8,9,10\}$　**【解析】**依题意,$U=A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,所以$\complement_U B\subseteq A$,又$A\cap(\complement_U B)=\{1,3,5,7\}$,所以$\complement_U B=\{1,3,5,7\}$,所以$B=\{0,2,4,6,8,9,10\}$.
4. -1　**【解析】**因为集合$\{1,a\}=\{a,a^2\}$,所以$a^2=1$,即$a=1$或$a=-1$,当$a=1$时,$\{1,1\}=\{1,1\}$,与集合元素的互异性矛盾,故$a=-1$.
5. $\{x\mid x\geqslant 0\}$　**【解析】**$\because M=\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}=\{x\mid x\geqslant 1\}$,$N=\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}=\{y\mid y\geqslant 0\}$,$\therefore M\cup N=\{x\mid x\geqslant 0\}$.
6. $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$　**【解析】**因为$A\cap B=B$,所以$B\subseteq A$.若B为空集,则关于x的方程$ax=1$无解,可得$a=0$;若B不为空集,则$a\neq 0$,由$ax=1$,得$x=\frac{1}{a}$,所以$\frac{1}{a}=2$或$\frac{1}{a}=3$,可得$a=\frac{1}{3}$或$a=\frac{1}{2}$.综上,实数a的所有可能取值组成的集合为$\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$.
7. $2\leqslant a\leqslant 4$　**【解析】**由$A\subsetneqq B$,得$\begin{cases}a-1\geqslant 1,\\a+1<5\end{cases}$或$\begin{cases}a-1>1,\\a+1\leqslant 5,\end{cases}$解得$2\leqslant a\leqslant 4$.

● 课堂考点探究

例1　**【思路点拨】**(1)通过x,y的取值,确定z的取值,推出M中所含的元素.(2)由题意,$3=m+2$或$3=2m^2+m$,解方程,再根据集合中元素的互异性验证即可.

(1)C　(2)$-\frac{3}{2}$　**【解析】**(1)当$x=2,y=1$时,$z=2$;当$x=2,y=2$时,$z=1$;当$x=4,y=1$时,$z=4$;当$x=4,y=2$时,$z=2$.所以$M=\{1,2,4\}$,所以M中所有元素之和为7.故选C.

(2)由题意得$m+2=3$或$2m^2+m=3$,解得$m=1$或$m=-\frac{3}{2}$.当$m=1$时,$m+2=3,2m^2+m=3$,根据集合中元素的互异性可知不满足题意;当$m=-\frac{3}{2}$时,$m+2=\frac{1}{2},2m^2+m=3$,满足题意.综上,$m=-\frac{3}{2}$.

变式题　(1)C　(2)1　**【解析】**(1)由$8-x\geqslant x$,得$x\leqslant 4$,又$x\in\mathbf{N}^*$,所以$A\cap B$中有$(1,7),(2,6),(3,5),(4,4)$,共4个元素.

(2)由题意得$a\neq 0$,$a\neq 1$,则$\begin{cases}\frac{b}{a}=0,\\a+b=1\text{或}a^2=1,\end{cases}$所以$\begin{cases}a=-1,\\b=0,\end{cases}$经验证,符合题意,所以$(a+b)^{2024}=1$.

例2　**【思路点拨】**(1)根据集合之间的关系即可判断.(2)由已知可得$0\in B$,结合集合中元素的互异性得到结果.

(1)B　(2)B　**【解析】**(1)$A=\{x\mid x=3k+2,k\in\mathbf{N}\}$,$B=\{y\mid y=6m+5,m\in\mathbf{N}\}=\{y\mid y=3(2m+1)+2,m\in\mathbf{N}\}$,因为$m\in\mathbf{N}$,所以$2m+1\in\mathbf{N}$且为奇数,所以$B\subsetneqq A$.故选B.

(2)由$A\subseteq B$,可得$0\in B$.若$a-2=0$,则$a=2$,此时$A=\{0,-2\}$,$B=\{1,0,2\}$,不满足$A\subseteq B$;若$2a-2=0$,则$a=1$,此时$A=\{0,-1\}$,$B=\{1,-1,0\}$,满足$A\subseteq B$.故选B.

变式题　(1)C　(2)A　**【解析】**(1)因为$\{1\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3\}$,所以集合$A$必须含有元素1,可能含有元素2,3,故集合$A$可能为$\{1\}$,$\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{1,2,3\}$,共4个.故选C.

(2)集合$A=\{x\in\mathbf{N}\mid|x|<2\}=\{0,1\}$.对于方程$ax-1=0$,当$a=0$时,方程无解,可得集合$B=\varnothing$,满足$B\subsetneqq A$;当$a\neq 0$时,解得$x=\frac{1}{a}$,要使得$B\subsetneqq A$,则需满足$\frac{1}{a}=1$,可得$a=1$.所以实数$a$的值为0或1.故选A.

例3　**【思路点拨】**(1)根据条件分别求出集合A,B,再根据并集的定义求解.(2)由数据可直接判断,必要时可借助数轴分析.

(1)D　(2)A　**【解析】**(1)由题意可得$A=\{x\mid x^2-1<0\}=\{x\mid -1<x<1\}$,$B=\{x\mid\lg x\leqslant 0\}=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$,所以$A\cup B=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$.故选D.

(2)由题意得$M\cup N=\{x\mid x<2\}$,所以$\{x\mid x\geqslant 2\}=\complement_U(M\cup N)$,故选A.

变式题　(1)C　(2)D　**【解析】**(1)因为$M=\{-2,-1,0,1,2\}$,$N=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}=\{x\mid x\leqslant -2\text{或}x\geqslant 3\}$,所以$M\cap N=\{-2\}$.

(2)由$\frac{x-3}{x+1}>0$,解得$x<-1$或$x>3$,故$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-3}{x+1}>0\right\}=\{x\mid x<-1\text{或}x>3\}$,$B=\{x\mid y=\ln(3-x)\}=\{x\mid x<3\}$,由图可知阴影部分表示的集合是$(\complement_U A)\cap B$,因为$\complement_U A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$,所以$(\complement_U A)\cap B=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$.故选D.

例4　**【思路点拨】**(1)思路一:先求出集合A,B,再由交集的定义得到关于a的方程,解方程可得a的值;思路二:将选项中的数代入集合B,逐个验证,得到满足题意的a的值.(2)由并集结果得到$B\subseteq A$,分$B=\varnothing$和$B\neq\varnothing$两种情况讨论,得到实数a的取值集合.

(1)B　(2)D　**【解析】**(1)方法一:$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant -\frac{a}{2}\right\}$,因为$A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$,所以$-\frac{a}{2}=1$,所以$a=-2$.故选B.

方法二:由题意得$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$.若$a=-4$,则$B=\{x\mid x\leqslant 2\}$,又$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,所以$A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,不满足题意,故A错误;若$a=-2$,则$B=\{x\mid x\leqslant 1\}$,又$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,所以$A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$,满足题意,故B正确;若$a=2$,则$B=\{x\mid x\leqslant -1\}$,又$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,所以$A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant -1\}$,不满足题意,故C错误;若$a=4$,则$B=\{x\mid x\leqslant -2\}$,又$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,所以$A\cap B=\{x\mid x=-2\}$,不满足题意,故D错误.故选B.

(2)因为$A\cup B=A$,所以$B\subseteq A$.当$B=\varnothing$时,$\Delta=a^2-16<0$,即$-4<a<4$,满足题意.当$B\neq\varnothing$时,若$\Delta=a^2-16=0$,则$a=-4$或4.当$a=-4$时,$B=\{-2\}$,满足题意;当$a=4$时,$B=\{2\}$,满足题意.若$\Delta=a^2-16>0$,则$-2,2$是方程$x^2-ax+4=0$的两根,显然$-2\times 2=-4\neq 4$,不符合题意.综上,实数a的取值集合为$\{a\mid -4\leqslant a\leqslant 4\}$.故选D.

变式题　(1)ACD　(2)D　**【解析】**(1)由$6x^2-5x+1=0$,得$(2x-1)(3x-1)=0$,解得$x=\frac{1}{2}$或$x=\frac{1}{3}$,所以$M=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$,因为$M\cap P=P$,所以$P\subseteq M$.当$P=\varnothing$时,得$a=0$,满足题意;当$P\neq\varnothing$时,因为$P=\{x\mid ax=1\}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{1}{a}\right\}$,所以$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$或$\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$,解得$a=2$或$a=3$.综上,$a=0$或$a=2$或$a=3$.故选ACD.

(2)集合$A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\geqslant a\}$,集合$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid 2^x\leqslant 4\}=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\leqslant 2\}$,由题知$a<2$,故$A\cap B=\{x\in\mathbf{Z}\mid a\leqslant x\leqslant 2\}$.因为

$A\cap B$ 只有 4 个子集，所以 $A\cap B$ 中的元素只能有 2 个，即 $A\cap B=\{1,2\}$，所以 $0<a\leqslant 1$，故选 D.

例 5 **【思路点拨】**(1)设该中学的学生总数为 m，喜欢足球的学生组成集合 A，喜欢游泳的学生组成集合 B，根据集合 A，B 的关系可得答案. (2)由真分拆的定义及规定即可求解.

(1)C (2)A **【解析】**(1)设该中学的学生总数为 m，喜欢足球的学生组成集合 A，喜欢游泳的学生组成集合 B，则 $\mathrm{card}(A)=60\%m$，$\mathrm{card}(B)=82\%m$，$\mathrm{card}(A\cup B)=96\%m$，所以 $\mathrm{card}(A\cap B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cup B)=46\%m$. 故选 C.

(2)由题意，集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的真分拆有 $A_1=\{5\}$，$A_2=\{1,2,3,4,6\}$；$A_1=\{1,4\}$，$A_2=\{2,3,5,6\}$；$A_1=\{3,4\}$，$A_2=\{1,2,5,6\}$；$A_1=\{4,5\}$，$A_2=\{1,2,3,6\}$；$A_1=\{4,6\}$，$A_2=\{1,2,3,5\}$. 共 5 种，故选 A.

变式题 3 **【解析】**①当 $a=b$ 时，$a-b=0$ 属于数域，故①是真命题；②若数域 F 有非零元素，则 $\frac{b}{b}=1\in F$，从而 $1+1=2\in F$，$2+1\in F$，…，$2023+1=2024\in F$，故②是真命题；③由集合 P 的表示可知 x 是 3 的倍数，当 $a=6$，$b=3$ 时，$\frac{a}{b}=\frac{6}{3}=2\notin P$，故③是假命题；④若 F 是有理数集，则“对任意 a，$b\in F$，都有 $a+b$，$a-b$，$ab\in F$，且当 $b\neq 0$ 时，有 $\frac{a}{b}\in F$”成立，故④是真命题. 综上，真命题的个数为 3.

第 2 讲　常用逻辑用语

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 充分　必要　充分不必要　必要不充分　充要　既不充分也不必要
2. (1)∀　(2)∃

【对点演练】

1. 必要不充分 **【解析】**因为 $a\in P$，所以 $a\in P\cup Q$，即 $q\Rightarrow p$，但当 $a\in P\cup Q$ 时，a 不一定是 P 的元素，即 $p\not\Rightarrow q$，所以 p 是 q 的必要不充分条件.
2. 全称　存在两个等边三角形，它们不相似　假 **【解析】**“任意两个等边三角形都相似”是全称量词命题，它的否定是“存在两个等边三角形，它们不相似”. 因为任意两个等边三角形的三边成比例，所以任意两个等边三角形都相似. 因此原命题的否定是假命题.
3. 充要 **【解析】**当 $a^2+b^2=c^2$ 时，$\triangle ABC$ 为直角三角形，充分性成立；当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时，因为 $a\leqslant b\leqslant c$，所以 $a^2+b^2=c^2$，必要性也成立. 故“$a^2+b^2=c^2$”是“$\triangle ABC$ 为直角三角形”的充要条件.
4. ①$(-\infty,2]$　②$(2,+\infty)$ **【解析】**①因为 p 是 q 的充分不必要条件，所以 $\{x\mid x<a\}\subsetneqq\{x\mid x\leqslant 2\}$，故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$. ②因为 p 是 q 的必要不充分条件，所以 $\{x\mid x\leqslant 2\}\subsetneqq\{x\mid x<a\}$，故实数 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$.
5. 存在一个奇数，它的立方不是奇数 **【解析】**命题“奇数的立方是奇数”是省略了全称量词“所有的”的全称量词命题，利用全称量词命题的否定是存在量词命题即可得出.
6. 充分不必要 **【解析】**依题意知 $p\Rightarrow r$，$r\not\Rightarrow p$，$r\Rightarrow s$，$s\Rightarrow q$，所以 $p\Rightarrow q$，$q\not\Rightarrow p$，故 p 是 q 的充分不必要条件.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】**(1)由三角函数的性质结合充分条件、必要条件的定义即可得解. (2)由 $\log_3(x+1)<0$，得 $-1<x<0$，比较与 $x<0$ 的关系即可得出结论. (3)先求得关于 x 的不等式 $ax^2-2x+1>0$ 恒成立的充要条件，再找其充分不必要条件.

(1)A (2)A (3)D **【解析】**(1)由 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 知，当 $\sin x=1$ 时，$\cos x=0$；而当 $\cos x=0$ 时，$\sin x=\pm 1$，故“$\sin x=1$”是“$\cos x=0$”的充分不必要条件，故选 A.

(2)由 $\log_3(x+1)<0$，得 $-1<x<0$，所以“$x<0$”是“$\log_3(x+1)<0$”的必要不充分条件. 故选 A.

(3)要使关于 x 的不等式 $ax^2-2x+1>0$ 恒成立，需满足 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4-4a<0,\end{cases}$ 解得 $a>1$，所以关于 x 的不等式 $ax^2-2x+1>0$ 恒成立的充要条件是 $a>1$. 分析选项可知只有 D 符合题意，故选 D.

变式题 (1)B (2)A **【解析】**(1)当 $a=1$，$b=4$ 时，满足 $a+b>4$，但 $a>2$ 且 $b>2$ 不成立，所以充分性不成立；反之，若 $a>2$ 且 $b>2$，则可得 $a+b>4$ 成立，所以必要性成立. 所以“$a+b>4$”是“$a>2$ 且 $b>2$”的必要不充分条件. 故选 B.

(2)若向量 $\boldsymbol{a}=(1,x)$ 与 $\boldsymbol{b}=(x+2,x)$ 共线，则 $x=x(x+2)$，解得 $x=0$ 或 $x=-1$，所以 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 A.

例 2 **【思路点拨】**(1)由充要条件的定义可得答案. (2)化简 p，q 中的不等式，根据充分不必要条件的定义求 a 的取值范围.

(1)B (2)A **【解析】**(1)根据面面平行的判定定理，可知当 α 内有两条相交直线与 β 平行时，α 与 β 平行. 反之，若 α 与 β 平行，则 α 内任一直线均与平面 β 平行，自然也就满足 α 内有两条相交直线与 β 平行，故 B 正确. α 内有无数条直线与 β 平行，不能推出 α 与 β 平行，故 A 错误. α 与 β 平行于同一条直线或垂直于同一个平面时，α 与 β 还可能相交，故 C，D 均错误. 故选 B.

(2)由已知可得 $p:x<1$，$q:x<2a+1$，因为 p 是 q 的充分不必要条件，所以 $2a+1>1$，解得 $a>0$. 故选 A.

变式题 (1)C (2)$(2,+\infty)$ **【解析】**(1)由 $\frac{x-2}{x+1}\leqslant 0$，得 $\begin{cases}(x+1)(x-2)\leqslant 0,\\ x+1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $-1<x\leqslant 2$，所以 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$. 因为 $x\in A$ 的一个必要条件是 $x\geqslant a$，所以 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}\subseteq\{x\mid x\geqslant a\}$，所以 $a\leqslant -1$. 故选 C.

(2)若 $f(x)=x-a\ln x$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)=1-\frac{a}{x}\geqslant 0$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\leqslant x$ 对任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立，$\therefore a\leqslant 2$. $\because p$ 是 q 的充分不必要条件，$\therefore m>2$，故实数 m 的取值范围为 $(2,+\infty)$.

例 3 **【思路点拨】**对于 A，通过解不等式判断；对于 B，由一个数的平方非负判断；对于 C，举例判断；对于 D，解方程判断.

B **【解析】**对于 A，由 $4x<-3$，得 $x<-\frac{3}{4}$，所以不存在自然数使 $4x<-3$ 成立，故 A 是假命题；对于 B，因为 $x^2\geqslant 0$，所以 $x^2+2\geqslant 2>0$，故 B 是真命题；对于 C，当 $x=2$ 时，$2^x=x^2=4$，故 C 是假命题；对于 D，由 $3x-2=0$，得 $x=\frac{2}{3}\notin\mathbf{Z}$，故 D 是假命题. 故选 B.

变式题 D **【解析】**$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin^2\frac{x}{3}+\cos^2\frac{x}{3}=1$，故 A 是假命题；当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$\sin x\leqslant\cos x$，故 B 是假命题；$\because$ 方程 $x^2+x+2=0$ 对应的判别式 $\Delta=1-8<0$，$\therefore x^2+x+2=0$ 无解，故 C 是假命题；令 $f(x)=e^x-x-1(x>0)$，则 $f'(x)=e^x-1$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 为增函数，故 $f(x)>f(0)=0$，即 $\forall x\in(0,+\infty)$，$e^x>x+1$，故 D 是真命题. 故选 D.

例 4 **【思路点拨】**(1)根据全称量词命题的否定为存在量词命题，将“∀”改为“∃”并否定原结论即可. (2)根据存在量词命题的否定是全称量词命题进行求解即可.

(1)B (2)D **【解析】**(1)由题设知，原命题的否定是 $\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$x\leqslant\sin x$. 故选 B.

(2)因为命题 p 是存在量词命题，存在量词命题的否定为全称量词命题，所以命题 p 的否定是“所有的等差数列都不是等比数列”. 故选 D.

变式题 (1)A (2)D **【解析】**(1)根据题意，命题“$\exists x>0$，$e^x=x+1$”中含有存在量词，$\therefore$ 该命题的否定需要将存在量词改为全称量词，且只否定结论，不否定条件，可得命题的否定为“$\forall x>0$，$e^x\neq x+1$”. 故选 A.

(2)命题的否定要改写量词，否定结论，分析选项可知只有 D 满足题意. 故选 D.

例 5 **【思路点拨】**(1)根据题意可知“$\forall x\in[-1,2]$，$-x^2+2<a$”是真命题，求出 $-x^2+2$ 的最大值，再由此求得 a 的取值范围. (2)由 $\forall x_1\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$\exists x_2\in[2,3]$，$f(x_1)\leqslant g(x_2)$，知 $f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$，分别求出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大值，列出关于 a 的不等式求解即可.

(1)A (2)$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ **【解析】**(1)若“$\exists x\in[-1,2]$，$-x^2+2\geqslant a$”是假命题，则“$\forall x\in[-1,2]$，$-x^2+2<a$”是真命题，当 $x=0$ 时，$-x^2+2$ 取得最大值 2，所以 $a>2$. 故选 A.

(2)依题意知 $f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$. 因为 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减,所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{2}$,因为 $g(x)=2^x+a$ 在 $[2,3]$ 上单调递增,所以 $g(x)_{\max}=8+a$,所以 $\frac{17}{2}\leqslant 8+a$,解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$,故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

变式题 (1)充分不必要 (2)C **[解析]** (1)若"$\exists x\in\mathbf{R}, ax^2+2x+1<0$"是假命题,则"$\forall x\in\mathbf{R}, ax^2+2x+1\geqslant 0$"是真命题,所以 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4-4a\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 1$,故 $p: a\geqslant 1$,又 $q: a\in(1,+\infty)$,所以 q 是 p 的充分不必要条件.

(2)若"$\exists x\in[1,2], 2x^2-\lambda x+1<0$"是假命题,则"$\forall x\in[1,2], 2x^2-\lambda x+1\geqslant 0$"是真命题,即 $\forall x\in[1,2], \lambda\leqslant 2x+\frac{1}{x}$. 令 $f(x)=2x+\frac{1}{x}, x\in[1,2]$,则 $f'(x)=2-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2-1}{x^2}>0$,则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(1)=3$,所以 $\lambda\leqslant 3$. 故选 C.

第 3 讲　不等式的性质

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. (2)> (3)> < (4)$a+c>b+d$ (5)> (6)>

【对点演练】

1. $s\geqslant t$ **[解析]** $\because s-t=a+b^2+1-(a+2b)=b^2-2b+1=(b-1)^2\geqslant 0$,$\therefore s\geqslant t$.
2. $(2,5)$ **[解析]** $\because 2<a<3$,$\therefore 4<2a<6$,又 $-2<b<-1$,$\therefore 2<2a+b<5$,即 $2a+b$ 的取值范围为 $(2,5)$.
3. ②③④ **[解析]** 对于①,当 $c=0$ 时,$ac^2>bc^2$ 不成立,故①为假命题;对于②,$\because a<b<0$,$\therefore$ 两边同乘 a,得 $a^2>ab$,两边同乘 b,得 $ab>b^2$,$\therefore a^2>ab>b^2$,故②为真命题;对于③,$\because a>b>0$,$\therefore a^2>b^2>0$,$\therefore\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$,$\because c<0$,$\therefore\frac{c}{a^2}>\frac{c}{b^2}$,故③为真命题;对于④,$\because\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,$\therefore\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$,又 $\because a>b$,$\therefore b-a<0$,$\therefore ab<0$,故④为真命题. 故填②③④.
4. $(-4,2)$ **[解析]** $\because -1<x<4, 2<y<3$,$\therefore -3<-y<-2$,$\therefore -4<x-y<2$.
5. $(-24,8)$ **[解析]** 当 $-3<a\leqslant 0$ 时,$\frac{a}{b}\in(-24,0]$;当 $0<a<1$ 时,$\frac{a}{b}\in(0,8)$. 综上可知,$\frac{a}{b}$ 的取值范围是 $(-24,8)$.
6. $p\geqslant q$ **[解析]** $p-q=2x^4+1-2x^3-x^2=2x^3(x-1)-(x+1)(x-1)=(x-1)(2x^3-x-1)=(x-1)(x^3-x+x^3-1)=(x-1)[x(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2+x+1)]=(x-1)^2(x^2+x+x^2+x+1)=(x-1)^2(2x^2+2x+1)=(x-1)^2[2(x^2+x)+1]=(x-1)^2\left[2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-2\times\frac{1}{4}+1\right]=(x-1)^2\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\geqslant 0$,故 $p\geqslant q$.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)把 $(x^2-y^2)^2, xy(x-y)^2$ 作差分解因式后,借助已知及不等式性质判断符号,进而得出结论. (2)把 a^ab^b 与 a^bb^a 作商后对 a,b 的大小关系分类,借助指数函数的性质比较大小.

解:(1)因为 $(x^2-y^2)^2-xy(x-y)^2=(x+y)^2(x-y)^2-xy(x-y)^2=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)=(x-y)^2\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right]\geqslant 0$,所以 $(x^2-y^2)^2\geqslant xy(x-y)^2$.

(2)$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$. 当 $a>b>0$ 时,$\frac{a}{b}>1$,$a-b>0$,$\therefore\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$,$\therefore a^ab^b>a^bb^a$;当 $a=b>0$ 时,$\frac{a}{b}=1$,$a-b=0$,$\therefore\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}=1$,$\therefore a^ab^b=a^bb^a$;当 $b>a>0$ 时,$0<\frac{a}{b}<1$,$a-b<0$,$\therefore\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$,$\therefore a^ab^b>a^bb^a$. 综上所述,$a^ab^b\geqslant a^bb^a$.

变式题 (1)B (2)B **[解析]** (1)由 $a-b=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}$,且 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}>7$,得 $a>b$;由 $a-c=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$,且 $(2\sqrt{2})^2=8>6$,得 $a>c$;由 $b-c=(\sqrt{7}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{3})$,且 $(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=9+2\sqrt{18}>9+2\sqrt{14}=(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$,得 $c>b$. 所以 $a>c>b$,故选 B.

(2)方法一:构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 令 $f'(x)>0$,得 $0<x<\mathrm{e}$;令 $f'(x)<0$,得 $x>\mathrm{e}$. $\therefore f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增,在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减,$\therefore f(3)>f(4)>f(5)$,即 $a>b>c$. 故选 B.

方法二:易知 a,b,c 都是正数. $\because\frac{b}{a}=\frac{3\ln 4}{4\ln 3}=\log_{81}64<1$,$\therefore a>b$,$\because\frac{b}{c}=\frac{5\ln 4}{4\ln 5}=\log_{625}1024>1$,$\therefore b>c$,$\therefore c<b<a$. 故选 B.

例 2 **[思路点拨]** (1)利用不等式的性质判断选项 A,B,利用平方法判断选项 C,进而判断选项 D 即可. (2)当 $c>0$ 时,由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$,得 $b<a<0$,则 $0<\frac{a}{b}<1$,当 $c<0$ 时,由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$,得 $b>a>0$,则 $0<\frac{a}{b}<1$,可判断 A,D;由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$,得 $\frac{c^3}{a}-\frac{c^3}{b}=\frac{c^3(b-a)}{ab}<0$,由 $ab>0$,可判断 B,C.

(1)D (2)ACD **[解析]** (1)$\because a>b>c>d>0$,$\therefore a+c>b+d$,$ac>bd$,故 A,B 中不等式成立;$\because a>b>c>d>0$,$\therefore a-d>b-c>0$,$\therefore(a-d)^2>(b-c)^2$,即 $(a+d)^2-4ad>(b+c)^2-4bc$,又 $a+d=b+c$,$\therefore ad<bc$,故 C 中不等式成立;$\because a>b>c>d>0$,$ad<bc$,$\therefore\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$,故 D 中不等式不成立. 故选 D.

(2)由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$ 得 $c\neq 0$. 当 $c>0$ 时,由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$,得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$,即 $b<a<0$,可得 $0<\frac{a}{b}<1$;当 $c<0$ 时,由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$,得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>0$,即 $b>a>0$,所以 $0<\frac{a}{b}<1$,故 A,D 正确;由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$,得 $\frac{c^3}{a}-\frac{c^3}{b}=\frac{c^3(b-a)}{ab}<0$,由上述分析可知 a 与 b 同号,即 $ab>0$,所以 c 与 $b-a$ 异号,即 c 与 $a-b$ 同号,故 C 正确;由 $c(a-b)>0$,得 $ac>bc$,故 B 错误. 故选 ACD.

变式题 (1)ABD (2)D (3)BCD **[解析]** (1)对于 A,若 $xc^2>yc^2$,则 $c^2\neq 0$,则 $x>y$;反之,若 $x>y$,则当 $c=0$ 时推不出 $xc^2>yc^2$. 所以"$xc^2>yc^2$"是"$x>y$"的充分不必要条件,故 A 正确. 对于 B,由 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<0$,可得 $y<x<0$,即能推出 $x>y$;反之,由 $x>y$ 推不出 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<0$. 所以"$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<0$"是"$x>y$"的充分不必要条件,故 B 正确. 对于 C,若 $|x|>|y|$,则当 $x=-2, y=1$ 时,满足 $|x|>|y|$,但 $x<y$;反之,若 $x>y$,则当 $x=2, y=-3$ 时,满足 $x>y$,但 $|x|<|y|$. 所以"$|x|>|y|$"是"$x>y$"的既不充分也不必要条件,故 C 错误. 对于 D,若 $\ln x>\ln y$,则 $x>y>0$;反之,由 $x>y$ 推不出 $\ln x>\ln y$. 所以"$\ln x>\ln y$"是"$x>y$"的充分不必要条件,故 D 正确. 故选 ABD.

(2)当 $a=1, b=-1$ 时,满足 $a>b$,但 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,故 A 中不等式不一定成立;当 $a=1, b=-1$ 时,满足 $a>b$,但 $a^2=b^2$,故 B 中不等式不一定成立;当 $a=1, b=-1$ 时,满足 $a>b$,但 $\ln a>\ln b$ 不成立,故 C 中不等式不一定成立;由 $a>b$,得 $a-b>0$,则 $2^{a-b}>1$,故 D 中不等式一定成立. 故选 D.

(3)因为 $0<a<b<c$,所以 $c-a>b-a>0$,则 $\frac{1}{c-a}<\frac{1}{b-a}$,故 A 错误;$\frac{b}{a}>\frac{b+c}{a+c}$ 等价于 $b(a+c)>a(b+c)$,即 $bc>ac$,即 $b>a$,显然成立,故 B 正确;$\frac{1}{a(c-a)}>\frac{1}{b(c-a)}$ 等价于

$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，即 $b>a$，显然成立，故 C 正确；$ab+c^2>ac+bc$ 等价于 $c(c-b)-a(c-b)>0$，即 $(c-a)(c-b)>0$，显然成立，故 D 正确. 故选 BCD.

例 3 **[思路点拨]** (1)首先将已知不等式两边同时除以 a，化为关于 $\frac{b}{a}$，$\frac{c}{a}$ 的不等式组，然后利用不等式的性质求得 $\frac{b}{a}$ 的取值范围. (2)设 $2a+3b=x(a+b)+y(a-b)=(x+y)a+(x-y)b(x,y\in\mathbf{R})$，利用系数相等求得 x，y 的值，结合不等式的基本性质，即可求解.

(1)A　(2)$\left(-\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right)$　**[解析]** (1)∵三个正数 a，b，c 满足 $a\leqslant b+c\leqslant 2a$，$b\leqslant a+c\leqslant 2b$，∴$1\leqslant\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\leqslant 2$，$\frac{b}{a}\leqslant 1+\frac{c}{a}\leqslant 2\cdot\frac{b}{a}$，∴$-2\cdot\frac{b}{a}\leqslant -1-\frac{c}{a}\leqslant -\frac{b}{a}$，与 $1\leqslant\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\leqslant 2$ 相加，得 $1-2\cdot\frac{b}{a}\leqslant\frac{b}{a}-1\leqslant 2-\frac{b}{a}$，解得 $\frac{2}{3}\leqslant\frac{b}{a}\leqslant\frac{3}{2}$. 故选 A.

(2)由题意，设 $2a+3b=x(a+b)+y(a-b)=(x+y)a+(x-y)b(x,y\in\mathbf{R})$，则 $\begin{cases}x+y=2,\\x-y=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\y=-\frac{1}{2}.\end{cases}$ 因为 $-1<a+b<3$，$2<a-b<4$，所以 $-\frac{5}{2}<\frac{5}{2}(a+b)<\frac{15}{2}$，$-2<-\frac{1}{2}(a-b)<-1$，所以 $-\frac{9}{2}<\frac{5}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)<\frac{13}{2}$，即 $2a+3b$ 的取值范围是 $\left(-\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right)$.

变式题　C　**[解析]** 由 $-1\leqslant x+y\leqslant 3$，$4\leqslant 2x-y\leqslant 9$，两式相加，可得 $3\leqslant 3x\leqslant 12$，则 $1\leqslant x\leqslant 4$，故 A 错误；因为 $\begin{cases}-6\leqslant -2x-2y\leqslant 2,\\4\leqslant 2x-y\leqslant 9,\end{cases}$ 所以 $-2\leqslant -3y\leqslant 11$，则 $-\frac{11}{3}\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}$，故 B 错误；因为 $4x+y=2(x+y)+(2x-y)$，且 $-2\leqslant 2(x+y)\leqslant 6$，$4\leqslant 2x-y\leqslant 9$，所以 $2\leqslant 4x+y\leqslant 15$，故 C 正确；因为 $x-y=-\frac{1}{3}(x+y)+\frac{2}{3}(2x-y)$，且 $-1\leqslant -\frac{1}{3}(x+y)\leqslant\frac{1}{3}$，$\frac{8}{3}\leqslant\frac{2}{3}(2x-y)\leqslant 6$，所以 $\frac{5}{3}\leqslant x-y\leqslant\frac{19}{3}$，故 D 错误. 故选 C.

第 4 讲　基本不等式

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$　(2)$a=b$　(3)$\frac{a+b}{2}$

2. (1)$2ab$　(2)2

【对点演练】

1. ± 1　2　**[解析]** $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}=2$，当且仅当 $x=\pm 1$ 时，等号成立，则 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的最小值为 2.

2. 3　**[解析]** 因为 $x>1$，所以 $x-1>0$，所以 $x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1\geqslant 2\sqrt{(x-1)\times\frac{1}{x-1}}+1=3$，当且仅当 $x-1=1$，即 $x=2$ 时，等号成立.

3. 40　9　**[解析]** 设矩形菜园的相邻两条边的长分别为 x m，y m，则篱笆的长度为 $2(x+y)$ m. 由题知 $xy=100$，由 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，可得 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=20$，所以 $2(x+y)\geqslant 40$，当且仅当 $x=y=10$ 时，等号成立. 因此，当这个矩形菜园是边长为 10 m 的正方形时，所用篱笆最短，此时所用篱笆的长度是 40 m. 若矩形菜园和墙平行的边长为 $x(0<x\leqslant 9)$m，则与墙不平行的边长为 y m，则篱笆的长度为 $(x+2y)$m，又 $xy=100$，所以 $x+2y=x+\frac{200}{x}$，因为 $f(x)=x+\frac{200}{x}$ 在 $(0,9]$ 上单调递减，所以当 $x=9$ 时所用篱笆最短.

4. -7　**[解析]** ∵$x<0$，∴$-x>0$，∴$f(x)=2x+\frac{8}{x}+1=-\left(-2x+\frac{8}{-x}\right)+1\leqslant -2\sqrt{(-2x)\cdot\frac{8}{-x}}+1=1-8=-7$，当且仅当 $-2x=\frac{8}{-x}$，即 $x=-2$ 时，等号成立，∴$f(x)$ 的最大值为 -7.

5. 3　**[解析]** 设 $x+2=t$，则 $x+\frac{4}{x+2}=t+\frac{4}{t}-2$. 由 $x\geqslant 2$ 得 $t\geqslant 4$，因为函数 $y=t+\frac{4}{t}-2$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $t=4$ 时，$y=t+\frac{4}{t}-2$ 取得最小值，最小值为 $4+\frac{4}{4}-2=3$，故 $x+\frac{4}{x+2}$ 的最小值为 3.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)根据基本不等式及其成立的条件依次判断各选项即可得答案. (2)利用基本不等式可得 $mn\geqslant 1$，可判断 A，C 选项，利用特殊值法判断 B，D 选项.

(1)D　(2)AC　**[解析]** (1)∵x，y 都是正数，∴由基本不等式，得 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$，$\frac{2xy}{x+y}\leqslant\frac{2xy}{2\sqrt{xy}}=\sqrt{xy}$，这三个不等式都是当且仅当 $x=y$ 时等号成立，而题中 $x\neq y$，因此等号都取不到，故 A，B，C 三个不等式恒成立；$xy+\frac{1}{xy}\geqslant 2$，当且仅当 $xy=1$ 时等号成立，如当 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$ 时即可取等号，故 D 中不等式不恒成立. 故选 D.

(2)因为 $m>0$，$n>0$，$m+n=2mn$，所以 $2mn=m+n\geqslant 2\sqrt{mn}$，所以 $mn\geqslant 1$，当且仅当 $m=n=1$ 时等号成立，故 A 正确；当 $m=n=1$ 时，$m+n=1+1>\sqrt{2}$，故 B 错误；因为 $mn\geqslant 1$，所以 $m^2+n^2\geqslant 2mn\geqslant 2$，当且仅当 $m=n=1$ 时等号成立，故 C 正确；当 $m=n=1$ 时，$2m+n=3<3+2\sqrt{2}$，故 D 错误. 故选 AC.

变式题　(1)D　(2)BC　**[解析]** (1)对于 A，取 $x=-2$，则 $x+\frac{4}{x}=-4<4$，故 A 错误；对于 B，取 $x=\mathrm{e}^{-1}$，则 $\ln x+\frac{1}{\ln x}=-2<2$，故 B 错误；对于 C，取 $a=b=-1$，则 $\sqrt{ab}=1>-1=\frac{a+b}{2}$，故 C 错误；对于 D，由基本不等式可得 $2^x+2^{-x}\geqslant 2\sqrt{2^{x-x}}=2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立. 故选 D.

(2)对于 A，B，由 $a>0$，$b>0$，$a^2+b^2-ab=2$，且 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立），可得 $ab+2\geqslant 2ab$，解得 $ab\leqslant 2$，又 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立），$\frac{2}{\sqrt{ab}}\geqslant\sqrt{2}$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\sqrt{2}$，故 A 错误，B 正确；对于 C，由 $a>0$，$b>0$，$a^2+b^2-ab=2$，且 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立），得 $(a+b)^2-2=3ab\leqslant\frac{3(a+b)^2}{4}$，解得 $(a+b)^2\leqslant 8$，即 $a+b\leqslant 2\sqrt{2}$，故 C 正确；对于 D，由 $a>0$，$b>0$，$a^2+b^2-ab=2$，且 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立），得 $a^2+b^2-2=ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，解得 $a^2+b^2\leqslant 4$，故 D 错误. 故选 BC.

例 2 **[思路点拨]** (1)由已知得 $x+1>1$，将 $y=2+3x+\frac{4}{x+1}$ 变形为 $y=3(x+1)+\frac{4}{x+1}-1$，再利用基本不等式求原函数的最小值. (2)将 $x\sqrt{1-2x^2}$ 变形为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2x^2(1-2x^2)}$，再利用基本不等式求解.

(1)A　(2)$\frac{\sqrt{2}}{4}$　**[解析]** (1)∵$x>0$，∴$x+1>1$，∴$y=2+3x+\frac{4}{x+1}=2+3(x+1)-3+\frac{4}{x+1}=3(x+1)+\frac{4}{x+1}-1\geqslant$

$2\sqrt{3(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1=4\sqrt{3}-1$，当且仅当 $3(x+1)=\frac{4}{x+1}$，即 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ 时，等号成立，∴函数 $y=2+3x+\frac{4}{x+1}$ 的最小值为 $4\sqrt{3}-1$. 故选 A.

(2)∵$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴$x^2>0$，$1-2x^2>0$，∴$x\sqrt{1-2x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2x^2}\sqrt{1-2x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2x^2(1-2x^2)}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2x^2+1-2x^2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $2x^2=1-2x^2$，即 $x=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 $x\sqrt{1-2x^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

例 3 **【思路点拨】**(1)把 $a+b=2$ 化为 $\frac{1}{4}[(a+1)+(b+1)]=1$，根据“乘 1 法”，运用基本不等式即可求解. (2)把 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$ 中的 1 换成 ab，变形为 $\frac{ab}{2a}+\frac{ab}{2b}+\frac{8}{a+b}=\frac{a+b}{2}+\frac{8}{a+b}$，利用基本不等式求解.

(1)C (2)4 **【解析】**(1)依题意，因为 $a+b=2$，所以 $(a+1)+(b+1)=4$，则 $\frac{2}{a+1}+\frac{8}{b+1}=\frac{1}{4}[(a+1)+(b+1)]\left(\frac{2}{a+1}+\frac{8}{b+1}\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{2(b+1)}{a+1}+\frac{8(a+1)}{b+1}+10\right]\geqslant\frac{1}{4}\times(2\times4+10)=\frac{9}{2}$，当且仅当 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{5}{3}$ 时，等号成立. 故选 C.

(2)∵$a>0$，$b>0$，∴$a+b>0$，又 $ab=1$，∴$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}=\frac{ab}{2a}+\frac{ab}{2b}+\frac{8}{a+b}=\frac{a+b}{2}+\frac{8}{a+b}\geqslant2\sqrt{\frac{a+b}{2}\times\frac{8}{a+b}}=4$，当且仅当 $a=2-\sqrt{3}$，$b=2+\sqrt{3}$ 或 $a=2+\sqrt{3}$，$b=2-\sqrt{3}$ 时，等号成立.

例 4 **【思路点拨】**(1)根据题意得出 $\frac{2}{b}=1-\frac{1}{a}$，代入 $\frac{a}{4}-\frac{2}{b}$，利用基本不等式求最小值即可. (2)先对已知式子变形得 $y=\frac{1-x^2}{2x}$，然后代入 x^2+y^2 中，整理后利用基本不等式即可求出结果.

(1)A (2)$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **【解析】**(1)因为正实数 a，b 满足 $2a+b=ab$，所以 $\frac{2}{b}+\frac{1}{a}=1$，所以 $\frac{2}{b}=1-\frac{1}{a}>0$，解得 $a>1$，所以 $\frac{a}{4}-\frac{2}{b}=\frac{a}{4}-\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{4}+\frac{1}{a}-1\geqslant2\sqrt{\frac{a}{4}\cdot\frac{1}{a}}-1=2\times\frac{1}{2}-1=0$，当且仅当 $a=2$，$b=4$ 时取等号，所以 $\frac{a}{4}-\frac{2}{b}$ 的最小值为 0. 故选 A.

(2)因为 $xy>0$，所以 $x\neq0$，又 $x^2+2xy=1$，所以 $y=\frac{1-x^2}{2x}$，所以 $x^2+y^2=x^2+\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)^2=x^2+\frac{1-2x^2+x^4}{4x^2}=\frac{5x^2}{4}+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2}\geqslant2\sqrt{\frac{5x^2}{4}\cdot\frac{1}{4x^2}}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（当且仅当 $\frac{5x^2}{4}=\frac{1}{4x^2}$ 时取等号），所以 x^2+y^2 的最小值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【应用演练】

1. C **【解析】**由题意得 $x-2>0$，则 $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}=\frac{(x-2)^2+2(x-2)+4}{x-2}=x-2+\frac{4}{x-2}+2\geqslant2\sqrt{(x-2)\times\frac{4}{x-2}}+2=6$，当且仅当 $x-2=\frac{4}{x-2}$，即 $x=4$ 时，等号成立，所以 $a=4$. 故选 C.

2. A **【解析】**∵$x+y=1$，∴$x+y+1=2$，∴$\frac{1}{2x}+\frac{x}{y+1}=\frac{\frac{1}{2}(x+y+1)}{2x}+\frac{x}{y+1}=\frac{1}{4}+\frac{y+1}{4x}+\frac{x}{y+1}$，∵$x>0$，$y>0$，∴$\frac{y+1}{4x}>0$，$\frac{x}{y+1}>0$，∴$\frac{1}{2x}+\frac{x}{y+1}=\frac{1}{4}+\frac{y+1}{4x}+\frac{x}{y+1}\geqslant\frac{1}{4}+2\sqrt{\frac{y+1}{4x}\cdot\frac{x}{y+1}}=\frac{5}{4}$，当且仅当 $\frac{y+1}{4x}=\frac{x}{y+1}$，即 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{3}$ 时等号成立. 故选 A.

3. B **【解析】**由 $ab+2a-2=0$，得 $a=\frac{2}{b+2}$，所以 $4a+b=\frac{8}{b+2}+b=\frac{8}{b+2}+(b+2)-2\geqslant2\sqrt{\frac{8}{b+2}\cdot(b+2)}-2=4\sqrt{2}-2$，当且仅当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=2\sqrt{2}-2$ 时取等号. 故选 B.

4. ABD **【解析】**对于 A，由 $a^2+b^2\geqslant2ab$，得 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，结合 $a+b=\sqrt{2}$，可得 $2(a^2+b^2)\geqslant2$，所以 $a^2+b^2\geqslant1$，故 A 正确；对于 B，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\right)$，因为 $\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=2-\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{2}-2$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\times(3+2\sqrt{2})=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故 B 正确；对于 C，由 $a>0$，$b>0$ 且 $a+b=\sqrt{2}$，可得 $a-b=a-(\sqrt{2}-a)=2a-\sqrt{2}>-\sqrt{2}$，所以 $2^{a-b}>2^{-\sqrt{2}}$，而 $2^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}<\frac{1}{2}$，所以 $2^{a-b}>\frac{1}{2}$ 不一定成立，故 C 错误；对于 D，由 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\leqslant2(a+b)=2\sqrt{2}$，可知 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2\sqrt{2}}=2^{\frac{3}{4}}$，故 D 正确. 故选 ABD.

5. $\frac{2}{3}$ **【解析】**$x(4-3x)=\frac{1}{3}\times3x(4-3x)\leqslant\frac{1}{3}\times\left[\frac{3x+(4-3x)}{2}\right]^2=\frac{4}{3}$，当且仅当 $3x=4-3x$，即 $x=\frac{2}{3}$ 时取等号，故当 $x(4-3x)$ 取得最大值时，x 的值为 $\frac{2}{3}$.

6. 1 **【解析】**由 $\frac{1}{x}+y=2$，可得 $\frac{1}{x}=2-y$，则 $x=\frac{1}{2-y}$，由 $\begin{cases}y>0,\\x=\frac{1}{2-y}>0,\end{cases}$ 可得 $0<y<2$，所以 $\frac{x}{y}=\frac{1}{y(2-y)}\geqslant\frac{1}{\left(\frac{y+2-y}{2}\right)^2}=1$，当且仅当 $y=2-y$，即当 $y=1$ 时，等号成立，故 $\frac{x}{y}$ 的最小值为 1.

例 5 **【思路点拨】**(1)根据题意，当 $t=0$ 时，$x=1$，进而代入已知等式解出 k，然后求出每件产品的销售价格，最后得到函数关系式；(2)根据(1)中的式子，结合基本不等式即可得到答案.

解：(1)根据题意，当 $t=0$ 时，$x=1$，则 $1=4-\frac{k}{1}$，解得 $k=3$，所以 $x=4-\frac{3}{2t+1}$，所以 $y=1.5\cdot\frac{6+12x}{x}\cdot x-(6+12x)-t=3+6x-t=3+6\left(4-\frac{3}{2t+1}\right)-t=27-\frac{18}{2t+1}-t(t\geqslant0)$.

(2)由(1)知，$y=27-\frac{18}{2t+1}-t=27.5-\left[\frac{9}{t+0.5}+(t+0.5)\right]\leqslant27.5-2\sqrt{\frac{9}{t+0.5}\cdot(t+0.5)}=21.5$，

当且仅当 $\frac{9}{t+0.5}=t+0.5$，即 $t=2.5$ 时等号成立，

所以该厂家2024年该产品的年促销费用为2.5万元时该产品的年利润最大.

变式题 (1)C (2)5 **【解析】**(1)设$AB=x$ m$(x>0)$,种植花卉区域的面积为S m^2,则$S=(x-4)\left(\frac{1800}{x}-2\right)=-2x-\frac{7200}{x}+1808$.因为$x>0$,所以$2x+\frac{7200}{x}\geqslant 2\sqrt{14\ 400}=240$,当且仅当$x=60$时,等号成立,则$S\leqslant -240+1808=1568$,即当$AB=60$ m,$BC=30$ m时,种植花卉区域的面积取得最大值,最大值是1568 m^2,故选C.

(2)根据题意,设$y_1=\frac{k_1}{x}(x>0,k_1\in\mathbf{R})$,$y_2=k_2x(x>0,k_2\in\mathbf{R})$,则$\begin{cases}4=\frac{k_1}{10},\\16=10k_2,\end{cases}$解得$\begin{cases}k_1=40,\\k_2=\frac{8}{5},\end{cases}$所以$y_1=\frac{40}{x}(x>0)$,$y_2=\frac{8x}{5}(x>0)$,所以$y_1+y_2=\frac{40}{x}+\frac{8x}{5}\geqslant 2\sqrt{\frac{40}{x}\cdot\frac{8x}{5}}=16$,当且仅当$\frac{40}{x}=\frac{8x}{5}$,即$x=5$时等号成立,故要使两项费用之和最小,仓库到车站的距离应为5 km.

第5讲 一元二次不等式

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. $\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$ $\left\{x\middle|x\neq -\frac{b}{2a}\right\}$ $\mathbf{R}$ $\{x\mid x_1<x<x_2\}$ $\varnothing$ $\varnothing$

【对点演练】

1. $(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$ **【解析】**由$x^2-5x-6=(x-6)(x+1)\geqslant 0$,解得$x\leqslant -1$或$x\geqslant 6$,即原不等式的解集为$(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$.
2. $(-3,0)$ **【解析】**依题意可得$k\neq 0$,∵不等式$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$对于一切$x\in\mathbf{R}$恒成立,∴$k<0$且$\Delta=k^2-4\times 2k\times\left(-\frac{3}{8}\right)<0$,解得$-3<k<0$,故$k$的取值范围是$(-3,0)$.
3. $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ **【解析】**因为关于x的不等式$-x^2+bx+c<0$的解集是$\{x\mid x<-3$或$x>4\}$,所以$\begin{cases}-9-3b+c=0,\\-16+4b+c=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=1,\\c=12,\end{cases}$所以不等式$cx^2-bx-1>0$即为$12x^2-x-1>0$,即$(3x-1)(4x+1)>0$,解得$x<-\frac{1}{4}$或$x>\frac{1}{3}$,故所求解集为$\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.
4. $(-3,2)$ **【解析】**原不等式等价于$(x+3)(x-2)<0$,解得$-3<x<2$,故原不等式的解集为$(-3,2)$.
5. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$ **【解析】**由$(x+1)(2-x)\geqslant 0$,得$(x+1)(x-2)\leqslant 0$,故原不等式的解集为$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$.
6. $(-\infty,1)$ **【解析】**当$a=0$时,不等式为$2x+1<0$,有实数解,满足题意;当$a<0$时,不等式对应的二次函数的图象开口向下,$\Delta=4-4a>0$,所以不等式有实数解,满足题意;当$a>0$时,若不等式有实数解,则$\Delta=4-4a>0$,解得$a<1$,所以$0<a<1$.综上,a的取值范围是$(-\infty,1)$.

● 课堂考点探究

例1 **【思路点拨】**(1)对于分式不等式,要先等价变形,可以先把二次项系数化成正数,再求解,注意不等式分母不为0.(2)解两个一元二次不等式$0<x^2-x-2$和$x^2-x-2\leqslant 4$,然后求交集.

(1)$\left\{x\middle|\frac{2}{3}\leqslant x<3\right\}$ (2)$[-2,-1)\cup(2,3]$

【解析】(1)原不等式$\frac{2x+1}{3-x}\geqslant 1$可变形为$\frac{3x-2}{x-3}\leqslant 0$,即$(3x-2)(x-3)\leqslant 0$,且$x-3\neq 0$,解得$\frac{2}{3}\leqslant x<3$,故原不等式的解集为$\left\{x\middle|\frac{2}{3}\leqslant x<3\right\}$.

(2)原不等式组等价于$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\x^2-x-2\leqslant 4,\end{cases}$即$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\x^2-x-6\leqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}(x-2)(x+1)>0,\\(x-3)(x+2)\leqslant 0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x>2$或$x<-1,\\-2\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$故原不等式的解集为$[-2,-1)\cup(2,3]$.

例2 **【思路点拨】**对a的取值进行分类讨论,解不等式.

解:由$ax^2-2(a+1)x+4<0$,得$(ax-2)(x-2)<0$.

若$a=0$,则$-2(x-2)<0$,解得$x>2$.若$a\neq 0$,则不等式可化为$(ax-2)(x-2)=a\left(x-\frac{2}{a}\right)(x-2)<0$.

①若$a<0$,则$\frac{2}{a}<2$,解不等式得$x<\frac{2}{a}$或$x>2$;

②若$a\in(0,1)$,则$\frac{2}{a}>2$,解不等式得$2<x<\frac{2}{a}$;

③若$a=1$,则$(x-2)^2<0$无解,即$x\in\varnothing$;

④若$a>1$,则$\frac{2}{a}<2$,解不等式得$\frac{2}{a}<x<2$.

综上所述,当$a=0$时,不等式的解集为$(2,+\infty)$;当$a<0$时,不等式的解集为$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)\cup(2,+\infty)$;

当$a\in(0,1)$时,不等式的解集为$\left(2,\frac{2}{a}\right)$;当$a=1$时,不等式的解集为$\varnothing$;当$a>1$时,不等式的解集为$\left(\frac{2}{a},2\right)$.

变式题 **解:**由$x^2-4x-t(t-4)<0$,得$(x-t)[x+(t-4)]<0$,解方程$(x-t)[x+(t-4)]=0$,得$x=t$或$x=4-t$.

当$t>4-t$,即$t>2$时,不等式的解集为$\{x\mid 4-t<x<t\}$;

当$t=4-t$,即$t=2$时,不等式的解集为$\varnothing$;

当$t<4-t$,即$t<2$时,不等式的解集为$\{x\mid t<x<4-t\}$.

例3 **【思路点拨】**分情况讨论,当$a=1$时,不等式恒成立,满足题意;当$a\neq 1$时,求出满足条件的a的取值范围.

C **【解析】**当$a=1$时,不等式可化为$1>0$,恒成立,符合题意;当$a\neq 1$时,由题得$a-1>0$,且$\Delta=(a-1)^2-4(a-1)a<0$,可得$a>1$.综上,$a\geqslant 1$.故选C.

变式题 B **【解析】**依题意,不等式$mx^2+mx-4<2x^2+2x-1$对任意实数x恒成立,即不等式$(m-2)x^2+(m-2)x-3<0$对任意实数x恒成立.当$m=2$时,不等式可化为$-3<0$,恒成立,符合题意;当$m\neq 2$时,由题意$m-2<0$,且$\Delta=(m-2)^2+12(m-2)=m^2+8m-20=(m+10)(m-2)<0$,解得$-10<m<2$.综上所述,实数$m$的取值范围是$(-10,2]$.故选B.

例4 **【思路点拨】**分离参数得$a>\frac{2x-2}{x^2}$对任意的$x\in(1,4)$恒成立,则求出$\frac{2x-2}{x^2}$在区间$(1,4)$上的最大值即可.

D **【解析】**∵对任意的$x\in(1,4)$,不等式$ax^2-2x+2>0$恒成立,∴$a>\frac{2x-2}{x^2}$对任意的$x\in(1,4)$恒成立.设$f(x)=\frac{2x-2}{x^2}=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}=-2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$,∵$x\in(1,4)$,∴$\frac{1}{4}<\frac{1}{x}<1$,∴当$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$,即$x=2$时,$f(x)$取得最大值$\frac{1}{2}$,∴实数$a$的取值范围是$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.故选D.

变式题 C **【解析】**由$f(x)<-m+4$,可得$m(x^2-x+1)<5$,∴不等式$f(x)<-m+4$等价于$m<\frac{5}{x^2-x+1}$.当$x\in[1,3]$时,$x^2-x+1\in[1,7]$,∴$\frac{5}{x^2-x+1}$的最小值为$\frac{5}{7}$,要使不等式$m<\frac{5}{x^2-x+1}$对于任意$x\in[1,3]$恒成立,只需$m<\frac{5}{7}$,故实数m的取值范围为$\left(-\infty,\frac{5}{7}\right)$.故选C.

例5 **【思路点拨】**先把$f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m$化为$f(x)=(x-2)m+x^2-4x+4$,令$g(m)=(x-2)m+x^2-4x+4$,然后分类讨论即可求解.

B **【解析】**$f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m=(x-2)m+x^2-4x+4$,令$g(m)=(x-2)m+x^2-4x+4$,$m\in[-1,1]$.当$x=2$时,$g(m)=0$,不符合题意;当$x>2$时,$g(m)$单调递增,由$g(-1)=(x-2)\cdot(-1)+x^2-4x+4>0$,可得$x>3$;当$x<2$时,$g(m)$单调递减,由$g(1)=(x-2)\cdot 1+x^2-4x+4>0$,可得$x<1$.综上,$x$的取值范围是$(-\infty,1)\cup(3,$

$+\infty)$. 故选 B.

变式题 A **【解析】** 由题得不等式$(x-4)a-x^2-3x+16\leqslant 0$对任意$a\in[-2,4]$恒成立，所以$\begin{cases}-2(x-4)-x^2-3x+16\leqslant 0,\\4(x-4)-x^2-3x+16\leqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x^2-5x+24\leqslant 0,\\-x^2+x\leqslant 0,\end{cases}$解得$x\geqslant 3$或$x\leqslant -8$. 故选 A.

例 6 **【思路点拨】** (1)设$f(x)=x^2+(m-3)x+m$，由根与系数的关系及判别式可解；(2)由方程$f(x)=0$的一个根大于1，一个根小于1，得到$f(1)=2m-2<0$，可解；(3)由已知条件得，函数$f(x)=x^2+(m-3)x+m$在$(-2,0)$与$(0,4)$内各有一个零点，由此构造函数值应该满足的不等式组，解不等式组即可得到实数m的取值范围；(4)由已知条件得，函数$f(x)=x^2+(m-3)x+m$的零点一个小于2，一个大于4，由此构造函数值应该满足的不等式组，解不等式组即可得到实数m的取值范围；(5)由已知条件得，函数$f(x)=x^2+(m-3)x+m$的零点均在区间$(0,2)$内，由此构造函数值应该满足的不等式组，解不等式组即可得到实数m的取值范围.

解： 令$f(x)=x^2+(m-3)x+m$.

(1)由题意得$\begin{cases}\Delta=(m-3)^2-4m\geqslant 0,\\3-m>0,\\m>0,\end{cases}$解得$0<m\leqslant 1$.

(2)若方程$x^2+(m-3)x+m=0$的一个根大于1，一个根小于1，则$f(1)=2m-2<0$，解得$m<1$.

(3)若方程$x^2+(m-3)x+m=0$的一个根在$(-2,0)$内，另一个根在$(0,4)$内，则$\begin{cases}f(-2)=-m+10>0,\\f(0)=m<0,\\f(4)=5m+4>0,\end{cases}$解得$-\frac{4}{5}<m<0$.

(4)若方程$x^2+(m-3)x+m=0$的一个根小于2，一个根大于4，则$\begin{cases}f(2)=3m-2<0,\\f(4)=5m+4<0,\end{cases}$解得$m<-\frac{4}{5}$.

(5)若方程$x^2+(m-3)x+m=0$的两个根都在$(0,2)$内，则$\begin{cases}f(2)=3m-2>0,\\f(0)=m>0,\\0<-\frac{m-3}{2}<2,\\\Delta=(m-3)^2-4m\geqslant 0,\end{cases}$解得$\frac{2}{3}<m\leqslant 1$.

变式题 (1)C (2)$(-2\sqrt{2},-2)\cup(1,2\sqrt{2})$ **【解析】** (1)令$f(x)=x^2+(m-2)x+5-m$，由题可知$\begin{cases}\Delta>0,\\\frac{2-m}{2}>2,\\f(2)>0,\end{cases}$即$\begin{cases}(m-2)^2-4\times(5-m)>0,\\m<-2,\\4+(m-2)\times 2+5-m>0,\end{cases}$即$\begin{cases}m>4\text{ 或 }m<-4,\\m<-2,\\m>-5,\end{cases}$所以$-5<m<-4$，即实数$m$的取值范围是$(-5,-4)$. 故选 C.

(2)设$f(x)=7x^2-(a+13)x+a^2+a-2$，由题意得$x_1,x_2$是$f(x)$的两个零点，且$0<x_1<1<x_2<2$，所以$\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)<0,\\f(2)>0,\end{cases}$即$\begin{cases}a^2+a-2>0,\\a^2-8<0,\\a^2-a>0,\end{cases}$即$\begin{cases}a>1\text{ 或 }a<-2,\\-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2},\\a>1\text{ 或 }a<0,\end{cases}$所以$-2\sqrt{2}<a<-2$或$1<a<2\sqrt{2}$，故实数$a$的取值范围是$(-2\sqrt{2},-2)\cup(1,2\sqrt{2})$.

例 7 **【思路点拨】** (1)令$f(x)=x^2+mx+n=(x-x_1)(x-x_2)$，且$x_1,x_2\in(-1,1)$，$x_1\neq x_2$，注意到$n^2-m^2+2n+1=(n+1)^2-m^2=(1+m+n)(1-m+n)=f(1)f(-1)$，则将问题转化为求$f(1)f(-1)$的范围即可. (2)由函数的零点的定义和二次方程有两个相等的实数解的条件可得a,b的关系式，由二次函数的最值求法可判断 A；由基本不等式可判断 B；由二次方程中根与系数的关系可判断 C，D.

(1)A (2)ABD **【解析】** (1)令$f(x)=x^2+mx+n=(x-x_1)(x-x_2)$，且$x_1,x_2\in(-1,1)$，$x_1\neq x_2$. 由题意得$n^2-m^2+2n+1=(n+1)^2-m^2=(1+m+n)(1-m+n)=f(1)f(-1)$，而$f(1)f(-1)=(1-x_1)(1-x_2)(-1-x_1)(-1-x_2)=(1-x_1^2)(1-x_2^2)$，$\because 0<1-x_1^2\leqslant 1$，$0<1-x_2^2\leqslant 1$，$\therefore f(1)f(-1)\in(0,1]$，又$x_1\neq x_2$，$\therefore f(1)f(-1)\in(0,1)$，即$n^2-m^2+2n+1\in(0,1)$. 故选 A.

(2)根据题意，函数$y=x^2+ax+b(a>0)$有且只有一个零点，则必有$a^2-4b=0$，即$a^2=4b(b>0)$. $a^2-b^2-4=4b-b^2-4=-(b^2-4b+4)=-(b-2)^2\leqslant 0$，当且仅当$b=2$时，等号成立，则$a^2-b^2\leqslant 4$，故 A 正确；$a^2+\frac{1}{b}=4b+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{4b\cdot\frac{1}{b}}=4$，当且仅当$b=\frac{1}{2}$时，等号成立，故 B 正确；由$x_1,x_2$为方程$x^2+ax-b=0$的两根，可得$x_1x_2=-b<0$，故 C 错误；由$x_1,x_2$为方程$x^2+ax+b-c=0$的两根，可得$x_1+x_2=-a$，$x_1x_2=b-c$，则$|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=a^2-4(b-c)=a^2-4b+4c=4c=16$，解得$c=4$，故 D 正确. 故选 ABD.

变式题 ABC **【解析】** 若$a=0$，则$b=-c$，则$f(0)\cdot f(1)=c(3a+2b+c)=-c^2\leqslant 0$，与已知矛盾，$\therefore a\neq 0$，故 A 正确. 方程$3ax^2+2bx+c=0$的判别式$\Delta=4(b^2-3ac)$，由$a+b+c=0$且$a\neq 0$，消去$b$得$\Delta=4(a^2+c^2-ac)=4\left[\left(a-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2\right]>0$，$\therefore$方程$f(x)=0$有实根，由$f(0)\cdot f(1)>0$，得$c(3a+2b+c)>0$，由$a+b+c=0$，消去$c$得$(a+b)(2a+b)<0$，$\therefore -2<\frac{b}{a}<-1$，故 B 正确. 由条件知$x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}$，$x_1x_2=\frac{c}{3a}=-\frac{a+b}{3a}$，$\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4}{9}\left(\frac{b}{a}+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{3}$，$\because -2<\frac{b}{a}<-1$，$\therefore \frac{1}{3}\leqslant(x_1-x_2)^2<\frac{4}{9}$，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant|x_1-x_2|<\frac{2}{3}$，故 C 正确. 抛物线$y=f(x)$的顶点坐标为$\left(-\frac{b}{3a},\frac{3ac-b^2}{3a}\right)$，由$-2<\frac{b}{a}<-1$，得$\frac{1}{3}<-\frac{b}{3a}<\frac{2}{3}$. 当$\begin{cases}f(0)<0,\\f(1)<0\end{cases}$时，有$\begin{cases}c<0,\\3a+2b+c<0,\\a+b+c=0,\end{cases}$可得$a<c<0$，此时抛物线开口向下，$\because f\left(-\frac{b}{3a}\right)=-\frac{a^2+c^2-ac}{3a}>0$，$\therefore$方程$f(x)=0$在区间$\left(0,-\frac{b}{3a}\right)$与$\left(-\frac{b}{3a},1\right)$内分别有一个实根；当$\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)>0\end{cases}$时，有$\begin{cases}c>0,\\3a+2b+c>0,\\a+b+c=0,\end{cases}$可得$a>c>0$，此时抛物线开口向上，$\because f\left(-\frac{b}{3a}\right)=-\frac{a^2+c^2-ac}{3a}<0$，$\therefore$方程$f(x)=0$在区间$\left(0,-\frac{b}{3a}\right)$与$\left(-\frac{b}{3a},1\right)$内分别有一个实根. 故方程$f(x)=0$在$(0,1)$内有两个不相等的实根，故 D 不正确. 故选 ABC.

第二单元　函数

第 6 讲　函数的概念及其表示

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)每一个　唯一　(2)定义域　对应关系　值域　(3)定义域　对应关系
2. 解析法　列表法
3. 对应关系

【对点演练】

1. (2) **【解析】** (1)$y=(\sqrt{x})^2=x(x\in\{x|x\geqslant 0\})$，它与函数$y=x(x\in\mathbf{R})$虽然对应关系相同，但是定义域不相同，所以这个函数与函数$y=x(x\in\mathbf{R})$不是同一个函数. (2)$u=\sqrt[3]{v^3}=v(v\in\mathbf{R})$，它与函数$y=x(x\in\mathbf{R})$不仅对应关系相同，而且定义域也相同，所以这个函数与函数$y=x(x\in\mathbf{R})$是同一个函数. (3)$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}-x,x<0,\\x,x\geqslant 0,\end{cases}$它与函数$y=x(x\in\mathbf{R})$

的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，但是当 $x<0$ 时，它的对应关系与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$ 的对应关系不相同，所以这个函数与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$ 不是同一个函数. (4)$m=\frac{n^2}{n}=n(n\in\{n\mid n\neq 0\})$，它与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$ 的对应关系相同但定义域不相同，所以这个函数与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$ 不是同一个函数. 故填(2).

2. $(-\infty,-3)\cup(-3,8]$ **[解析]** 要使函数有意义，只需 $8-x\geqslant 0$ 且 $x+3\neq 0$，即 $x\leqslant 8$ 且 $x\neq -3$，故 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-3)\cup(-3,8]$.

3. 4　5 **[解析]** $f(-2)=(-2)^2=4$，$f[f(-2)]=f(4)=4+1=5$.

4. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ **[解析]** 函数的定义域为 $\left\{x\middle| x\neq -\frac{1}{2}\right\}$，$y=\frac{x}{2x+1}=\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{x+\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}-\frac{\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}$，因为 $-\frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}\neq 0$，所以 $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}\neq\frac{1}{2}$，故函数 $y=\frac{x}{2x+1}$ 的值域为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

5. ② **[解析]** 对于①，在集合 N 中找不到与 2 对应的元素，故不是从集合 M 到集合 N 的函数；对于③，在集合 N 中可以找到两个元素与 1 对应，故不是从集合 M 到集合 N 的函数；对于④，在集合 N 中找不到与 2 对应的元素，故不是从集合 M 到集合 N 的函数. 故填②.

6. $x-1(x>0)$ **[解析]** 令 $t=e^x$，则 $t>0$，所以 $f(t)=t-1(t>0)$，则 $f(x)=x-1(x>0)$.

7. $(-\infty,-1]\cup(0,1]$ **[解析]** 当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 2$ 即为 $x^2+1\geqslant 2$，解得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$，所以 $x\leqslant -1$；当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant 2$ 即为 $-x+3\geqslant 2$，解得 $x\leqslant 1$，所以 $0<x\leqslant 1$. 综上所述，x 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup(0,1]$.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)根据函数的定义域和对应关系是否相同判断是否是同一个函数. (2)利用对数、分式、根式的性质列不等式组，求 x 的取值范围，即得函数 $f(x)$ 的定义域. (3)由函数 $y=f(2^x)$ 的定义域求出函数 $y=f(x)$ 的定义域，再根据抽象函数的定义域及分式的性质求解.

(1)B　(2)D　(3)B **[解析]** (1)对于 A，$f(x)=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，$g(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，它们的定义域不相同，故不是同一个函数；对于 B，由 $\begin{cases}9-x^2\geqslant 0,\\ |x-4|-4\neq 0,\end{cases}$ 得 $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{|x-4|-4}$ 的定义域为 $[-3,0)\cup(0,3]$，且 $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{(4-x)-4}=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$，$g(x)=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ 的定义域为 $[-3,0)\cup(0,3]$，它们的定义域和对应关系都相同，故是同一个函数；对于 C，两个函数的定义域相同，但对应关系不同，故不是同一个函数；对于 D，$f(x)=|2x-1|+2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)=\begin{cases}2x+1,x>\frac{1}{2},\\ 3-2x,x<\frac{1}{2}\end{cases}$ 的定义域为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，它们的定义域不相同，故不是同一个函数. 故选 B.

(2)要使函数 $f(x)=\frac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-3)}$ 有意义，需满足 $\begin{cases}|x-2|-1\geqslant 0,\\ x-3>0,\\ x-3\neq 1,\end{cases}$ 解得 $x>3$ 且 $x\neq 4$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(3,4)\cup(4,+\infty)$. 故选 D.

(3)因为函数 $y=f(2^x)$ 的定义域为 $[1,4]$，所以函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[2,16]$. 要使函数 $y=\frac{f(x+1)}{x-1}$ 有意义，需满足 $\begin{cases}2\leqslant x+1\leqslant 16,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $1<x\leqslant 15$，所以函数 $y=\frac{f(x+1)}{x-1}$ 的定义域为 $(1,15]$. 故选 B.

变式题 (1)D　(2)C　(3)$\{x\mid x<0$ 且 $x\neq -2\}$

[解析] (1)根据函数的定义可知，对于定义域内任意一个 x 只能有唯一的 y 值与之对应. 选项 A，B，C 中的图象均满足函数的定义，是函数图象；选项 D 中的图象存在一个 x 与两个不同的 y 对应，所以 D 不是函数图象. 故选 D.

(2)因为函数 $y=f(2x)$ 的定义域为 $[-2,4]$，所以函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-4,8]$，要使函数 $y=f(x)-f(-x)$ 有意义，需满足 $\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 8,\\ -4\leqslant -x\leqslant 8,\end{cases}$ 解得 $-4\leqslant x\leqslant 4$，故函数 $y=f(x)-f(-x)$ 的定义域为 $[-4,4]$. 故选 C.

(3)由函数 $y=\frac{(x+2)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 知 $\begin{cases}x+2\neq 0,\\ |x|-x>0,\end{cases}$ 解得 $x<0$ 且 $x\neq -2$，所以函数 $y=\frac{(x+2)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域是 $\{x\mid x<0$ 且 $x\neq -2\}$.

例 2 **[思路点拨]** (1)利用配凑法或换元法求解析式. (2)设出二次函数 $f(x)$ 的解析式，然后利用待定系数法求解其解析式. (3)先把 x 都化为 $2x$，进行化简得到 $f(x)-2f\left(\frac{4}{x}\right)=2x$，再用 $\frac{4}{x}$ 替换 x 得到 $f\left(\frac{4}{x}\right)-2f(x)=\frac{8}{x}$，最后联立两方程求解即可.

(1)D　(2)D　(3)$-\frac{2}{3}x-\frac{16}{3x}$ **[解析]** (1)方法一：因为 $f\left(\frac{1-x}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\frac{2}{x}-2=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+2\left(\frac{1}{x}-1\right)$，所以 $f(x)=x^2+2x(x\neq -1)$. 故选 D.

方法二：设 $t=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1(t\neq -1)$，则 $\frac{1}{x}=t+1(t\neq -1)$，所以 $f(t)=(t+1)^2-1=t^2+2t$，所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^2+2x(x\neq -1)$. 故选 D.

(2)设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a\neq 0$，∵ $f(0)=1$，∴ $c=1$，则 $f(x)=ax^2+bx+1$，∵ $f(x+1)-f(x)=2x$，令 $x=0$，则 $f(1)-f(0)=0$，∴ $f(1)=1$，即 $a+b+1=1$，故 $a+b=0$①；令 $x=1$，则 $f(2)-f(1)=2$，∴ $f(2)=3$，即 $4a+2b+1=3$，故 $2a+b=1$②. 由①②得 $a=1$，$b=-1$，∴ $f(x)=x^2-x+1$. 故选 D.

(3)由 $f(2x)-2f\left(\frac{2}{x}\right)=4x$，得 $f(2x)-2f\left(\frac{4}{2x}\right)=2\cdot(2x)$，即 $f(x)-2f\left(\frac{4}{x}\right)=2x$①，用 $\frac{4}{x}$ 替换 x，得 $f\left(\frac{4}{x}\right)-2f(x)=2\times\frac{4}{x}$②，由 ① + 2 × ② 得 $-3f(x)=2x+\frac{16}{x}$，故 $f(x)=-\frac{2}{3}x-\frac{16}{3x}$.

变式题 (1)AC　(2)A　(3)$x^2-2x(x\geqslant 1)$ **[解析]** (1)设 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$，则 $f(2x)=2kx+b$，故 $f[f(2x)]=f(2kx+b)=2k^2x+kb+b$. 因为 $f[f(2x)]=8x+3$，所以 $\begin{cases}2k^2=8,\\ kb+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-2,\\ b=-3,\end{cases}$ 所以 $f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x-3$. 故选 AC.

(2)由 $2f(x)-f(-x)=3x+1$①，可得 $2f(-x)-f(x)=-3x+1$②，由 $2\times$① + ② 得 $3f(x)=3x+3$，所以 $f(x)=x+1$，故选 A.

(3)令 $\sqrt{x}+1=t(t\geqslant 1)$，则 $x=(t-1)^2(t\geqslant 1)$，所以 $f(t)=(t-1)^2-1=t^2-2t(t\geqslant 1)$，所以 $f(x)=x^2-2x(x\geqslant 1)$.

例 3 **[思路点拨]** (1)设 $\sqrt{3-x}=t(t\geqslant 0)$，化简函数为 $y=-2t^2+4t+6$，结合二次函数的性质，即可求解. (2)将 $y=\frac{x}{x^2+x+1}(x>0)$ 化为 $y=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+1}(x>0)$，利用基本不等式即可求解. (3)分别求 $f(x)$ 在各段区间上的取值范围，再求它们的并集，即得分段函数的值域. (4)对函数求导，得出函数

在指定区间上的单调性，确定最大值和最小值，得函数值域.

(1)A　(2)C　(3)$[2,+\infty)$　(4)$\left[-\frac{3\pi}{2},2+\frac{\pi}{2}\right]$

【解析】(1)设$\sqrt{3-x}=t$，则$t\geqslant 0$，且$x=3-t^2$，则$y=2\cdot(3-t^2)+4t=-2t^2+4t+6=-2(t-1)^2+8\leqslant 8$，所以函数的值域为$(-\infty,8]$. 故选 A.

(2)$y=\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+1}$，当$x>0$时，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当$x=1$时等号成立，而$x^2+x+1>0$恒成立，故$0<\frac{1}{x+\frac{1}{x}+1}\leqslant\frac{1}{3}$，所以$y=\frac{x}{x^2+x+1}(x>0)$的值域为$\left(0,\frac{1}{3}\right]$. 故选 C.

(3)当$x\leqslant 2$时，$f(x)=-x+4\geqslant 2$；当$x>2$时，$f(x)=1+\log_2 x>2$. 所以函数$f(x)$的值域为$[2,+\infty)$.

(4)$f'(x)=(x+1)\cos x$，当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增. 因为$f(0)=2$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2+\frac{\pi}{2}$，$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{3\pi}{2}$，$f(2\pi)=2$，所以函数$f(x)$的值域为$\left[-\frac{3\pi}{2},2+\frac{\pi}{2}\right]$.

变式题　(1)$\{y\in\mathbf{R}\mid y\neq 3\}$　(2)$\left[\frac{1}{8},33\right]$　(3)$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

【解析】(1)$y=\frac{3x+1}{x-2}=\frac{3(x-2)+7}{x-2}=3+\frac{7}{x-2}$，因为$\frac{7}{x-2}\neq 0$，所以$3+\frac{7}{x-2}\neq 3$，所以$y=\frac{3x+1}{x-2}$的值域为$\{y\in\mathbf{R}\mid y\neq 3\}$.

(2)令$y_1=2^{x-5}$，$y_2=\log_3\sqrt{x-1}$，易知$y_1=2^{x-5}$，$y_2=\log_3\sqrt{x-1}$在$[2,10]$上均单调递增，所以$y=y_1+y_2$在$[2,10]$上是增函数，当$x=2$时，$y_{\min}=2^{-3}+\log_3\sqrt{2-1}=\frac{1}{8}$，当$x=10$时，$y_{\max}=2^5+\log_3\sqrt{10-1}=33$，故所求函数的值域为$\left[\frac{1}{8},33\right]$.

(3)由$1-2x\geqslant 0$，解得$x\leqslant\frac{1}{2}$，故函数$y=x-\sqrt{1-2x}$的定义域为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$，设$\sqrt{1-2x}=t(t\geqslant 0)$，则$x=\frac{1-t^2}{2}$，所以$y=\frac{1-t^2}{2}-t=-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(t+1)^2+1\leqslant\frac{1}{2}$，所以函数的值域为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

例 4　**【思路点拨】**(1)根据分段函数的解析式求出$f(2)=4$，再求$f\left[\frac{1}{f(2)}\right]=f\left(\frac{1}{4}\right)$的值. (2)先根据当$x>0$时，$f(x)=f(x-3)$得$f(2024)=f(-1)$，再根据分段函数的解析式即可得答案.

(1)B　(2)A　**【解析】**(1)∵函数$f(x)=\begin{cases}1-x^2,x\leqslant 1,\\(x+2)(x-1),x>1,\end{cases}$∴$f(2)=(2+2)\times(2-1)=4$，∴$f\left[\frac{1}{f(2)}\right]=f\left(\frac{1}{4}\right)=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$. 故选 B.

(2)由题可知，当$x>0$时，$f(x)=f(x-3)$，所以$f(2024)=f(2021)=\cdots=f(2)=f(-1)=e^{-1+\ln 2}=\frac{e^{\ln 2}}{e}=\frac{2}{e}$，故选 A.

例 5　**【思路点拨】**(1)先根据分段函数的解析式求出$f(1)$，即可得到$f(a)=-2$，再分$a>0$和$a\leqslant 0$两种情况求解即可. (2)分$x+1\leqslant 1$和$x+1>1$两种情况，结合指数函数和对数函数的单调性解不等式即可得解.

(1)A　(2)$(0,7)$　**【解析】**(1)∵函数$f(x)=\begin{cases}2^x,x>0,\\x+1,x\leqslant 0,\end{cases}$∴$f(1)=2^1=2$，∵$f(a)+f(1)=0$，∴$f(a)=-2$. 当$a>0$时，$f(a)=2^a=-2$，无解；当$a\leqslant 0$时，$f(a)=a+1=-2$，解得$a=-3$. 故选 A.

(2)当$x+1\leqslant 1$，即$x\leqslant 0$时，$f(x+1)=e^{2-(x+1)}=e^{1-x}<1$，∴$1-x<0$，解得$x>1$(舍)；当$x+1>1$，即$x>0$时，$f(x+1)=\lg(x+3)<1$，∴$0<x+3<10$，解得$-3<x<7$，∴$0<x<7$. 综上所述，不等式$f(x+1)<1$的解集为$(0,7)$.

【应用演练】

1. B　**【解析】**由题意知，$f(1)=a+3$，$f(-1)=\frac{1}{2}$，即$f(a+3)=\frac{1}{2}$. 当$a+3\geqslant 0$，即$a\geqslant -3$时，$f(a+3)=a+3(a+3)=4a+9=\frac{1}{2}$，解得$a=-\frac{17}{8}$，满足题意；当$a+3<0$，即$a<-3$时，$f(a+3)=2^{a+3}=\frac{1}{2}$，解得$a=-4$，满足题意. 所以$a=-\frac{17}{8}$或$a=-4$. 故选 B.

2. D　**【解析】**由$f(2a-1)-1\leqslant 0$，得$f(2a-1)\leqslant 1$. 当$2a-1\geqslant 1$，即$a\geqslant 1$时，$f(2a-1)=\ln(2a-1)\leqslant 1$，解得$\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e+1}{2}$，∴$1\leqslant a\leqslant\frac{e+1}{2}$；当$0\leqslant 2a-1<1$，即$\frac{1}{2}\leqslant a<1$时，$f(2a-1)=0\leqslant 1$，∴$\frac{1}{2}\leqslant a<1$；当$2a-1<0$，即$a<\frac{1}{2}$时，$f(2a-1)=2a-1\leqslant 1$，解得$a\leqslant 1$，∴$a<\frac{1}{2}$. 综上所述，实数$a$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{e+1}{2}\right]$. 故选 D.

3. D　**【解析】**对于 A，当$m>1$时，$\log_2(m-1)=1$，解得$m=3$；当$m\leqslant 1$时，$\left(\frac{1}{2}\right)^m=1$，解得$m=0$. 所以$m=0$或$m=3$，故选项 A 不正确. 对于 B，$f\left(\frac{2023}{2022}\right)=\log_2\left(\frac{2023}{2022}-1\right)=\log_2\frac{1}{2022}=-\log_2 2022<0$，$f\left[f\left(\frac{2023}{2022}\right)\right]=f(-\log_2 2022)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 2022}=2^{\log_2 2022}=2022$，故选项 B 不正确. 对于 C，当$a>1$时，$\log_2(a-1)\geqslant 2=\log_2 4$，即$a-1\geqslant 4$，解得$a\geqslant 5$；当$a\leqslant 1$时，$\left(\frac{1}{2}\right)^a\geqslant 2$，解得$a\leqslant -1$. 所以$a\leqslant -1$或$a\geqslant 5$，故选项 C 不正确. 对于 D，当$x>1$时，函数$y=\log_2(x-1)$在$(1,+\infty)$上单调递增，且$y=\log_2(x-1)\in\mathbf{R}$；当$x\leqslant 1$时，函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在$(-\infty,1]$上单调递减，且$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. 因为方程$f(x)=k$有两个不同的实数根，所以$k\geqslant\frac{1}{2}$，故选项 D 正确. 故选 D.

4. $\frac{3}{4}$　**【解析】**因为$1=\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4=2$，所以$f(\log_2 3)=f(\log_2 3-1)=f(\log_2 3-2)=f\left(\log_2\frac{3}{4}\right)=2^{\log_2\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$.

第 7 讲　函数的单调性与最值

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $f(x_1)<f(x_2)$　$f(x_1)>f(x_2)$　上升的　下降的
2. 单调性　单调区间
3. $f(x)\leqslant M$　$f(x)\geqslant M$　$f(x_0)=M$　纵坐标　纵坐标

【对点演练】

1. $(2,3]$　$[-3,2]$　**【解析】**由函数$f(x)=(x-2)^2+5(x\in[-3,3])$的图象可得$f(x)$的单调递增区间是$(2,3]$，单调递减区间是$[-3,2]$.

2. 2　$\frac{1}{2}$　**【解析】**函数$f(x)=\frac{2}{x-1}$在$[2,5]$上单调递减，所以$f(x)$的最大值为$f(2)=2$，最小值为$f(5)=\frac{1}{2}$.

3. > **[解析]** 因为对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 都有$\frac{x_1-x_2}{f(x_1)-f(x_2)}>0$,所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,又 $-3>-\pi$,所以 $f(-3)>f(-\pi)$.

4. $(-\infty,2]$ **[解析]** 函数 $f(x)=|x-a|+1$ 的单调递增区间是$[a,+\infty)$,当 $f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增时,$[2,+\infty)\subseteq[a,+\infty)$,所以 $a\leqslant2$,故实数 a 的取值范围是$(-\infty,2]$.

5. $[3,+\infty)$ **[解析]** 由 $x^2-2x-3\geqslant0$ 得 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant3$,故 $f(x)$的定义域为$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. 由函数 $y=x^2-2x-3$ 在$(-\infty,-1]$上单调递减,在$[3,+\infty)$上单调递增,得 $f(x)$的单调递增区间为$[3,+\infty)$.

6. $\left(-\infty,\frac{13}{8}\right]$ **[解析]** 由题知$\begin{cases}a-2<0,\\(a-2)\times2\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2-1,\end{cases}$解得 $a\leqslant\frac{13}{8}$,即实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,\frac{13}{8}\right]$.

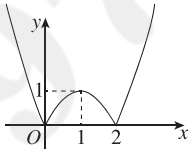
7. (1)$(-\infty,-3]$ (2)-3 **[解析]** (1)函数 $f(x)$的图象的对称轴为直线 $x=1-a$,由题意得 $1-a\geqslant4$,解得 $a\leqslant-3$,故实数 a 的取值范围是$(-\infty,-3]$.
(2)函数 $f(x)$的图象的对称轴为直线 $x=1-a$,由题意得 $1-a=4$,解得 $a=-3$.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** 先分离常数,再根据定义判断函数的单调性,注意分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况进行讨论.

解:函数 $f(x)=\frac{a^x+1-2}{a^x+1}=1-\frac{2}{a^x+1}$,设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(1-\frac{2}{a^{x_1}+1}\right)-\left(1-\frac{2}{a^{x_2}+1}\right)=\frac{2}{a^{x_2}+1}-\frac{2}{a^{x_1}+1}=\frac{2(a^{x_1}-a^{x_2})}{(a^{x_1}+1)(a^{x_2}+1)}$,
当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,由 $x_1<x_2$,得 $a^{x_1}<a^{x_2}$,
所以 $a^{x_1}-a^{x_2}<0$,又 $a^{x_1}+1>0$,$a^{x_2}+1>0$,
所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,
此时 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;
当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,
由 $x_1<x_2$,得 $a^{x_1}>a^{x_2}$,所以 $a^{x_1}-a^{x_2}>0$,
又 $a^{x_1}+1>0$,$a^{x_2}+1>0$,所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,
即 $f(x_1)>f(x_2)$,此时 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.
综上,当 $a>1$ 时,函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;
当 $0<a<1$ 时,函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

变式题 BD **[解析]** 对于 A,画出函数 $y=|x^2-2x|$的图象如图所示,易知函数 $y=|x^2-2x|$在其定义域内不是增函数,故 A 错误;对于 B,因为函数 $y=e^x$ 是增函数,$y=e^{-x}$ 是减函数,所以 $y=e^x-e^{-x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,故 B 正确;对于 C,函数 $y=\log_{0.5}x$ 是减函数,而 $y=x+1$ 为增函数,所以函数 $y=\log_{0.5}(x+1)$在定义域$(-1,+\infty)$上为减函数,故 C 错误;对于 D,$y=x+\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$y'=1-\sin x\geqslant0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,故 $y=x+\cos x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,故 D 正确. 故选 BD.



例 2 **[思路点拨]** (1)先分类讨论,去掉绝对值符号,然后利用二次函数图象的开口方向和对称轴判断单调递增区间即可.
(2)对函数求导,利用导数的符号确定函数的单调区间.

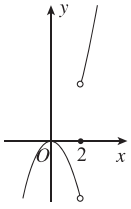
(1)$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$和$[2,+\infty)$ (2)$(\pi,2\pi)$ **[解析]** (1)当 $x\geqslant2$ 时,$f(x)=(x-2)(x+1)=x^2-x-2$,因为 $y=x^2-x-2$ 的图象开口向上且对称轴方程为 $x=\frac{1}{2}$,所以 $f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增;当 $x<2$ 时,$f(x)=(2-x)(x+1)=-x^2+x+2$,因为 $y=-x^2+x-2$ 的图象开口向下且对称轴方程为 $x=\frac{1}{2}$,所以 $f(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$上单调递增. 综上,函数 $f(x)$的单调递增区间是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$和$[2,+\infty)$.

(2)由函数 $y=\sin x-x\cos x(0<x<2\pi)$,可得 $y'=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$,令 $y'<0$,得 $\pi<x<2\pi$,所以函数 $y=\sin x-x\cos x(0<x<2\pi)$的单调递减区间为$(\pi,2\pi)$.

变式题 (1)A (2)A (3)$[0,2)$ **[解析]** (1)函数 $f(x)=3^{x^2-3x+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,令 $u=x^2-3x+1$,$y=3^u$,又 $y=3^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,$u=x^2-3x+1$ 的单调递增区间为$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$,所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$. 故选 A.

(2)由题得 $f'(x)=1+\ln x$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{1}{e}$,当 $0<x<\frac{1}{e}$时,$f'(x)<0$,当 $x>\frac{1}{e}$时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增,所以 $f(x)$的单调递减区间是$\left(0,\frac{1}{e}\right)$. 故选 A.

(3)由题意知 $g(x)=x^2f(x-1)=\begin{cases}x^2,x>2,\\0,x=2,\\-x^2,x<2,\end{cases}$ 作出函数 $g(x)$的图象,如图所示,由图可知,$g(x)$的单调递减区间是$[0,2)$.



例 3 **[思路点拨]** (1)先得出函数图象的对称性和函数的单调性,再结合选项逐一判断即可. (2)由题可得 $a^2+3a>b^2+3b$,构造函数,利用函数的单调性即可求解.
(1)B (2)B **[解析]** (1)因为 $f(x)$在区间$(-\infty,1)$上满足 $(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]>0$,所以 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增,又函数 $f(x)$满足 $f(1+x)=f(1-x)$,所以函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称. 对于 A,因为函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,所以 $f(3)=f(-1)$,故 A 错误;对于 B,因为函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,所以 $f(2)=f(0)$,因为 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增,所以 $f(-1)<f(0)$,即 $f(-1)<f(2)$,故 B 正确;对于 C,因为 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增,所以 $f(-2)<f(-1)$,即 $f(-2)<f(3)$,故 C 错误;对于 D,令 $f(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$,易知其满足题设条件,但 $f(0)\neq0$,故 D 错误. 故选 B.
(2)因为 $a>0$,所以 $a^2+3a>a^2+2a=b^2+3b$,所以 $a^2+3a>b^2+3b$,令函数 $f(x)=x^2+3x$,因为函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增且 $b>0$,$a>0$,所以 $a>b$. 故选 B.

例 4 **[思路点拨]** (1)求出函数的定义域,判断函数的奇偶性与单调性,根据奇偶性与单调性将函数不等式转化为关于自变量的不等式,求解即可. (2)利用已知等式结合赋值法可得 $f(1)=1$,再利用函数 $f(x)$的单调性进行求解.

(1)D (2)D **[解析]** (1)由$\frac{2-x}{2+x}>0$,即$(x-2)(x+2)<0$,解得 $-2<x<2$,所以 $f(x)$的定义域为$(-2,2)$,且 $f(-x)=x+\lg\frac{2+x}{2-x}=-\left(-x+\lg\frac{2-x}{2+x}\right)=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数. 又函数 $y=\frac{2-x}{2+x}=\frac{-(x+2)+4}{2+x}=-1+\frac{4}{x+2}$在$(-2,2)$上单调递减,所以 $y=\lg\frac{2-x}{2+x}$在$(-2,2)$上单调递减,则 $f(x)$在$(-2,2)$上单调递减. 不等式 $f(m)+f(2m-1)>0$,即 $f(m)>f(1-2m)$,故$\begin{cases}-2<m<2,\\-2<2m-1<2,\\m<1-2m,\end{cases}$解得$-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{3}$,即实数 m 的取值范围是$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$. 故选 D.
(2)在 $f(xy)=f(x)+f(y)-1$ 中,令 $x=y=1$,得 $f(1)=f(1)+f(1)-1$,即 $f(1)=1$,所以 $f(\log_2x-1)>f(1)$,因为函数 $f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的减函数,所以$\begin{cases}\log_2x-1>0,\\\log_2x-1<1,\end{cases}$解得 $2<x<4$,故选 D.

例 5 **[思路点拨]** (1)根据增函数$-$减函数$=$增函数,可判断出 $f(x)$在$[1,3]$上单调递增,进而求出最大值. (2)先利用换元法化简函数,进而可判断函数的单调性,即可求最值.

(1)$\frac{7}{3}$ (2)$\frac{5}{2}$ **[解析]** (1)$y=\frac{x^2-2}{x}=x-\frac{2}{x}$在$[1,3]$上单调递增,$y=\ln(4-x)$在$[1,3]$上单调递减,∴$f(x)$在$[1,3]$上单调递增,∴$f(x)_{\max}=f(3)=\frac{9-2}{3}-\ln1=\frac{7}{3}$.

(2)$y=\frac{(x^2+4)+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$,令 $t=\sqrt{x^2+4}$

$(t\geqslant 2)$，则 $y=t+\frac{1}{t}(t\geqslant 2)$. 易知 $y=t+\frac{1}{t}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $y\geqslant 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. 故所求函数的最小值是 $\frac{5}{2}$.

例 6 **【思路点拨】**(1)先求出函数的定义域，然后根据复合函数的单调性得出 $f(x)$ 的单调递增区间，根据题意列出不等式组求解即可. (2)根据题意可知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x}-m,x\geqslant m,\\ \frac{1}{x}-x+m,x<m\end{cases}$ 在 $(-\infty,0)$ 上不单调，结合幂函数、一次函数和对勾函数的单调性分 $m\geqslant 0,m<0$ 讨论函数 $f(x)$ 的单调性，即可求解.

(1)D (2)$(-\infty,-1)$ **【解析】**(1)由 $-x^2+4x>0$，得 $0<x<4$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,4)$，令 $g(x)=-x^2+4x$，$x\in(0,4)$，由函数 $g(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=2$，开口向下，得 $g(x)$ 在 $(0,2]$ 上单调递增，在 $[2,4)$ 上单调递减，又 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,2]$，又 $f(x)$ 在 $(a,a+1)$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ a+1\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a\leqslant 1$. 故选 D.

(2)因为存在 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，且 $x_1\neq x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$ 成立，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上不单调. $f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x}-m,x\geqslant m,\\ \frac{1}{x}-x+m,x<m.\end{cases}$ 若 $m\geqslant 0,x<0$，则 $f(x)=\frac{1}{x}-x+m$，因为函数 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=-x+m$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，不符合题意. 若 $m<0$，$x<0$，则 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x}-m,m\leqslant x<0,\\ \frac{1}{x}-x+m,x<m,\end{cases}$ 当 $x<m$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}-x+m$ 在 $(-\infty,m)$ 上单调递减，所以 $f(x)>f(m)$. 当 $m\geqslant -1,m\leqslant x<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[m,0)$ 上单调递减，则 $f(x)\leqslant f(m)$，不符合题意；当 $m<-1,m\leqslant x<0$ 时，因为对勾函数 $y=\frac{1}{x}+x$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $(m,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减，且对任意 $x\in(m,-1)$，都有 $f(x)>f(m)$. 因为存在 $x_1,x_2\in(-\infty,0),x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$ 成立，所以 $m<-1$，即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-1)$.

【应用演练】

1. C **【解析】**令 $t(x)=7+2ax-x^2$，由题意可得 $t(x)=7+2ax-x^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，且 $t(x)_{\min}\geqslant 0$，因为 $t(x)=7+2ax-x^2$ 的图象开口向下，对称轴方程为 $x=a$，所以 $a\leqslant -1$ 且 $t(1)=6+2a\geqslant 0$，解得 $-3\leqslant a\leqslant -1$，故选 C.

2. C **【解析】**方法一：∵函数 $y=\lg x,y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递增，∴函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，∵$0<p<m<n$，且 $f(m)=1$，∴$f(p)<f(m)=1<f(n)$. 故选 C.

方法二：由题得 $f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}-\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{x\ln 10}+\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln 2$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，∵$0<p<m<n$，且 $f(m)=1$，∴$f(p)<f(m)=1<f(n)$. 故选 C.

3. $2e$ **【解析】**由题得 $f'(x)=(-2x+2)e^x$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，故函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最大值为 $f(1)=2e$.

4. $\frac{4}{3}$ **【解析】**由“对勾函数”的性质可得 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，在 $[1,3]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=2$，$f(x)_{\max}=\max\left\{f\left(\frac{1}{2}\right),f(3)\right\}=\frac{10}{3}$，所以 $|f(x_1)-f(x_2)|_{\max}=f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=\frac{10}{3}-2=\frac{4}{3}$.

5. $(-\infty,-1]$ **【解析】**当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)=x^2-2ax+1$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，要使 $f(x)$ 存在最小值，需当 $x<a$ 时，$f(x)=ax-1$ 单调递减，即 $a<0$，且 $a^2-1\geqslant a^2-2a^2+1$，解得 $a\geqslant 1$ 或 $a\leqslant -1$，故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

第 8 讲　函数的奇偶性、对称性与周期性

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $f(-x)=f(x)$　$f(-x)=-f(x)$　原点　y 轴　原点
2. (1)$f(x+T)=f(x)$　(2)最小的正数　最小的正数

【对点演练】

1. ①③ **【解析】**根据偶函数的定义，可知①③是偶函数.
2. $(-2,0)\cup(2,5]$ **【解析】**由图象知，当 $0<x<2$ 时，$f(x)>0$；当 $2<x\leqslant 5$ 时，$f(x)<0$. 又 $f(x)$ 是奇函数，所以当 $-2<x<0$ 时，$f(x)<0$，当 $-5\leqslant x<-2$ 时，$f(x)>0$. 综上，$f(x)<0$ 的解集是 $(-2,0)\cup(2,5]$.
3. 8 **【解析】**因为 $f(x+3)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数，所以 $f(2024)=f(674\times 3+2)=f(2)=8$.
4. 非奇非偶 **【解析】**由 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $x=1$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{1\}$，因为函数 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称，所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.
5. $x=a$　$(b,0)$ **【解析】**因为 $y=f(x+a)$ 是偶函数，所以其图象关于 y 轴对称，将 $y=f(x+a)$ 的图象向左 $(a<0)$ 或向右 $(a>0)$ 平移 $|a|$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x)$ 的图象，则 $y=f(x+a)$ 图象的对称轴平移至直线 $x=a$ 处，即函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称. 同理，函数 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(b,0)$ 对称.
6. $\begin{cases}x^2+x,x>0,\\ 0,x=0,\\ -x^2+x,x<0\end{cases}$ **【解析】**当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(x)=-f(-x)=-(-x)[(-x)+1]=-x^2+x(x<0)$. 由奇函数的定义可知 $f(0)=0$，所以 $f(x)=\begin{cases}x^2+x,x>0,\\ 0,x=0,\\ -x^2+x,x<0.\end{cases}$

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】**(1)首先确定各函数的定义域，判断定义域是否关于原点对称，若对称，再根据奇、偶函数的定义判断函数的奇偶性，若不对称，则函数为非奇非偶函数. (2)根据 $f(x+y)=xf(y)+yf(x)$，对 x,y 取特殊值，根据奇函数与偶函数的定义可判断 $f(x)$ 的奇偶性；由 $g(x+1)=(x+1)[(x+1)^2-1]$，可得 $g(x)=x^3-x$，根据奇、偶函数的定义可判断 $g(x)$ 的奇偶性.

(1)B (2)BC **【解析】**(1)对于 A，由 $x+1\neq 0$，得 $x\neq -1$，则 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq -1\}$，定义域不关于原点对称，故 $f(x)=\frac{x^2+x}{x+1}$ 为非奇非偶函数，A 不符合题意；对于 B，$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数，B 符合题意；对于 C，因为 $\sqrt{x^2+1}-x>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)=\log_2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，C 不符合题意；对于 D，令 $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ |x+2|-2\neq 0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 1$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$，关于原点对称，$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$，又 $f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，D 不符合题意. 故选 B.

(2)在 $f(x+y)=xf(y)+yf(x)$ 中，令 $x=y=0$，得 $f(0)=0$，令 $y=0$，得 $f(x)=xf(0)=0$，则 $f(-x)=f(x)=-f(x)=0$，所以 $f(x)$ 既是奇函数也是偶函数，故 A 错误，B 正确. 由 $g(x+1)=(x+1)(x^2+2x)=(x+1)[(x+1)^2-1]$，得 $g(x)=x^3-x$，因为 $g(-x)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 是奇函数，故 C 正确，D 错误. 故选 BC.

例 2 **【思路点拨】**(1)由奇函数的定义得 $h(x)=\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为奇

函数，结合 $f(x)$ 为偶函数，得 $g(x)=x+a$ 为奇函数，进而得 a 的值，或用特值法求解. (2)根据 $f(0)=0$ 求得 $m=-1$，再结合奇函数的定义求得当 $x<0$ 时 $f(x)$ 的解析式. (3)构造函数 $g(x)=f(x)-7$，由奇函数的定义得 $g(x)$ 为奇函数，利用奇函数图象的对称性得 $g(x)_{max}+g(x)_{min}=0$，即可求解.

(1)B　(2)$-2^{-x}-2x+1$　(3)14　**【解析】** (1)方法一：由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. 令 $h(x)=\ln\frac{2x-1}{2x+1}$，则 $h(-x)=\ln\frac{-2x-1}{-2x+1}=\ln\frac{2x+1}{2x-1}=-h(x)$，所以 $h(x)$ 为奇函数. 令 $g(x)=x+a$，由 $f(x)$ 为偶函数，$h(x)$ 为奇函数，可得 $g(x)$ 为奇函数，所以 $a=0$，故选 B.

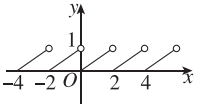
方法二：由题知函数 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(1)=f(-1)$，故 $(1+a)\ln\frac{1}{3}=(-1+a)\ln 3$，解得 $a=0$，故选 B.

(2)∵$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，∴$f(0)=1+m=0$，解得 $m=-1$，故当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2^x-2x-1$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，故 $f(x)=-f(-x)=-[2^{-x}-2(-x)-1]=-2^{-x}-2x+1$.

(3)令 $g(x)=f(x)-7=ax^3+3\sin x$，且 $x\in\mathbf{R}$，则 $g(-x)=a(-x)^3+3\sin(-x)=-ax^3-3\sin x=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数且在 $[-2024,2024]$ 上连续，根据奇函数图象的对称性得 $g(x)$ 在 $[-2024,2024]$ 上的最大值、最小值关于原点对称，则 $g(x)_{max}+g(x)_{min}=M-7+m-7=0$，故 $M+m=14$.

例 3　【思路点拨】 对于 A，利用奇函数的性质和函数图象平移规律判断；对于 B，举例判断；对于 C，利用偶函数的定义和函数图象的对称性分析判断；对于 D，根据两函数的解析式特点分析判断.

AC　**【解析】** 对于 A，∵$f(x)$ 是奇函数，∴$f(x)$ 的图象关于原点对称，而 $f(x-1)$ 的图象是将 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到的，∴$f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，故 A 正确. 对于 B，由 $f(x+1)=f(x-1)$，得 $f(x)=f(x+2)$，其图象不一定关于直线 $x=1$ 对称，若 $f(x)$ 的图象如图所示，该函数解析式满足 $f(x)=f(x+2)$，但函数图象不关于直线 $x=1$ 对称，故 B 不正确. 对于 C，$g(x)=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则有 $g(x+1)=g(-x+1)$，即 $f(x)=f(-x)$，即 $f(x)$ 为偶函数，故 C 正确. 对于 D，函数 $y=f(x+1)$ 的图象与函数 $y=f(1-x)$ 的图象关于 y 轴对称，故 D 不正确. 故选 AC.



【应用演练】

1. D　**【解析】** 因为函数 $f(x)=(x+a-2)(x^2+a-1)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，即 $(a-2)(a-1)=0$，解得 $a=2$ 或 $a=1$. 显然函数 $f(x)=(x+a-2)(x^2+a-1)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称. 当 $a=2$ 时，$f(x)=x(x^2+1)$，则 $f(-x)=-x(x^2+1)=-f(x)$；当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2(x-1)$，则 $f(-1)=-2\neq -f(1)=0$，不符合题意. 所以 $a=2$，即 $f(x)=x(x^2+1)$，所以 $f(a)=f(2)=2\times(2^2+1)=10$. 故选 D.

2. B　**【解析】** 令 $x_1=x_2=1$，则 $f(1)=f(1\times 1)=2f(1)$，所以 $f(1)=0$. 令 $x_1=x_2=-1$，则 $f(1)=f[(-1)\times(-1)]=2f(-1)=0$，所以 $f(-1)=0$. 令 $x_1=-1$，$x_2=x$，则 $f(-x)=f(-1)+f(x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数. 由题意可知，函数 $f(x)=\log_2|x|$ 满足定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且对任意非零实数 x_1,x_2，都有 $f(x_1)+f(x_2)=\log_2|x_1|+\log_2|x_2|=\log_2|x_1x_2|=f(x_1x_2)$，符合题意，但 $f(x)=\log_2|x|$ 不是奇函数. 故选 B.

3. B　**【解析】** 因为函数 $y=f(x+1)$ 为偶函数，所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，因为函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，函数 $y=f(x+2)-1$ 为奇函数，所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(2,1)$ 对称，且 $f(2)=1$，所以 $f(0)=f(2)=1$，故选 B.

4. A　**【解析】** 方法一：由已知可得 $g(x)=f(x-1)+1=\frac{a-x+1}{a+x-1}+1=\frac{2a}{x+a-1}$，则 $g(-x)=\frac{2a}{-x+a-1}$. 因为 $g(x)$ 是奇函数，所以 $g(x)+g(-x)=\frac{2a}{x+a-1}+\frac{2a}{-x+a-1}=0$，即 $2a(2a-2)=0$，又 $a\neq 0$，所以 $a=1$，所以 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，所以 $f(2024)=-\frac{2023}{2025}$. 故选 A.

方法二：由已知可得 $g(x)=f(x-1)+1=\frac{a-x+1}{a+x-1}+1=\frac{2a}{x+a-1}$，因为 $g(x)$ 是奇函数，所以 $g(1)=-g(-1)$，即 $\frac{2a}{1+a-1}=-\frac{2a}{-1+a-1}$，解得 $a=1$，经验证符合题意，所以 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，所以 $f(2024)=-\frac{2023}{2025}$. 故选 A.

例 4　【思路点拨】 (1)由 $f(x+2)=-f(x)$ 求出函数 $f(x)$ 的周期，利用周期将 23 转化到区间 $[0,1]$ 内，代入解析式求解即可. (2)先令 $b=0$，得到 $f(0)=2$，再令 $b=1$，得到 $f(a+2)=-f(a)$，根据函数的周期性得到函数 $y=f(x)$ 是周期为 4 的函数，即可求解.

(1)D　(2)D　**【解析】** (1)因为 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，所以 $f(23)=f(4\times 5+3)=f(3)$. 又因为 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(3)=-f(1)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=e^x$，所以 $f(1)=e$，所以 $f(3)=-f(1)=-e$，即 $f(23)=-e$. 故选 D.

(2)由题意令 $b=0$，得 $2f(a)=f(a)f(0)$，又 $y=f(x)$ 不是常函数，所以 $f(0)=2$，再令 $b=1$，得 $f(a+1)+f(a-1)=f(a)f(1)$，即 $f(a+1)+f(a-1)=0$，则 $f(a+2)=-f(a)$，即 $-f(a)=f(a-2)$，故 $f(a)=f(a+4)$，所以函数 $y=f(x)$ 是周期为 4 的函数，所以 $f(-2026)=f(-2-4\times 506)=f(-2)=f(2)=-f(0)=-2$，故选 D.

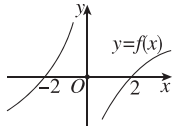
变式题　(1)C　(2)C　**【解析】** (1)由 $f(x+2)=\frac{3}{f(x)}$，可得 $f(x+4)=\frac{3}{f(x+2)}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，则 $f(100)=f(0)=\frac{3}{f(2)}=-3$. 故选 C.

(2)当 $x\in[-2,-1]$ 时，$x+4\in[2,3]$，$f(x)=f(x+4)=x+4=3+(x+1)$，当 $x\in[-1,0]$ 时，$-x\in[0,1]$，$2-x\in[2,3]$，因为函数 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=f(-x)=f(2-x)=2-x=3-(x+1)$，综上所述，当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=3-|x+1|$. 故选 C.

例 5　【思路点拨】 (1)先研究函数 $f(x)=e^{|x|}+\log_2|x|$ 的性质，利用奇偶性对函数值进行等价变形，最后利用单调性进行比较大小. (2)根据函数的单调性和奇偶性画出大致图象，化简不等式求解即可.

(1)A　(2)$(-2,0)\cup(0,2)$　**【解析】** (1)已知 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，且 $f(-x)=e^{|-x|}+\log_2|-x|=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，函数 $f(x)=e^x+\log_2 x$ 单调递增，$a=f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)=f(-\log_2 3)=f(\log_2 3)$，$c=f(\log_{\frac{1}{4}}25)=f(-\log_4 25)=f(\log_4 25)=f(\log_2 5)$，$0<7^{-0.1}<7^0=1$，所以 $\log_2 5>\log_2 3>1>7^{-0.1}>0$，所以 $f(\log_2 5)>f(\log_2 3)>f(7^{-0.1})$，所以 $c>a>b$. 故选 A.

(2)因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)$，则 $\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=\frac{f(x)}{x}<0$，即 x 和 $f(x)$ 异号，故 $\begin{cases}x>0,\\f(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\f(x)>0.\end{cases}$ 由 $f(-2)=0$，可得 $f(2)=0$，因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递增，画出函数 $f(x)$ 的大致图象如图. 由图可得原不等式的解集为 $(-2,0)\cup(0,2)$.



例 6　【思路点拨】 (1)根据题目条件得到函数 $f(x)$ 是周期为 8 的函数，从而得到 $f(2024)=f(0)$，即可得解. (2)根据对称性和已知条件得到 $g(x)$ 是周期为 4 的函数，$f(x)=g(x)-7$，然后根据条件得到 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ 的值，即可求解.

(1)B　(2)D　**【解析】** (1)因为 $f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，又 $f(x)+f(4-x)=0$，所以 $f(x)=-f(4-x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，所以函数 $f(x)$ 是周期为 8 的函数，故 $f(2024)=f(8\times 253)=f(0)$，又当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=3x-4$，所以 $f(0)=3\times 0-4=-4$，故 $f(2024)=f(0)=-4$. 故选 B.

(2)由 $f(x)+g(2-x)=5$ 得 $f(x)=5-g(2-x)$①. 由 $g(x)-f(x-4)=7$ 得 $f(x-4)=g(x)-7$，所以 $f(x)=g(x+4)-7$②. 由①②得 $5-g(2-x)=g(x+4)-7$，即 $g(x+4)+g(2-x)=12$，所以 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(3,6)$

对称，$g(3)=6$，又 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以函数 $g(x)$ 是周期为 4 的函数，且 $g(1)=g(3)=6$，$f(x)=g(x)-7$. 因为 $g(4)+g(2)=12$，所以 $g(4)=12-g(2)=12-4=8$，所以 $f(1)=g(1)-7=-1$，$f(2)=g(2)-7=-3$，$f(3)=g(3)-7=-1$，$f(4)=g(4)-7=1$，所以 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(22)=5\times(-4)+(-1)+(-3)=-24$. 故选 D.

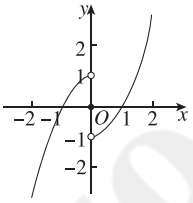
例 7 **[思路点拨]** (1)利用函数的奇偶性、周期性可得选项 A，C 正确，另外举例说明选项 B，D 错误即可. (2)先求出函数 $f(x)$ 的周期，然后根据条件得到 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$ 的值即可得解.

(1)AC (2)-1 **[解析]** (1)因为 $f(2x-1)$ 是周期为 2 的奇函数，所以 $f[2(x+2)-1]=f(2x-1)$，即 $f(2x+3)=f(2x-1)$，所以 $f(x)$ 的周期为 4，又因为 $f(2x-1)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-1)=0$，且 $f(2x-1)+f(-2x-1)=0$，所以 $f(2x+3)+f(-2x-1)=0$，令 $x=-1$，得 $f(1)=0$，因为 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，且 $f(-1)=0$，所以 $f(3)=0$，所以 A，C 正确；根据题意，可设 $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$，此时 $f(2)=\cos\pi=-1$，$f(4)=\cos 2\pi=1$，所以 B，D 错误. 故选 AC.

(2)因为函数 $f(x+1)$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，即 $f(2-x)=-f(x)$，又函数 $f(x+2)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，即 $f(4-x)=f(x)$，所以 $f(4-x)=-f(2-x)$，即 $f(2+x)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数. 由题得 $f(2)=1$，$f(3)=0$，则 $f(1)=f(3)=0$，$f(0)=-f(2)=-1$，则 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=0$，所以 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2025)=[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)]+\cdots+[f(2020)+f(2021)+f(2022)+f(2023)]+f(2024)+f(2025)=-1$.

【应用演练】

1. B **[解析]** 由奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(1)=0$，得 $f(x)$ 的大致图象如图所示，$f(x)-f(-x)=2f(x)<0$，即 $f(x)<0$，由图知不等式的解集为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$. 故选 B.



2. A **[解析]** $\because f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+\frac{1}{2}\sin\pi x$，$\therefore f(2-x)=e^{1-x}-e^{x-1}+\frac{1}{2}\sin(2\pi-\pi x)=e^{1-x}-e^{x-1}-\frac{1}{2}\sin\pi x=-f(x)$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，$f'(x)=e^{x-1}+e^{1-x}+\frac{1}{2}\pi\cos\pi x\geqslant 2\sqrt{e^{x-1}\cdot e^{1-x}}+\frac{1}{2}\pi\cos\pi x=2+\frac{1}{2}\pi\cos\pi x$，$\because -\frac{1}{2}\pi\leqslant\frac{1}{2}\pi\cos\pi x\leqslant\frac{1}{2}\pi$，$\therefore 2-\frac{1}{2}\pi\leqslant 2+\frac{1}{2}\pi\cos\pi x\leqslant 2+\frac{1}{2}\pi$，$\therefore f'(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 是增函数. $\because f(3a+b)+f(1-a)>0$，$\therefore f(3a+b)>-f(1-a)=f[2-(1-a)]=f(1+a)$，$\therefore 3a+b>1+a$，得 $2a+b>1$，故选 A.

3. A **[解析]** 在 $f(x)+f(4-x)=2$ 中，令 $x=2$，得 $f(2)=1$. 令 $x=1$，得 $f(1)+f(3)=2$，$\because f(1)=2$，$\therefore f(3)=0$. $\because f(2x+1)$ 为偶函数，$\therefore f(2x+1)=f(-2x+1)$，即 $f(1+x)=f(1-x)$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 又 $\because f(x)+f(4-x)=2$，$\therefore f(x)$ 的图象关于点 $(2,1)$ 对称，$f(x)=2-f(4-x)=2-f[1-(x-3)]=2-f[1+(x-3)]=2-f(x-2)$，可得 $f(x+2)=2-f(x)$，则 $f(x)=2-f(x+2)$，$f(x+4)=f[2+(x+2)]=2-f(x+2)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的函数，$\therefore f(4)=f(0)=2-f(2)=1$，$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=4$，$\therefore\sum_{n=1}^{22}f(n)=5\times 4+f(1)+f(2)=23$. 故选 A.

4. C **[解析]** 因为 $f(1-x)=-f(1+x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，故 D 不正确；因为函数 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，由 $f(1-x)=-f(1+x)$，得 $f(x+2)=-f(-x)=-f(x)$，则 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，故 B 不正确；因为函数 $f(x)$ 是周期为 4 的偶函数，所以 $f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$，故 A 不正确；在 $f(1-x)=-f(1+x)$ 中，令 $x=0$，得 $f(1)=0$，所以 $f(2023)=f(3)=f(-1)=f(1)=0$，故 C 正确. 故选 C.

5. $\cos 2\pi x$(答案不唯一) **[解析]** 函数 $f(x)=\cos 2\pi x$ 的最小正周期为 1，且为偶函数，符合题意.

思维拓展(一) 逻辑推理之抽象函数的性质

【针对训练】

1. A **[解析]** 当 $x\neq-1$ 且 $x\neq 0$ 时，由 $xf(x+1)=(x+1)f(x)$，得 $\frac{f(x+1)}{x+1}=\frac{f(x)}{x}$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g(x)$ 是周期为 1 的函数，所以 $g\left(\frac{2025}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$，当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，由 $xf(x+1)=(x+1)f(x)$，得 $-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f\left(-\frac{1}{2}\right)$，又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，所以 $g\left(\frac{2025}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，所以 $f\left(\frac{2025}{2}\right)=\frac{2025}{2}g\left(\frac{2025}{2}\right)=0$. 故选 A.

2. AD **[解析]** 令 $x=y=1$，得 $f(1)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=0$，故 A 正确；由题意可知 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，不关于原点对称，故 $f(x)$ 是非奇非偶函数，故 B 错误；当 $x>1$ 时，$xy>y$，因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$，所以 $f(xy)-f(y)=f(x)>0$，则 $f(xy)>f(y)$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 C 错误；令 $x=y=2$，得 $f(4)=2f(2)$，因为 $f(4)=12$，所以 $f(2)=6$，因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$，所以 $f(xy)-f(y)=f(x)$，所以 $f(x+3)-f\left(\frac{2}{x}\right)=f\left(\frac{x^2+3x}{2}\right)$，所以 $f(x+3)-f\left(\frac{2}{x}\right)<6$ 等价于 $f\left(\frac{x^2+3x}{2}\right)<f(2)$，因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}x+3>0,\\ \frac{2}{x}>0,\\ \frac{x^2+3x}{2}<2,\end{cases}$ 解得 $0<x<1$，故 D 正确. 故选 AD.

3. ABD **[解析]** 令 $x=0$，$y=\frac{1}{2}$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0)f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，而 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，$\therefore f(0)=-1$. 令 $x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，则 $f(0)+f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，A 正确；令 $y=-\frac{1}{2}$，则有 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(x)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，即 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$，则 $f\left(x+1-\frac{1}{2}\right)=-2(x+1)=-2x-2$，即 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2x-2$，故函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 是奇函数，函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是减函数，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$，故 B 正确，C 错误，D 正确. 故选 ABD.

4. 2 **[解析]** 由 $f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，得 $f(x+2)=f[(x+1)+1]=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$，则 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$，即 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，所以 $f(15)=f(4\times 3+3)=f(3)=2$.

第 9 讲 二次函数与幂函数

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$ $\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$ $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ $b=0$

2. (2)$\{x|x\geqslant 0\}$ $\{x|x\neq 0\}$ $\{y|y\geqslant 0\}$ $\{y|y\geqslant 0\}$ $\{y|y\neq 0\}$ 奇 偶 奇 非奇非偶 奇 $(-\infty,0]$ $[0,+\infty)$ $[0,+\infty)$ $(-\infty,0)$ $(0,+\infty)$ $(1,1)$

【对点演练】

1. $x^{\frac{1}{2}}$ **【解析】** 设 $f(x)=x^{\alpha}$，则$\sqrt{2}=2^{\alpha}$，解得 $\alpha=\frac{1}{2}$，故函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

2. -1 **【解析】** 由 $f(x)=x^{\alpha}$ 为奇函数，知 α 取 $-1,1,3$. 又 $f(x)=x^{\alpha}$ 在$(0,+\infty)$上单调递减，$\therefore\alpha<0$，$\therefore\alpha=-1$.

3. 6 **【解析】** $\because$函数 $y=x^2+(a+2)x+3$，$x\in[a,b]$的图象关于直线 $x=1$ 对称，$\therefore-\frac{a+2}{2}=1$ 且$\frac{a+b}{2}=1$，$\therefore a=-4$，$b=6$.

4. ③ **【解析】** 由题意可知，函数图象的开口向下，对称轴方程为 $x=-\frac{b}{2a}$，且$-\frac{b}{2a}>0$，函数图象过原点，故填③.

5. $[0,1]$ **【解析】** 因为函数 $f(x)=ax^2-(3a-1)x-a^2$ 在$[1,+\infty)$上单调递增，所以当 $a=0$ 时，$f(x)=x$ 满足题意；当 $a\neq 0$ 时，$\begin{cases}a>0,\\ \frac{3a-1}{2a}\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$. 综上，a 的取值范围是$[0,1]$.

6. $(3,5)$ **【解析】** 幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 在定义域$(0,+\infty)$上单调递减，由 $f(a+1)<f(10-2a)$，得 $\begin{cases}a+1>0,\\ 10-2a>0,\\ a+1>10-2a,\end{cases}$ 解得 $3<a<5$.

● **课堂考点探究**

例 1 **【思路点拨】** (1)作出直线 $x=2$，与四个函数的图象各有一个交点，从下到上交点的纵坐标依次增大，得到 $2^a<2^d<2^c<2^b$，进而得到 a,b,c,d 的大小关系. (2)先利用幂函数的定义以及单调性求出 m 的值，再求解不等式.

(1)B (2)D **【解析】** (1)作出直线 $x=2$，可知当 $x=2$ 时，$2^a<2^d<2^c<2^b$，则 $a<d<c<b$，故选 B.

(2)因为 $f(x)=(m^2-6m+9)x^{m^2-3m-2}$ 是幂函数，所以 $m^2-6m+9=1$，解得 $m=2$ 或 $m=4$. 当 $m=2$ 时，$f(x)=x^{-4}$，在$(0,+\infty)$上单调递减，不满足题意；当 $m=4$ 时，$f(x)=x^2$，在$(0,+\infty)$上单调递增，满足题意，所以 $f(x)=x^2$，且 $f(x)$是偶函数. 因为 $f(2x-1)\geqslant 1=f(1)$，所以$|2x-1|\geqslant 1$，解得 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$. 故选 D.

变式题 (1)B (2)$\frac{1}{x}$(答案不唯一) **【解析】** (1)因为函数 $f(x)$ 对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，满足 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减. 由 $f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2+m-3}$ 是幂函数，可得 $m^2-m-1=1$，解得 $m=2$ 或 $m=-1$. 当 $m=2$ 时，$f(x)=x^3$，在$(0,+\infty)$上单调递增，不满足题意. 当 $m=-1$ 时，$f(x)=x^{-3}$，在$(0,+\infty)$上单调递减，满足题意，故 $f(x)=x^{-3}$，且 $f(x)$为奇函数. 因为 $a<0<b$，$|a|<|b|$，所以 $0<-a<b$，所以 $f(-a)>f(b)$，所以$-f(a)>f(b)$，所以 $f(a)+f(b)<0$. 故选 B.

(2)根据函数的图象与 x 轴、y 轴没有交点，且为奇函数，可令 $f(x)=\frac{1}{x}$(答案不唯一)，符合题意.

例 2 **【思路点拨】** (1)根据条件设二次函数 $f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k(a\neq 0)$，代入条件求解即可. (2)由条件①得出 $f(x)$的图象的对称轴，再由条件②得出 $f(x)=0$ 的一个根，进而求出函数 $f(x)$的解析式.

(1)A (2)$f(x)=2x^2-x-1$ **【解析】** (1)由 $f(1-x)=f(x)$，得 $f(x)$图象的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$，所以设二次函数 $f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k(a\neq 0)$，因为 $f(x)$的最大值是 8，所以 $a<0$，当 $x=\frac{1}{2}$时，$f\left(\frac{1}{2}\right)=k=8$，所以二次函数 $f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8(a\neq 0)$. 由 $f(2)=-1$ 得 $f(2)=a\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+8=-1$，解得 $a=-4$，则二次函数 $f(x)=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8=-4x^2+4x+7$，故选 A.

(2)由条件①可得函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{1}{4}$对称，$\therefore-\frac{-1}{2a}=\frac{1}{4}$，解得 $a=2$. 由条件②可知，$x=1$ 是方程 $2x^2-x+c=0$ 的一个根，则有 $2-1+c=0$，解得 $c=-1$. $\therefore f(x)=2x^2-x-1$.

变式题 (1)x^2-2(答案不唯一) (2)$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$ 7

【解析】 (1)根据函数的自变量 $x\in[-2,2]$时，函数 $f(x)$的取值范围为$[-2,2]$，可考虑二次函数 $f(x)=x^2-2$，根据二次函数的性质可知当 $x\in[-2,2]$时，$f(x)_{\min}=f(0)=-2$，$f(x)_{\max}=f(2)=f(-2)=4-2=2$，令 $f(x)=0$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$，即在$[-2,2]$上 $f(x)$有两个零点. 故 $f(x)=x^2-2$(答案不唯一，如 $2|x|-2$ 亦可).

(2)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$. 由 $f(x-2)=f(-x-2)$，得 $f(x)$的图象关于直线 $x=-2$ 对称，则$-\frac{b}{2a}=-2$，即 $4a-b=0$①. 设 $f(x)$的图象与 x 轴交点的横坐标为 x_1,x_2，则由题意得 $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=2\sqrt{2}$，得 $b^2-4ac=8a^2$②. 由已知得 $c=1$③. 由①②③解得 $b=2$，$a=\frac{1}{2}$，$c=1$，$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$，$\therefore f(2)=\frac{1}{2}\times 2^2+2\times 2+1=2+4+1=7$.

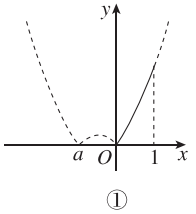
例 3 **【思路点拨】** (1)分类讨论，结合一次函数、二次函数的图象与性质计算即可. (2)根据复合函数的单调性判断出 $y=ax^2-x$ 在$(1,2)$上单调递增，结合二次函数的图象与性质求出 a 的取值范围.

(1)A (2)D **【解析】** (1)以下只分析函数 $f(x)=|x^2-ax|$在$[0,1]$上的图象及性质，分类讨论如下.

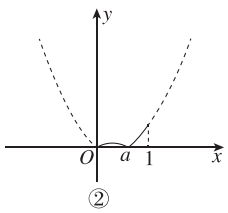
(i)当 $a\leqslant 0$ 时，画出 $f(x)$的大致图象，如图①，可知函数 $f(x)=|x^2-ax|$在区间$[0,1]$上单调递增，所以 $g(a)=f(1)=1-a$，此时 $g(a)$单调递减，所以 $g(a)_{\min}=g(0)=1$.

(ii)当 $0<a<1$ 时，$f(x)=|x^2-ax|=\begin{cases}x^2-ax,a<x\leqslant 1,\\ ax-x^2,0\leqslant x<a,\end{cases}$ 画出 $f(x)$的大致图象，如图②，所以 $g(a)=\max\left\{f(1),f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}=\max\left\{1-a,\frac{a^2}{4}\right\}$，易知当 $0<a\leqslant 2\sqrt{2}-2$ 时，$1-a\geqslant\frac{a^2}{4}$，所以 $g(a)=1-a$，当 $2\sqrt{2}-2<a\leqslant 1$ 时，$1-a<\frac{a^2}{4}$，所以 $g(a)=\frac{a^2}{4}$，所以当 $0<a<1$ 时，$g(a)_{\min}=g(2\sqrt{2}-2)=1-(2\sqrt{2}-2)=3-2\sqrt{2}$.

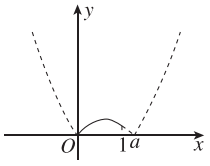
(iii)当 $a\geqslant 1$ 时，画出 $f(x)$的大致图象，如图③④，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=|x^2-ax|=ax-x^2$，易知当 $1\leqslant a<2$ 时，$\frac{1}{2}\leqslant\frac{a}{2}<1$，则 $f(x)$在$\left[0,\frac{a}{2}\right]$上单调递增，在$\left[\frac{a}{2},1\right]$上单调递减，所以 $g(a)=f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$，当 $a\geqslant 2$ 时，$\frac{a}{2}\geqslant 1$，则 $f(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以 $g(a)=f(1)=a-1$. 所以当 $a\geqslant 1$ 时，$g(a)_{\min}=g(1)=\frac{1}{4}$. 因为 $1>\frac{1}{4}>3-2\sqrt{2}$，所以综上可知，$g(a)$的最小值为 $3-2\sqrt{2}$. 故选 A.



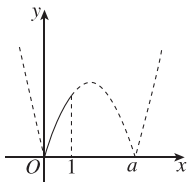
①



②



③



④

(2)因为函数 $y=\log_2(ax^2-x)$ 在区间(1,2)上单调递增，$y=\log_2 x$ 为增函数，所以函数 $y=\log_2(ax^2-x)$ 在区间(1,2)上有意义，且 $y=ax^2-x$ 在(1,2)上单调递增，所以 $a\neq 0$，则 $\begin{cases}a>0,\\ \dfrac{1}{2a}\leqslant 1,\\ a-1\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ \dfrac{1}{2a}\geqslant 2,\\ a-1\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 1$，所以 a 的取值范围为$[1,+\infty)$. 故选 D.

变式题 1 A **【解析】** 由题图可知，$a\in(0,1)$，因为 $y=ax^2+x=a\left(x+\dfrac{1}{2a}\right)^2-\dfrac{1}{4a}(a\neq 0)$，所以图象顶点的横坐标为 $x=-\dfrac{1}{2a}$，所以 $-\dfrac{1}{2a}\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$. 故选 A.

变式题 2 **解：**(1)根据题意得，函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的交点为(−2,0)和(1,0)，∴函数 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=-\dfrac{1}{2}$，又 $f(x)$ 在$[3m,m+1]$上不单调，∴$3m<-\dfrac{1}{2}<m+1$，解得 $-\dfrac{3}{2}<m<-\dfrac{1}{6}$，即实数 m 的取值范围为$\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{6}\right)$.

(2)∵函数 $g(x)=f(x)-2x$ 在 $x=2$ 处取得极值 0，

∴方程 $f(x)-2x=0$，即 $ax^2+(b-2)x+c=0$ 有两个相等的实数根 2，故 $\begin{cases}-\dfrac{b-2}{a}=2+2,\\ \dfrac{c}{a}=2\times 2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2-4a,\\ c=4a,\end{cases}$

此时 $\Delta=(b-2)^2-4ac=16a^2-16a^2=0$，

∴$f(x)=ax^2+(2-4a)x+4a$，且 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=\dfrac{4a-2}{2a}=2-\dfrac{1}{a}$，又∵$a\geqslant\dfrac{1}{2}$，∴$2-\dfrac{1}{a}\geqslant 2+(-2)=0$，

∴$f(x)_{\max}=f(-2)=16a-4$.

第 10 讲　指数运算与指数函数

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. n 次方根　奇数　偶数　根式　根指数　被开方数　a

2. (1)①$a^{\frac{m}{n}}$　④0　没有意义

3. (1)$y=a^x$　(2)$(0,+\infty)$　$(0,1)$　$y>1$　$0<y<1$　$0<y<1$　$y>1$　增函数　减函数

【对点演练】

1. $-6a$　**【解析】** $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\dfrac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)=4\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=-6a$.

2. $(-\infty,2)$　**【解析】** 根据指数函数的性质，得 $x-1<3-x$，解得 $x<2$，所以 x 的取值范围是$(-\infty,2)$.

3. $(1,3)$　**【解析】** 令 $x-1=0$，得 $x=1$，此时 $y=a^0+2=3$，所以函数 $y=a^{x-1}+2(a>0$ 且 $a\neq 1)$的图象恒过定点$(1,3)$.

4. ②　**【解析】** ①中函数的值域为$(-\infty,0)$；②中函数的值域为$(0,+\infty)$；③中函数的值域为$[0,+\infty)$；④中函数的值域为$[0,1)$.

5. $2\sqrt{2}$　**【解析】** $\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4}=1+\sqrt{2}+|1-\sqrt{2}|=2\sqrt{2}$.

6. 2　**【解析】** 由指数函数的定义可得 $\begin{cases}a^2-3=1,\\ a>0,\\ a\neq 1,\end{cases}$ 解得$a=2$.

7. 2 或$\dfrac{1}{2}$　**【解析】** 若 $a>1$，则 $f(x)_{\max}=f(1)=a=2$；若 $0<a<1$，则 $f(x)_{\max}=f(-1)=a^{-1}=2$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$. 故 a 的值为 2 或$\dfrac{1}{2}$.

● 课堂考点探究

探究点一

1. C　**【解析】** $\dfrac{\sqrt{2\times\sqrt[3]{2^2}}}{(2^{\frac{1}{3}})^2}=\dfrac{\sqrt{2\times 2^{\frac{2}{3}}}}{2^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{\sqrt{2^{\frac{5}{3}}}}{2^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{2^{\frac{5}{6}}}{2^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{6}}$. 故选 C.

2. 1　**【解析】** $\left(\dfrac{81}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}+\dfrac{8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{(-3)^2}}-2\times(\sqrt{6}-2)^{-1}+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^0+36^{\frac{1}{4}}=\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}+\dfrac{(2^3)^{\frac{2}{3}}}{3}-2\times\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}+1+(6^2)^{\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}-(\sqrt{6}+2)+1+\sqrt{6}=1$.

3. $10a$　**【解析】** $a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot(2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div\left(\dfrac{1}{5}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)=\left(1\times 2\div\dfrac{1}{5}\right)a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=10a^1b^0=10a$.

4. $\dfrac{1}{3}$　**【解析】** 由 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，两边平方，得 $x+x^{-1}=7$，两边再平方得 $x^2+x^{-2}=47$，∴$x^2+x^{-2}-2=45$. 又 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}})^3+(x^{-\frac{1}{2}})^3=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x-1+x^{-1})=3\times(7-1)=18$，∴$\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}{x^2+x^{-2}-2}=\dfrac{1}{3}$.

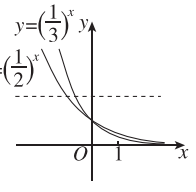
例 1 **【思路点拨】**(1)分 $x>0$ 和 $x<0$ 去掉绝对值，再根据指数函数的图象和性质对各选项逐项判断. (2)根据所给函数图象得到 a,b 的取值范围，进而结合指数函数的单调性判断.

(1)C　(2)D　**【解析】** (1)$f(x)=\dfrac{xa^x}{|x|}=\begin{cases}a^x,x>0,\\ -a^x,x<0,\end{cases}$ 又 $a>1$，所以根据指数函数的性质知，当 $x>0$ 时，函数 $f(x)=a^x$ 单调递增，排除 B,D；当 $x<0$ 时，函数 $f(x)=-a^x$ 单调递减，排除 A. 故选 C.

(2)由题中图象可得 $a>1$，$0<b<1$，所以 $a>b$，$2^{b-a}<1$，$2^{a-b}>1$，$a^b>1$，$0<b^a<1$，所以只有 D 中结论不正确. 故选 D.

变式题 (1)BD　(2)CD　**【解析】** (1)对于 $f(x)=|a^x-1|$，若 $a>1$，则当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$；若 $0<a<1$，则当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$. 对于 $g(x)=a-x$，a 表示图象与 y 轴交点的纵坐标. 对于 A，由 $f(x)=|a^x-1|$ 的图象知 $a>1$，由 $g(x)=a-x$ 的图象知 $0<a<1$，故 A 错误；对于 B，由 $f(x)=|a^x-1|$ 图象知 $a>1$，由 $g(x)=a-x$ 的图象知 $a>1$，故 B 正确；对于 C，由 $f(x)=|a^x-1|$ 的图象知 $0<a<1$，由 $g(x)=a-x$ 的图象知 $a>1$，故 C 错误；对于 D，由 $f(x)=|a^x-1|$ 的图象知 $0<a<1$，由 $g(x)=a-x$ 的图象知 $0<a<1$，故 D 正确. 故选 BD.

(2)作出函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 的大致图象，如图所示. 设 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a=\left(\dfrac{1}{3}\right)^b=m$，$m>0$，当 $m>1$ 时，由图可知 $a<b<0$；当 $m=1$ 时，由图可知 $a=b=0$；当 $0<m<1$ 时，由图可知 $a>b>0$，故选 CD.



例 2 **【思路点拨】**(1)利用指数函数和幂函数的单调性，可判断 a,b,c 的大小关系. (2)转化为同底利用指数函数的单调性比较，或依据幂函数的单调性比较. (3)首先把 $e^a+\pi^b\geqslant e^{-b}+\pi^{-a}$ 化为 $e^a-\pi^{-a}\geqslant e^{-b}-\pi^b$，然后构造函数 $f(x)=e^x-\pi^{-x}$，再利用函数 $f(x)=e^x-\pi^{-x}$ 的单调性得出结论.

(1)D　(2)B　(3)D　**【解析】** (1)因为函数 $y=1.01^x$ 在 **R** 上单调递增，且 $0.5<0.6$，所以 $1.01^{0.5}<1.01^{0.6}$，即 $a<b$. 因为 $y=x^{0.5}$ 在$[0,+\infty)$上单调递增，且 $0.6<1.01$，所以 $0.6^{0.5}<1.01^{0.5}$，即 $c<a$. 所以 $b>a>c$.

(2)$a=1.1^{1.2}<1.2^{1.2}<1.2^{1.3}=b$，又因为通过计算知 $1.2^4<1.3^3$，所以$(1.2^4)^{0.3}<(1.3^3)^{0.3}$，即 $1.2^{1.2}<1.3^{0.9}$，又 $1.2^{0.1}<1.3^{0.1}$，所以 $1.2^{1.3}<1.3^1<1.3^{1.1}=c$，所以 $a<b<c$. 故选 B.

(3)∵$e^a+\pi^b\geqslant e^{-b}+\pi^{-a}$，∴$e^a-\pi^{-a}\geqslant e^{-b}-\pi^b$(*). 令 $f(x)=e^x-\pi^{-x}$，易知 $f(x)$ 是 **R** 上的增函数，则(*)式可化为 $f(a)\geqslant f(-b)$，∴$a\geqslant -b$，即 $a+b\geqslant 0$. 故选 D.

1393****016

例 3 **[思路点拨]** (1)根据给定条件,转化为同底的指数不等式,再利用指数函数的单调性得到一元二次不等式,进而求解.(2)对 a 的取值进行分类讨论,脱掉"f"即可求解.

(1)$(-3,2)$ (2)$\frac{1}{2}$ **[解析]** (1)由 $2^{x^2-2x-3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$,得 $2^{x^2-2x-3}<2^{-3(x-1)}$,因为函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $x^2-2x-3<-3(x-1)$,即 $x^2+x-6<0$,解得 $-3<x<2$,所以原不等式的解集为$(-3,2)$.

(2)当 $a<1$ 时,$4^{1-a}=2^1$,解得 $a=\frac{1}{2}$;当 $a>1$ 时,$2^{a-(1-a)}=4^{a-1}$,此方程无解.故 a 的值为$\frac{1}{2}$.

例 4 **[思路点拨]** (1)根据函数的定义域判断 A,根据复合函数的单调性以及二次函数的单调性求单调区间和函数的最小值即可判断 B,C,根据函数图象的对称性判断 D.(2)利用奇函数的定义求出 a 的值,再由函数单调性求解不等式.

(1)ABD (2)D **[解析]** (1)易知函数 $f(x)=3^{x^2-2x+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,故选项 A 正确;$f(x)=3^{x^2-2x+3}$ 可看作由 $y=3^u$ 与 $u=x^2-2x+3$ 复合而成,而 $y=3^u$ 为增函数,所以函数 $f(x)=3^{x^2-2x+3}$ 的单调递减区间为 $u=x^2-2x+3$ 的单调递减区间$(-\infty,1]$,函数 $f(x)=3^{x^2-2x+3}$ 的单调递增区间为 $u=x^2-2x+3$ 的单调递增区间$[1,+\infty)$,故选项 B 正确;由选项 B 可知 $f(x)_{\min}=f(1)=3^{1-2+3}=9$,故选项 C 错误;因为 $f(2-x)=3^{(2-x)^2-2(2-x)+3}=3^{x^2-2x+3}=f(x)$,所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,故选项 D 正确.故选 ABD.

(2)由 $f(x)=e^{-x}-ae^x$ 为奇函数,得 $f(-x)+f(x)=(e^x+e^{-x})-a(e^{-x}+e^x)=0$,解得 $a=1$,于是 $f(x)=e^{-x}-e^x$,因为 $y=e^{-x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,$y=e^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,所以函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,不等式 $f(x)\leqslant\frac{1}{e}-e$,即为 $f(x)\leqslant f(1)$,可得 $x\geqslant1$,所以 $f(x)\leqslant\frac{1}{e}-e$ 的解集为$[1,+\infty)$.故选 D.

【应用演练】

1. D **[解析]** 由 $a=3^{\frac{2}{3}}=9^{\frac{1}{3}}$,$b=2^{\frac{3}{4}}=8^{\frac{1}{4}}$,$c=4^{\frac{1}{3}}$,可得 $b=8^{\frac{1}{4}}<8^{\frac{1}{3}}<9^{\frac{1}{3}}=a$,$c<a$.又 $b=2^{\frac{3}{4}}$,$c=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$,而 $2^{\frac{3}{4}}>2^{\frac{2}{3}}$,所以 $c<b$,所以 $c<b<a$.故选 D.
2. C **[解析]** 函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,因为 $f(-x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x=-f(x)$,所以函数 $f(x)$为奇函数,又因为函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$,$y=-3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上都是减函数,所以函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.故选 C.
3. $(-\infty,-1]\cup(0,3]$ **[解析]** 不等式 $2^{x-\frac{3}{x}-4}\leqslant\frac{1}{4}$ 可化为 $2^{x-\frac{3}{x}-4}\leqslant2^{-2}$,因为函数 $y=2^x$ 为增函数,所以 $x-\frac{3}{x}-4\leqslant-2$,整理得$\frac{x^2-2x-3}{x}\leqslant0$,此不等式等价于$\begin{cases}x^2-2x-3\geqslant0,\\x<0\end{cases}$或$\begin{cases}x^2-2x-3\leqslant0,\\x>0,\end{cases}$解得 $x\leqslant-1$ 或 $0<x\leqslant3$.所以原不等式的解集为$(-\infty,-1]\cup(0,3]$.
4. $[-5,31]$ **[解析]** 令 $t=2^x$,∵ $x\in[0,3]$,∴ $1\leqslant t\leqslant8$,∴ $f(x)$的解析式化为 $g(t)=t^2-4t-1=(t-2)^2-5$,$t\in[1,8]$,易知 $g(t)$在$[1,2)$上单调递减,在$(2,8]$上单调递增,又$|8-2|>|2-1|$,∴当 $t=2$ 时,函数 $g(t)$取得最小值,即 $g(t)_{\min}=-5$,当 $t=8$ 时,函数 $g(t)$取得最大值,即 $g(t)_{\max}=31$,∴ $f(x)$的值域为$[-5,31]$.

第 11 讲　对数运算与对数函数

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)$a^b=N$　对数　$\log_aN=b$　真数
   (2)10　$\lg N$　自然对数　$\ln N$
2. (1)0　(3)N
3. (1)$\log_aM+\log_aN$　$\log_aM-\log_aN$　$b\log_aM$　(2)$\frac{n}{m}\log_ab$
4. 对数　$(0,+\infty)$　$\mathbf{R}$　$(1,0)$　增　减
5. $y=\log_ax(a>0$ 且 $a\neq1)$　$y=x$

【对点演练】

1. 1 **[解析]** 利用对数的换底公式可得结果为 1.
2. $b>c>a$ **[解析]** $a=\log_20.3<\log_21=0$,$b=\ln3>\ln e=1$,$0=\log_31<\log_32<\log_33=1$,即 $0<c<1$,∴ $b>c>a$.
3. $(-1,1)$　偶　**[解析]** $f(x)+g(x)=\log_a(x+1)+\log_a(1-x)$,则$\begin{cases}x+1>0,\\1-x>0,\end{cases}$解得 $-1<x<1$,故函数 $y=f(x)+g(x)$的定义域为$(-1,1)$.设 $M(x)=f(x)+g(x)$,则 $M(x)=\log_a(x+1)+\log_a(1-x)$,所以 $M(-x)=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=M(x)$,所以 $M(x)=f(x)+g(x)$是偶函数.
4. 4 **[解析]** 因为 $\lg x+\lg y=2\lg(x-2y)$,所以 $xy=(x-2y)^2$,即 $x^2-5xy+4y^2=0$,解得 $x=y$ 或 $x=4y$.由已知得 $x>0$,$y>0$,$x-2y>0$,所以 $x=4y$,所以$\frac{x}{y}=4$.
5. $(-\infty,-1)$ **[解析]** 因为 $0<\frac{1}{2}<1$,所以函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在定义域内单调递减.由 $x^2-1>0$,得 $x<-1$ 或 $x>1$,因为函数 $y=x^2-1$ 在$(-\infty,-1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)$的单调递增区间是$(-\infty,-1)$.
6. 2 或$\frac{1}{2}$ **[解析]** 当 $a>1$ 时,有 $\log_a4-\log_a2=1$,解得 $a=2$;当 $0<a<1$ 时,有 $\log_a2-\log_a4=1$,解得$a=\frac{1}{2}$.综上,$a=2$ 或$\frac{1}{2}$.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)根据指对互化可得 $b=\log_36$,再利用换底公式、对数运算性质依次验证各选项即可.(2)利用对数运算性质及换底公式进行化简计算.

(1)BCD (2)9 **[解析]** (1)∵ $3^b=6$,∴ $b=\log_36$.对于 A,∵ $a=\log_26=\frac{\ln6}{\ln2}$,$b=\log_36=\frac{\ln6}{\ln3}$,又 $\ln6>\ln3>\ln2>0$,∴ $a>b$,A 错误;对于 B,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\log_26}+\frac{1}{\log_36}=\log_62+\log_63=\log_66=1$,B 正确;对于 C,∵ $a-1=\log_26-1=\log_23$,$b-1=\log_36-1=\log_32$,∴ $(a-1)(b-1)=\log_23\times\log_32=1$,C 正确;对于 D,$\log_{18}6=\frac{\log_36}{\log_318}=\frac{\log_36}{\log_33+\log_36}=\frac{b}{1+b}$,D 正确.故选 BCD.

(2)原式$=\lg2\times(2\lg5+2)+8\times\frac{1}{4}\times(\lg5)^2+2^{\log_23}+\frac{2\lg3}{\lg2}\times\frac{2\lg2}{\lg3}=2\lg2\times\lg5+2\lg2+2\times(\lg5)^2+3+4=2\lg5\times(\lg2+\lg5)+2\lg2+7=2\times(\lg5+\lg2)+7=2+7=9$.

变式题 (1)C (2)A (3)20 **[解析]** (1)由 $2^a=3^b=t$,知 $t>0$,且 $a=\log_2t$,$b=\log_3t$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{\log_2t}+\frac{2}{\log_3t}=\log_t2+2\log_t3=\log_t18=2$,所以 $t^2=18$,可得 $t=3\sqrt{2}$.故选 C.

(2)由题意,大约能用$\frac{2^{441}}{3\times10^{11}\times10^4}$万年,又 $\lg\frac{2^{441}}{3\times10^{15}}=441\lg2-\lg3-15\approx441\times0.301-0.477-15\approx117$,所以$\frac{2^{441}}{3\times10^{11}\times10^4}\approx10^{117}$,故选 A.

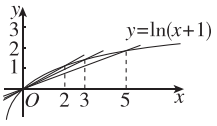
(3)因为 $b^{\lg a}=(10^{\lg b})^{\lg a}=10^{\lg a\cdot\lg b}=(10^{\lg a})^{\lg b}=a^{\lg b}=2$,所以 $(ab)^{\lg(ab)}=(ab)^{\lg a+\lg b}=(a^{\lg a}\cdot b^{\lg b})\cdot a^{\lg b}\cdot b^{\lg a}=5\times2\times2=20$.

例 2 **[思路点拨]** (1)首先由 $a^x=b^{-x}$ 得出 $a=\frac{1}{b}$,再分类讨论 a 和 b 的取值范围,根据指数函数和对数函数的图象即可得出答案.(2)构造 $k=\frac{\ln(x+1)-\ln1}{x-0}$,结合 $y=\ln(x+1)$的图象上的点与点$(0,\ln1)$连线的斜率大小判断各式的大小关系.

(1)AB (2)B **[解析]** (1)因为 $a^x=b^{-x}$,即 $a^x=\left(\frac{1}{b}\right)^x$,

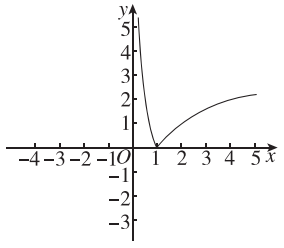
所以 $a=\frac{1}{b}$. 当 $a>1$ 时，$0<b<1$，则指数函数 $y=b^x$ 在 **R** 上单调递减，且图象过点 $(0,1)$，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增且图象过点 $(1,0)$，将 $y=\log_a x$ 的图象关于 y 轴对称得到 $y=\log_a(-x)$ 的图象，则 $y=\log_a(-x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减且图象过点 $(-1,0)$，故 A 符合题意；当 $0<a<1$ 时，$b>1$，同理可得，指数函数 $y=b^x$ 在 **R** 上单调递增，且图象过点 $(0,1)$，$y=\log_a(-x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增且图象过点 $(-1,0)$，故 B 符合题意. 故选 AB.

(2)构造 $k=\frac{\ln(x+1)-\ln 1}{x-0}$，其几何意义为 $y=\ln(x+1)$ 的图象上的点 $(x,\ln(x+1))$ 与点 $(0,\ln 1)$ 连线的斜率，作出函数 $y=\ln(x+1)$ 的图象，如图所示，并取点 $(2,\ln(2+1))$，$(3,\ln(3+1))$，$(5,\ln(5+1))$，再将三个点分别与点 $(0,\ln 1)$ 相连，得到三条直线. 由图可知倾斜角越大，斜率越大，可得 $\frac{\ln(5+1)-\ln 1}{5-0}<\frac{\ln(3+1)-\ln 1}{3-0}<\frac{\ln(2+1)-\ln 1}{2-0}$，即 $c<b<a$. 故选 B.



变式题 (1)D (2)$(3,+\infty)$ **【解析】** (1)由题图可得，函数在定义域上单调递增，所以 $a>1$，排除 A，C；又因为函数的图象过点 $(0.5,0)$，所以 $b+0.5=1$，解得 $b=0.5$，排除 B. 故选 D.

(2)函数 $f(x)=|\log_2 x|$ 的图象如图所示：



∵$0<b<a$，且 $f(a)=f(b)$，∴$0<b<1<a$，且 $\log_2 b=-\log_2 a$，即 $ab=1$，∴$2a+b=2a+\frac{1}{a}>3(a>1)$，故 $2a+b$ 的取值范围是 $(3,+\infty)$.

例 3 **【思路点拨】** (1)由 $c=\log_5 5^{\frac{2}{5}}<\log_5 2$ 可得 $c<a$，再通过中间值“1”比较 a 与 b 的大小，进而可求解. (2)分别取 $b=3$，$b=4$ 可判断 A，B，利用对数换底公式和基本不等式可判断 C，D.

(1)C (2)C **【解析】** (1)因为 $(5^{\frac{2}{5}})^5=25<32=2^5$，所以 $\log_5(5^{\frac{2}{5}})^5<\log_5 2^5$，所以 $\frac{2}{5}<\log_5 2$，即 $c<a$. 又 $\log_{0.5}0.4>\log_{0.5}0.5=1$，$\log_5 2<\log_5 5=1$，所以 $a<b$. 所以 $c<a<b$. 故选 C.

(2)若 $b=3$，则 $\log_2 a=1$，∴$a=2$，∴$2^{a+1}=2^b$，又 $2^c>0$，∴$2^{a+1}<2^b+2^c$，故 A 错误；若 $b=4$，则 $\log_2 4=\log_3 c$，∴$c=9$，∴$2^c>2^{b+1}$，又 $2^a>0$，∴$2^{b+1}<2^a+2^c$，故 B 错误；对于 C，由 $\log_2 a=\log_3 b$，得 $\frac{\log_5 a}{\log_5 2}=\frac{\log_5 b}{\log_5 3}$，即 $\log_5 a=\log_3 2\cdot\log_5 b$，同理由 $\log_2 b=\log_3 c$，得 $\log_5 c=\log_2 3\cdot\log_5 b$，∴$\log_5 a+\log_5 c>\log_5 a+\log_5 c=\log_5 b(\log_2 3+\log_3 2)>\log_5 b\cdot 2\sqrt{\log_2 3\cdot\log_3 2}=2\log_5 b$，故 C 正确；对于 D，同上得 $\log_4 a+\log_5 c>\log_5 a+\log_5 c>2\log_5 b$，故 D 错误. 故选 C.

例 4 **【思路点拨】** (1)利用对数的运算性质化简对数方程，得到 x 与 y 之间的关系，进而求值. (2)利用换底公式先消去 a，再平方去掉绝对值，进而解不等式.

(1)10 (2)$(0,1)$ **【解析】** (1)因为 $1+\lg x-\lg y=\lg y^2$，所以 $\lg 10+\lg x=\lg y^2+\lg y$，所以 $\lg(10x)=\lg y^3(x>0,y>0)$，则 $10x=y^3$，所以 $\frac{y^3}{x}=10$.

(2)易知 $-1<x<1$，且 $x\neq 0$，原不等式可化为 $\left|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|>\left|\frac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|$，即 $|\lg(1-x)|>|\lg(1+x)|$，两边同时平方得 $[\lg(1-x)]^2>[\lg(1+x)]^2$，即 $[\lg(1-x)+\lg(1+x)]\cdot[\lg(1-x)-\lg(1+x)]>0$，所以 $\lg(1-x^2)\cdot\lg\frac{1-x}{1+x}>0$. 又 $-1<x<1$，且 $x\neq 0$，所以 $0<1-x^2<1$，所以 $\lg(1-x^2)<0$，从而 $\lg\frac{1-x}{1+x}<0$，解得 $0<x<1$.

例 5 **【思路点拨】** (1)利用复合函数的单调性判断 $f(x)$ 的单调性，利用奇偶性的定义判断 $f(x)$ 的奇偶性，再根据指、对函数性质求最值. (2)根据复合函数的单调性以及对数函数、二次函数的性质即可求得 $a\geqslant -1$.

(1)BC (2)$[-1,+\infty)$ **【解析】** (1)由题设知 $f(x)=\ln\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)$，而 $t=e^x>0$ 在 **R** 上单调递增，$g(t)=t+\frac{1}{t}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\mu=e^x+\frac{1}{e^x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $y=\ln\mu$ 在定义域上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 错误；$f(-x)=\ln\left(e^{-x}+\frac{1}{e^{-x}}\right)=\ln\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)=f(x)$，即 $f(x)$ 为偶函数，故 B 正确；由 $\mu=e^x+\frac{1}{e^x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，可知 $f(x)_{\min}=f(0)=\ln 2$，无最大值，故 C 正确，D 错误. 故选 BC.

(2)利用复合函数的单调性可知，函数 $y=x^2+ax$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，所以可得对称轴 $x=-\frac{a}{2}$ 在区间 $(1,2)$ 的左侧，即 $-\frac{a}{2}\leqslant 1$，得 $a\geqslant -2$. 由对数函数的定义域可得 $1^2+a\geqslant 0$，即 $a\geqslant -1$，所以 $a\geqslant -1$，即 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

【应用演练】

1. A **【解析】** 因为函数 $y=3^x$ 为增函数，所以 $a=3^{\frac{1}{3}}>3^0=1$，即 $a>1$；因为 $y=\log_2 x$ 为增函数，所以 $b=\log_2\frac{1}{3}<\log_2 1=0$，即 $b<0$；因为 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 为减函数，所以 $\log_{\frac{1}{3}}1<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{e}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$，即 $0<c<1$. 故 $a>c>b$，故选 A.

2. D **【解析】** 因为 $c=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{8}=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}=\log_3 3\sqrt{3}<a=\log_3 6<\log_3 9=2=b$，所以 $b>a>c$. 故选 D.

3. C **【解析】** 因为函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-ax+8)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $y=3x^2-ax+8$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增且 $y=3x^2-ax+8>0$ 在 $[-1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $\begin{cases}\frac{a}{6}\leqslant -1,\\ 3+a+8>0,\end{cases}$ 解得 $-11<a\leqslant -6$. 故选 C.

4. B **【解析】** 由题知 $\frac{1+x}{1-x}>0$，即 $-1<x<1$，且 $f(-x)=\log_2\frac{1-x}{1+x}+\sin(-x)=\log_2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}-\sin x=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，又函数 $y=\log_2\frac{1+x}{1-x}=\log_2\left(\frac{2}{1-x}-1\right)$ 和 $y=\sin x$ 在 $(-1,1)$ 上都单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增，所以由 $f(x)+f(2x+1)<0$，可得 $f(x)<-f(2x+1)=f(-2x-1)$，则 $-1<x<-2x-1<1$，解得 $-1<x<-\frac{1}{3}$. 故选 B.

5. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ **【解析】** 当 $0<a<1$ 时，$a^2<\frac{1}{2}$，可得 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$；当 $a>1$ 时，$a^2>\frac{1}{2}$，可得 $a>1$. 综上所述，a 的取值范围为 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

增分微课 1　指、对、幂函数之比较大小

例 1 **【思路点拨】** (1)根据对数函数的性质，结合对数换底公式比较即可. (2)利用对数的性质及运算性质，结合对数函数的单调性即可比较出大小.

(1)A (2)C **【解析】** (1)$c=\log_4 8>\log_4 1.25=a$，$a=\log_4 1.25=\frac{\lg 1.25}{\lg 4}>\frac{\lg 1.25}{\lg 5}>\frac{\lg 1.2}{\lg 5}=\log_5 1.2=b$，所以 $c>$

$a>b$. 故选 A.

(2)由题可得 $c=e^{\ln\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$, $a=\log_4 7=\log_2\sqrt{7}<\log_2\sqrt{8}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}=c$, $b=\log_9 30=\log_3\sqrt{30}>\log_3\sqrt{27}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}=c$, 则 $a<c<b$, 故选 C.

例 2 **【思路点拨】**(1)利用指数函数和对数函数的性质比较大小即可. (2)经估算可知 a, b, c 均介于 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间, 所以可尝试将 a, b, c 分别与 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ 进行比较, 从而作出判断.

(1)A (2)C **【解析】**(1)因为 $y=3^x$ 在 **R** 上单调递增, 且 $0.2>0$, 所以 $a=3^{0.2}>3^0=1$; 因为 $y=0.2^x$ 在 **R** 上单调递减, 且 $3>0$, 所以 $0<b=0.2^3<0.2^0=1$; 因为 $y=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 且 $0.2<1$, 所以 $c=\log_3 0.2<\log_3 1=0$. 综上所述, $a>b>c$, 故选 A.

(2)$\because a-\frac{3}{4}=\log_5 3-\frac{3}{4}=\frac{4\log_5 3-3}{4}=\frac{\log_5 81-\log_5 125}{4}<0$, $\therefore a<\frac{3}{4}$, 又 $\because a-\frac{2}{3}=\log_5 3-\frac{2}{3}=\frac{3\log_5 3-2}{3}=\frac{\log_5 27-\log_5 25}{3}>0$, $\therefore a>\frac{2}{3}$, 则 $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{4}$. $\because b-\frac{3}{4}=\log_{13}8-\frac{3}{4}=\frac{4\log_{13}8-3}{4}=\frac{\log_{13}4096-\log_{13}2197}{4}>0$, $\therefore b>\frac{3}{4}$, 又 $\because b-1=\log_{13}8-1<0$, $\therefore b<1$, 则 $\frac{3}{4}<b<1$. $\because e>\frac{9}{4}$, $\therefore\sqrt{e}>\frac{3}{2}$, 则 $c<\frac{2}{3}$. 故 $c<a<b$. 故选 C.

例 3 **【思路点拨】**(1)思路一: 利用换底公式作差比较, 再结合基本不等式比较. 思路二: 结合换底公式和熟知的对数值估算得到结果. (2)利用作差比较法, 结合指数函数的单调性可得答案.

(1)A (2)A **【解析】**(1)方法一: $\log_7 5-\log_9 7=\frac{\lg 5}{\lg 7}-\frac{\lg 7}{\lg 9}=\frac{\lg 5\times\lg 9-(\lg 7)^2}{\lg 7\times\lg 9}$, 因为 $\lg 5\times\lg 9<\left(\frac{\lg 5+\lg 9}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 45}{2}\right)^2<\left(\frac{\lg 49}{2}\right)^2=(\lg 7)^2$, 所以 $\log_7 5-\log_9 7<0$, 即 $a<b$; $\log_9 7-\log_{11}9=\frac{\lg 7}{\lg 9}-\frac{\lg 9}{\lg 11}=\frac{\lg 7\times\lg 11-(\lg 9)^2}{\lg 11\times\lg 9}$, 因为 $\lg 7\times\lg 11<\left(\frac{\lg 7+\lg 11}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 77}{2}\right)^2<\left(\frac{\lg 81}{2}\right)^2=(\lg 9)^2$, 所以 $\log_9 7-\log_{11}9<0$, 即 $b<c$. 所以 $a<b<c$, 故选 A.

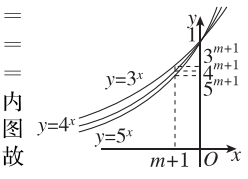
方法二(估算法):

$a=\log_7 5=\frac{\lg 5}{\lg 7}\approx\frac{0.7}{0.85}\approx 0.824$, $b=\log_9 7=\frac{\lg 7}{\lg 9}=\frac{\lg 7}{2\lg 3}\approx\frac{0.85}{2\times 0.48}\approx 0.885$, $c=\log_{11}9=\frac{2\lg 3}{\lg 11}\approx\frac{2\times 0.48}{1.04}\approx 0.923$, 故 $a<b<c$. 故选 A.

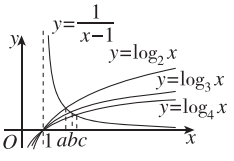
(2)因为 $a=xe^x+y$, $b=ye^y+x$, $c=ye^x+x$, 所以 $b-c=y(e^y-e^x)$, 又 $y>x>0$, $e>1$, 所以 $e^y>e^x$, 所以 $b>c$. 因为 $c-a=(x-y)+(y-x)e^x=(x-y)(1-e^x)$, 又 $y>x>0$, $e^x>1$, 所以 $c-a>0$, 得 $c>a$. 综上, $a<c<b$. 故选 A.

例 4 **【思路点拨】**(1)设 $\log_3 x=\log_4 y=\log_5 z=m<-1$, 得到 $x=3^m$, $y=4^m$, $z=5^m$, 画出图象, 数形结合得到答案. (2)将式子变形, 从而转化为比较 $y=\frac{1}{x-1}(x>1)$ 和 $y=\log_m x$ $(m=2,3,4)$ 图象交点的横坐标的大小, 数形结合即可判断.

(1)D (2)B **【解析】**(1)令 $\log_3 x=\log_4 y=\log_5 z=m<-1$, 则 $x=3^m$, $y=4^m$, $z=5^m$, $3x=3^{m+1}$, $4y=4^{m+1}$, $5z=5^{m+1}$, 其中 $m+1<0$, 在同一坐标系内画出 $y=3^x$, $y=4^x$, $y=5^x$ 的图象, 如图所示, 由图可知 $5^{m+1}<4^{m+1}<3^{m+1}$, 故 $5z<4y<3x$, 故选 D.



(2)由 $\frac{2a-1}{a-1}=2+\log_2 a$, 得 $\frac{1}{a-1}=\log_2 a$, 由 $\frac{3b-2}{b-1}=3+\log_3 b$, 得 $\frac{1}{b-1}=\log_3 b$, 由 $\frac{4c-3}{c-1}=4+\log_4 c$, 得 $\frac{1}{c-1}=\log_4 c$, 所以考虑 $y=\frac{1}{x-1}(x>1)$ 和 $y=\log_m x(m=2,3,4)$ 的图象相交时, 交点的横坐标的大小. 在同一平面直角坐标系中, 画出 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$, $y=\log_4 x$ 与 $y=\frac{1}{x-1}(x>1)$ 的图象, 如图所示, 根据图象可知 $a<b<c$. 故选 B.



例 5 **【思路点拨】**(1)把 $e^x-2y>\ln y-x+\ln 2$ 化为 $e^x+x>e^{\ln(2y)}+\ln(2y)$, 构造函数 $f(x)=e^x+x$, 判断其单调性即可得出结论. (2)利用构造函数法, 结合函数的单调性确定正确答案.

(1)C (2)B **【解析】**(1)由 $e^x-2y>\ln y-x+\ln 2$, 得 $e^x+x>2y+\ln(2y)$, 即 $e^x+x>e^{\ln(2y)}+\ln(2y)$. 令 $f(x)=e^x+x$, 易知 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增, 所以 $x>\ln(2y)$. 故选 C.

(2)设 $f(x)=x^2+\log_2 x$, 易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}<0$, $f(1)=1>0$, 所以 $\frac{1}{2}<a<1$. 设 $g(x)=\left(\frac{1}{2025}\right)^x-\log_{2025}x$, 易知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 又 $g(1)=\frac{1}{2025}>0$, $g(2025)=\left(\frac{1}{2025}\right)^{2025}-1<0$, 所以 $1<b<2025$. 因为 $c=\log_7\sqrt{6}<\log_7\sqrt{7}=\frac{1}{2}$, 所以 $c<\frac{1}{2}$. 综上可知, $c<a<b$. 故选 B.

第 12 讲　函数的图象

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. (1)$f(x)-k$ (2)$-f(x)$ $f(-x)$ $-f(-x)$ $\log_a x$ (4)$|f(x)|$ $f(|x|)$

【对点演练】

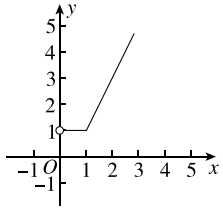
1. $y=0$ **【解析】** $y=\log_{\frac{1}{a}}x=-\log_a x$, 故两个函数的图象关于 x 轴, 即直线 $y=0$ 对称.

2. $x=0$ **【解析】** $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$, 故两个函数的图象关于 y 轴, 即直线 $x=0$ 对称.

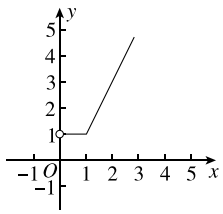
3. ③ **【解析】** 易知函数 $y=a^{|x|}+1$ 是偶函数, 故①错误. $y=a^{|x|}+1>0$, 故②错误. 当 $a\in(1,+\infty)$, $x\in[0,k)$ 时, 函数单调递增且 $y=a^{|x|}+1\geqslant 2$; 当 $a\in(0,1)$, $x\in[0,k)$ 时, 函数单调递减, 且 $y=a^{|x|}+1\leqslant 2$. 故③正确, ④错误. 故填③.

4. $y=(2x-1)^2+2$ **【解析】** 将 $f(x)$ 的图象向右平移一个单位长度后得到 $y=[2(x-1)+1]^2=(2x-1)^2$ 的图象. 再把所得图象向上平移两个单位长度后得到 $y=(2x-1)^2+2$ 的图象.

5. $y=\ln\left(\frac{1}{2}x\right)$ **【解析】** 根据图象的伸缩变换可得, 所求函数解析式为 $y=\ln\left(\frac{1}{2}x\right)$.

6. 

【解析】 $y=e^{\ln x}+|x-1|=x+|x-1|=\begin{cases}1, 0<x<1,\\ 2x-1, x\geqslant 1,\end{cases}$ 其图象如图所示.



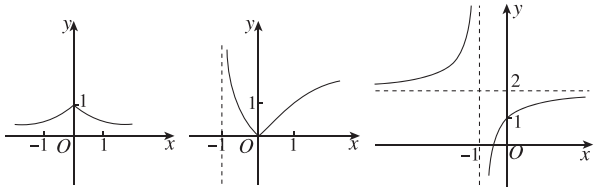
● 课堂考点探究

例 1 【思路点拨】(1)利用图象的翻折变换作图.(2)利用图象的平移变换和翻折变换作图.(3)先将函数 $y=\frac{2x+1}{x+1}$ 化为 $y=2-\frac{1}{x+1}$,再利用图象的平移变换作图.

解:(1)先作出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象,保留 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 图象中 $x\geqslant 0$ 的部分,再把 y 轴右侧部分翻折到左侧,即得 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 的图象,如图①所示.

(2)将函数 $y=\log_2 x$ 的图象向左平移一个单位长度,再将所得图象的 x 轴下方部分翻折到上方,原 x 轴下方部分去掉,上方不变,即可得到函数 $y=|\log_2(x+1)|$ 的图象,如图②.

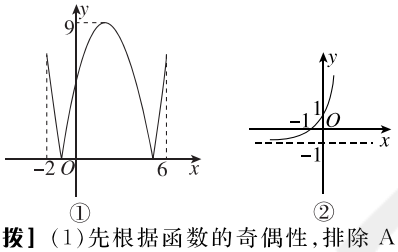
(3)$y=\frac{2x+1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}$ 的图象可由 $y=-\frac{1}{x}$ 的图象先向左平移 1 个单位长度,再将所得图象向上平移 2 个单位长度得到,如图③.



① ② ③

变式题 **解**:(1)先作出二次函数 $y=x^2-4x-5$ 的图象,再把所得图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方,原 x 轴下方部分去掉,上方不变,并截取在区间 $[-2,6]$ 内的部分,即得函数 $y=|x^2-4x-5|(x\in[-2,6])$ 的图象,如图①所示.

(2)将 $y=2^x$ 的图象向左平移 1 个单位长度,得到 $y=2^{x+1}$ 的图象,再将所得图象向下平移 1 个单位长度,得到 $y=2^{x+1}-1$ 的图象,如图②所示.



① ②

例 2 【思路点拨】(1)先根据函数的奇偶性,排除 A,B,再根据 $f(1)$ 的符号,排除 D,即可求解.(2)先根据函数的奇偶性排除选项 C,D,再利用 $x>0$ 时,$f(x)>0$ 恒成立,排除选项 B,即可求解.

(1)C (2)A 【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,又 $f(-x)=-x\ln[(-x)^2+1]=-x\ln(x^2+1)=-f(x)$,故函数 $f(x)$ 为奇函数,排除 A,B.又 $f(1)=\ln 2>0$,故排除 D.故选 C.

(2)由 $f(x)=\frac{x^2+\cos x}{e^x-e^{-x}}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$,且 $f(-x)=\frac{x^2+\cos x}{e^{-x}-e^x}=-f(x)$,可知函数 $f(x)$ 为奇函数,故排除选项 C,D.当 $0<x\leqslant 1$ 时,$\cos x>0$,有 $x^2+\cos x>0$,$e^x-e^{-x}>0$,可得 $f(x)>0$;当 $x>1$ 时,$x^2>1$,有 $x^2+\cos x>0$,$e^x-e^{-x}>0$,可得 $f(x)>0$.故当 $x>0$ 时,$f(x)>0$ 恒成立,故排除选项 B.故选 A.

例 3 【思路点拨】思路一:根据函数 $f(x)$ 的定义域得到 $y=f(1-x)$ 的定义域,结合函数值的取值范围排除部分选项,得到结果;思路二:根据函数图象的对称变换和平移变换即可得到结果.

D 【解析】方法一:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,由 $1-x>0$ 得 $x<1$,即函数 $y=f(1-x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$,排除 A,C.$f(1-x)=(1-x)\ln(1-x)$,设 $g(x)=f(1-x)=(1-x)\ln(1-x)$,则 $g(-1)=2\ln 2>0$,排除 B.故选 D.

方法二:将函数 $f(x)$ 的图象进行以 y 轴为对称轴的翻折变换,得到函数 $y=f(-x)$ 的图象,再将所得图象向右平移一个单位长度,即可得到函数 $y=f[-(x-1)]=f(1-x)$ 的图象.故选 D.

【应用演练】

1. C 【解析】该函数的定义域为 $\mathbf{R}$,排除选项 A,B.当 $x=2$ 时,$y=\frac{3}{e^2}>0$,排除选项 D.故选 C.

2. C 【解析】由 $f(x)=\frac{2x\sin x}{x^2+1}$,得 $f(-x)=\frac{2(-x)\sin(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{2x\sin x}{x^2+1}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,故排除 A,B;由于 $x^2+1\geqslant 2x$,故当 $x>0$ 时,$f(x)=\frac{2x\sin x}{x^2+1}\leqslant\frac{2x\sin x}{2x}=\sin x\leqslant 1$,故排除 D.故选 C.

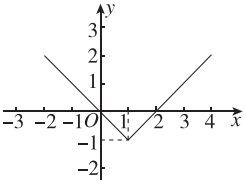
3. D 【解析】方法一:先画出函数 $f(x)=\begin{cases}3^x,x\leqslant 1,\\ \log_{\frac{1}{3}}x,x>1\end{cases}$ 的草图,再将函数 $f(x)$ 的图象进行以 y 轴为对称轴的翻折变换,得到函数 $y=f(-x)$ 的图象,再把所得的函数图象向右平移 1 个单位长度,得到函数 $y=f(1-x)$ 的图象.故选 D.

方法二:由函数 $f(x)$ 的解析式,得 $y=f(1-x)=\begin{cases}3^{1-x},x\geqslant 0,\\ \log_{\frac{1}{3}}(1-x),x<0,\end{cases}$ 故函数 $y=f(1-x)$ 的图象过点 $(0,3)$,排除 A;函数 $y=f(1-x)$ 的图象过点 $(1,1)$,排除 B;函数 $y=f(1-x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,排除 C.故选 D.

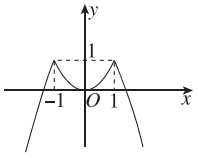
4. A 【解析】当 $x>0$ 时,$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+1\in(1,2)$,由 $y=f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$,得 $y-1=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,得 $x=\log_{\frac{1}{2}}(y-1)$,所以当 $x>0$ 时,与 $f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的图象的解析式为 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1),x\in(1,2)$,此时函数单调递减,排除 C,D,由 $x\in(1,2)$,排除 B,故选 A.

例 4 【思路点拨】(1)将函数的解析式写成分段函数的形式,然后结合函数的图象分析函数的性质即可.(2)根据新定义作出函数 $F(x)$ 的图象,借助图象逐个判断.

(1)C (2)ABD 【解析】(1)由题意得,$f(x)=|x-1|-1=\begin{cases}x-2,x\geqslant 1,\\ -x,x<1,\end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的图象,如图所示,由图可得,$f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,选项 A 中说法正确;$f(x)$ 的最小值为 -1,选项 B 中说法正确;$f(x)$ 的图象不关于点 $(1,-1)$ 对称,选项 C 中说法错误;$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减,选项 D 中说法正确.故选 C.

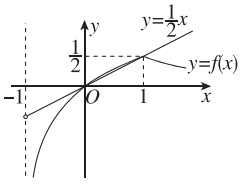


(2)根据 $f(x)=2-x^2$ 与 $g(x)=x^2$,画出 $F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 的图象,如图所示.由图可知,函数 $F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 的图象关于 y 轴对称,故 A 正确;函数 $F(x)$ 的图象与 x 轴有三个交点,所以方程 $F(x)=0$ 有三个不同的解,故 B 正确;函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递增,在 $[-1,0]$ 上单调递减,在 $[0,1]$ 上单调递增,在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,故 C 错误,D 正确.故选 ABD.



例 5 【思路点拨】(1)作出函数图象,利用数形结合的数学思想即可得出结果.(2)首先根据函数的奇偶性与单调性,得到函数 $f(x)$ 在相应区间上的符号,再根据两个数的乘积大于等于零,分类转化为对应自变量不等式,最后求并集得结果.

(1)C (2)D 【解析】(1)作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}x(x>-1)$ 的图象,如图所示.由图可知,不等式 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}x$ 的解集为 $(-1,0]\cup[1,+\infty)$.故选 C.

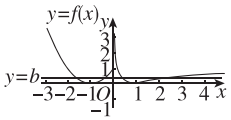


(2)因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,且 $f(2)=0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也单调递减,且 $f(-2)=0$,$f(0)=0$,所以当 $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$ 时,$f(x)>0$,当 $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$ 时,$f(x)<0$,所以由 $xf(x-1)\geqslant 0$ 可得 $\begin{cases}x<0,\\ -2\leqslant x-1\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0,\\ 0\leqslant x-1\leqslant 2\end{cases}$ 或 $x=0$,解得 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 或 $1\leqslant x\leqslant 3$,所以满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 $[-1,0]\cup[1,3]$.故选 D.

例 6 【思路点拨】将函数 $g(x)=f(x)-b$ 有四个不同的零点,转化为函数 $y=f(x)$ 与 $y=b$ 的图象有四个交点,再利用数形结合思想即可解答.

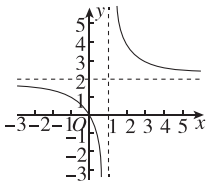
A 【解析】依题意,函数 $g(x)=f(x)-b$ 有四个不同的零

点，即 $f(x)=b$ 有四个不同的解，等价于函数 $y=f(x)$ 与 $y=b$ 的图象有四个交点. 由函数 $f(x)$ 的解析式可知，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，$f(x)\in[0,+\infty)$；当 $x\in(-1,0]$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，$f(x)\in(0,1]$；当 $x\in(0,1)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，$f(x)\in(0,+\infty)$；当 $x\in[1,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，$f(x)\in[0,+\infty)$. 作出 $y=f(x)$ 的图象，如图所示，结合图象可知实数 b 的取值范围为 $(0,1]$. 故选 A.

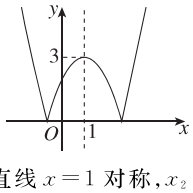


【应用演练】

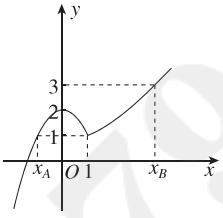
1. A **【解析】** $\because f(x)=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+2$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象是由函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图象先向右平移一个单位长度，再向上平移两个单位长度得到的，如图所示，故其图象关于点 $(1,2)$ 对称，故 A 正确，D 错误；$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，故 B 错误；显然函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y=k$ 的图象最多只有一个交点，故 C 错误. 故选 A.



2. C **【解析】** 作出函数 $y=|x^2-2x-2|$ 的图象，如图所示，由图可知其图象关于直线 $x=1$ 对称. 又函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x)-f(2-x)=0$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以函数 $f(x)$ 与 $y=|x^2-2x-2|$ 图象的交点的横坐标关于直线 $x=1$ 对称. 不妨设 x_1 与 x_n 关于直线 $x=1$ 对称，x_2 与 x_{n-1} 关于直线 $x=1$ 对称，…，则有 $x_1+x_n=2$，$x_2+x_{n-1}=2$，…，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_n+x_{n-1}+\cdots+x_1$，所以 $2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=(x_1+x_n)+(x_2+x_{n-1})+\cdots+(x_n+x_1)=n(x_1+x_n)=2n$. 故选 C.

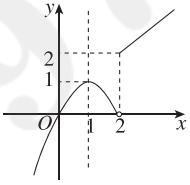


3. $3+\sqrt{3}$ **【解析】** 作出 $f(x)$ 的图象，如图所示，由图可知，当 $b=x_B$，$a=x_A$ 时，$b-a$ 取得最大值. 令 $-x^2+2=1$，解得 $x=-1$ 或 $x=1$，所以 $x_A=-1$；令 $x+\dfrac{1}{x}-1=3$，解得 $x=2\pm\sqrt{3}$，所以 $x_B=2+\sqrt{3}$. 故 $b-a$ 的最大值为 $x_B-x_A=3+\sqrt{3}$.



4. $(-\infty,1]$，$[2,+\infty)$　$(1,+\infty)$

【解析】 ① 当 $a=2$ 时，可得 $f(x)=\begin{cases}x,x\geqslant 2,\\-x^2+2x,x<2,\end{cases}$ 函数 $f(x)$ 的图象如图所示，由图可得函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1]$，$[2,+\infty)$.



②因为存在 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$，使得 $f(1+x)=f(1-x)$ 成立，所以 $f(x)$ 的图象上存在关于直线 $x=1$ 对称的点，则 $a>1$，即实数 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

第 13 讲　方程解的存在性及方程的近似解

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)x_0　(2)x 轴　零点
(3)连续　$f(a)\cdot f(b)<0$　至少有一个
2. 连续的曲线　中点

【对点演练】

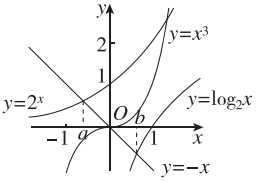
1. 1 **【解析】** 由题知，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(2)<0$，$f(3)>0$，故函数 $f(x)$ 存在唯一的零点.
2. $(0,3)$ **【解析】** 令 $f(x)=0$，则 $x\cdot 2^x-kx-2=0$，由 $x\in(1,2)$，可得 $k=2^x-\dfrac{2}{x}$，令 $\varphi(x)=2^x-\dfrac{2}{x}$，$x\in(1,2)$，则由题知直线 $y=k$ 与 $\varphi(x)=2^x-\dfrac{2}{x}$，$x\in(1,2)$ 的图象有交点. $\because\varphi(x)=2^x-\dfrac{2}{x}$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，且 $\varphi(1)=0$，$\varphi(2)=3$，$\therefore 0<k<3$.
3. $\left(\dfrac{5}{2},3\right)$ **【解析】** 令 $f(x)=2^x-x-4$，则 $f(2)=4-2-4=-2<0$，$f(3)=8-3-4=1>0$，$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=2^{\frac{5}{2}}-\dfrac{5}{2}-4<0$，由 $f(3)f\left(\dfrac{5}{2}\right)<0$ 知该解所在的区间为 $\left(\dfrac{5}{2},3\right)$.
4. 2 **【解析】** 由题知 $f(x)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$，由 $f(x)=0$，得 $(9^x-3)\ln(x-1)=0$，即 $9^x-3=0$ 或 $\ln(x-1)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{2}$（舍）或 $x=2$，所以函数 $f(x)=(9^x-3)\ln(x-1)$ 的零点为 2.
5. ①②③ **【解析】** 由题知 $f(-1)\cdot f(0)<0$，$f(2)\cdot f(3)<0$，$f(5)\cdot f(6)<0$，因为 $f(x)$ 的图象是连续不断的，所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$，$(2,3)$，$(5,6)$ 三个区间上均有零点，但不能判断有几个零点，故①②③正确，④不正确. 故填①②③.
6. 2 **【解析】** 当 $x\leqslant 0$ 时，由 $x^2-2=0$ 可得 $x=-\sqrt{2}$；当 $x>0$ 时，由 $\ln x=0$，解得 $x=1$，所以函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2,x\leqslant 0,\\\ln x,x>0\end{cases}$ 的零点个数是 2.

● 课堂考点探究

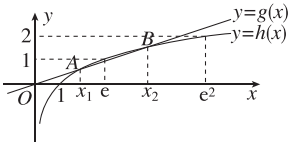
例 1 **【思路点拨】** (1)根据函数零点存在定理分析判断. (2)将函数零点问题转化为函数图象交点横坐标的范围问题，通过数形结合求解.

(1)A　(2)B **【解析】** (1)因为 $y=2^x$，$y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递增，所以 $f(x)=2^x+\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=2^{\frac{1}{4}}-2<0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}-1>0$，即 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$，所以 $f(x)$ 的零点在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上，故选 A.

(2)由 $f(x)=2^x+x=0$ 得 $2^x=-x$，由 $g(x)=\log_2 x+x=0$ 得 $\log_2 x=-x$，由 $h(x)=x^3+x=0$ 得 $x^3=-x$，分别作出函数 $y=2^x$，$y=\log_2 x$，$y=x^3$ 和 $y=-x$ 的图象，如图所示，由图可知，$a\in(-1,0)$，$c=0$，$b\in(0,1)$，所以 $a<c<b$. 故选 B.



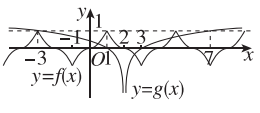
变式题　(1)A　(2)3　**【解析】** (1)令 $g(x)=\dfrac{1}{3}x$，$h(x)=\ln x$，作出 $y=g(x)$，$y=h(x)$ 的图象，如图所示. 由图可得，$g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象有 2 个交点，分别记为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\therefore f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，且 $x_1\in(1,\mathrm{e})$，$x_2\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$，故选 A.



(2)令函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x-3}-(-x+5)=\mathrm{e}^{x-3}+x-5$，显然函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 至多只有一个零点. 由函数 $y=\mathrm{e}^{x-3}$ 与 $y=-x+5$ 的图象的交点为 (x_0,y_0)，得函数 $f(x)$ 的零点为 x_0，而 $f(3)=-1<0$，$f(4)=\mathrm{e}-1>0$，$f(3)f(4)<0$，因此存在唯一的 $x_0\in(3,4)$，使得 $f(x_0)=0$，所以 $n=3$.

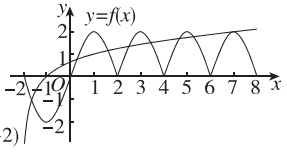
例 2 **【思路点拨】** (1)首先根据条件分析函数的对称性，以及判断函数的周期性，并画出函数 $y=f(x)$ 和 $g(x)=\log_5|x-2|$ 的图象，利用数形结合的思想分析方程的不同解的个数. (2)分别作出函数 $y=f(x)$ 和函数 $y=\log_3(x+2)$ 的图象，观察图象，它们的交点个数即为方程 $f(x)=\log_3(x+2)$ 的不同根的个数.

(1)D　(2)B **【解析】** (1)因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，又 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，所以 $f(2-x)=-f(-x)$，即 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的周期为 4. 由 $f(x)=f(2-x)$，得函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x^2$，设 $g(x)=\log_5|x-2|$，结合函数的周期性和对称性画出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象，如图所示，易知 $g(-3)=$

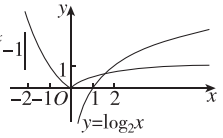


$g(7)=1$，由函数图象可得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的交点个数为 5. 故选 D.

(2)当 $2<x\leqslant 4$ 时，$f(x)=f(x-2)=2\sin\dfrac{\pi(x-2)}{2}=-2\sin\dfrac{\pi x}{2}$；当 $4<x\leqslant 6$ 时，$f(x)=f(x-2)=-2\sin\dfrac{\pi(x-2)}{2}=2\sin\dfrac{\pi x}{2}$；当 $6<x\leqslant 8$ 时，$f(x)=f(x-2)=2\sin\dfrac{\pi(x-2)}{2}=-2\sin\dfrac{\pi x}{2}$；…. 根据函数的解析式特征，可知 $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$. 由 $y=\log_3(x+2)\leqslant 2$ 得 $-2<x\leqslant 7$，作出函数 $y=f(x)$，$y=\log_3(x+2)$ 在同一平面直角坐标系内的图象，如图所示，方程 $f(x)=\log_3(x+2)$ 的不同根的个数就是函数 $y=f(x)$，$y=\log_3(x+2)$ 图象交点的个数，由图可知，两图象有 8 个交点，故选 B.

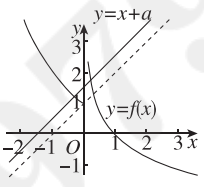


变式题 B **[解析]** 由 $f(x)=0$，得 $\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1\right|=\log_2 x$，因此函数 $f(x)$ 的零点个数即为函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1\right|$ 的图象交点的个数，在同一平面直角坐标系内作出函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1\right|$ 的图象，如图，由图可知，函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1\right|$ 的图象有唯一公共点，所以函数 $f(x)=\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1\right|-\log_2 x$ 的零点个数为 1. 故选 B.

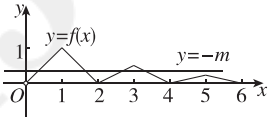


例 3 **[思路点拨]** (1)根据函数零点的定义，利用数形结合思想进行求解即可. (2)将 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上的图象每次向右平移 2 个单位长度，且纵坐标变为原来的一半，得到 $f(x)$ 在 $(0,6]$ 上的图象，根据 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-m$ 有四个不同的交点，得到 m 的取值范围.

(1)D (2)A **[解析]** (1)令 $g(x)=0$ 可得 $f(x)=x+a$. 由题意知，当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln\dfrac{1}{x}=-\ln x$. 作出函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=x+a$ 的图象，如图所示，由图可知，当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=x+a$ 的图象有 2 个交点，此时，函数 $g(x)$ 有 2 个零点. 因此，实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$，即实数 a 的最小值为 1. 故选 D.

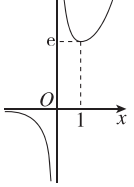


(2)先作出 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上的图象，根据 $f(x)=2f(x+2)$ 可知 $f(x)$ 在 $(2,4]$ 上的图象由 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上的图象向右平移 2 个单位长度且纵坐标变为原来的一半得到. 同理得到 $f(x)$ 在 $(4,6]$ 上的图象，如图所示，函数 $g(x)=f(x)+m$ 有四个不同的零点可看作 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-m$ 有四个不同的交点，由图可知 $\dfrac{1}{4}<-m<\dfrac{1}{2}$，故 $m\in\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$. 故选 A.



变式题 (1)C (2)A **[解析]** (1)当 $x<1$ 时，令 $2^x-1=0$，得 $x=0$，满足题意. 因为函数 $f(x)$ 恰有两个零点，所以当 $x\geqslant 1$ 时，$(x-a)(x-2a)=0$ 只有 1 个实数根，故 $a<1\leqslant 2a$，解得 $\dfrac{1}{2}\leqslant a<1$. 故选 C.

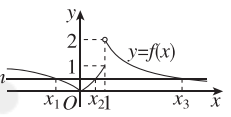
(2)方法一：设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}(x\neq 0)$，则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}(x\neq 0)$，∴ $g(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$，$(0,1)$，作出 $g(x)$ 的大致图象，如图所示，$f(x)=\dfrac{e^x}{x}-a$ 没有零点等价于 $g(x)$ 与 $y=a$ 的图象没有交点，由图可知 a 的取值范围为 $[0,e)$.



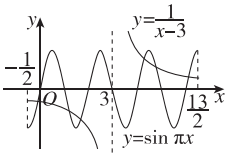
方法二：由 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-a=0$，得 $e^x=ax(x\neq 0)$. $f(x)$ 无零点等价于曲线 $y=e^x$ 与直线 $y=ax$ 无交点. 当 $a<0$ 时，显然曲线 $y=e^x$ 与直线 $y=ax$ 有交点，因此若 $f(x)$ 无零点，则必然有 $a\geqslant 0$. 当直线 $y=ax(a\geqslant 0)$ 与曲线 $y=e^x$ 相切时，设切点为 $P(x_0,e^{x_0})$，则有 $a=e^{x_0}$ 且 $e^{x_0}=ax_0$，∴ $a=ax_0$，∴ $x_0=1$，∴ $a=e$，因此，要使曲线 $y=e^x$ 与直线 $y=ax$ 不相交，则 $0\leqslant a<e$.

例 4 **[思路点拨]** 作出 $f(x)$ 的大致图象，根据图象求出 m，x_1，x_2，x_3 的范围即可判断 A，B 选项，由 $|2^{x_1}-1|=|2^{x_2}-1|$ 得到 x_1，x_2 的关系即可判断 C，D 选项.

AC **[解析]** 函数 $g(x)=f(x)-m$ 有三个零点，等价于 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 的图象有三个交点，作出函数 $y=m$ 与 $f(x)=\begin{cases}|2^x-1|,x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{x},x>1\end{cases}$ 的图象，如图所示，由图可得 $0<m<1$，A 正确；当 $\dfrac{2}{x}=1$ 时，$x=2$，故 $x_3>2$，B 错误；又 $|2^{x_1}-1|=|2^{x_2}-1|$，且 $x_1<0<x_2<1$，故 $-(2^{x_1}-1)=2^{x_2}-1$，可得 $2^{x_1}+2^{x_2}=2$，C 正确；因为 $x_1\neq x_2$，所以 $2=2^{x_1}+2^{x_2}>2\sqrt{2^{x_1+x_2}}$，可得 $2^{x_1+x_2}<1$，D 错误. 故选 AC.

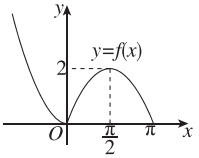


变式题 B **[解析]** 由 $f(x)=2-\dfrac{2x-5}{x-3}+\sin[(1-x)\pi]=\dfrac{2x-6-(2x-5)}{x-3}+\sin(\pi-\pi x)=0$，得 $\dfrac{-1}{x-3}+\sin\pi x=0$，即 $\sin\pi x=\dfrac{1}{x-3}$ $(x\neq 3)$，作出 $y=\sin\pi x$ 与 $y=\dfrac{1}{x-3}$ 在 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{13}{2}\right]$ 上的图象，如图所示，易知 $y=\sin\pi x$ 与 $y=\dfrac{1}{x-3}$ 的图象均关于点 $(3,0)$ 对称. 由图可知，两函数图象在 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{13}{2}\right]$ 上有 6 个交点，根据对称性得 $x_1+x_6=x_2+x_5=x_3+x_4=6$，故 $\sum\limits_{i=1}^{6}x_i=3\times 6=18$. 故选 B.

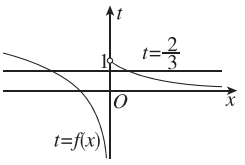


例 5 **[思路点拨]** (1)作出函数 $y=f(x)$ 的图象，将问题转化为求方程 $f[f(x)]=1$ 的根，令 $t=f(x)$，先确定 $f(t)=1$ 的根，再得 $f[f(x)]=1$ 的根，结合函数图象即可获解.

(1)C (2)C **[解析]** (1)作出函数 $f(x)=\begin{cases}2\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi,\\ x^2,x<0\end{cases}$ 的图象，如图所示，令 $t=f(x)$，则由 $f(t)-1=0$，即 $f(t)=1$，得 $2\sin t=1(0\leqslant t\leqslant\pi)$，$t^2=1$ $(t<0)$，所以 $t=\dfrac{\pi}{6}$，$t=\dfrac{5\pi}{6}$，$t=-1$. 当 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 时，则 $f(x)=\dfrac{\pi}{6}$，结合函数 $y=f(x)$ 的图象可得 $f(x)=\dfrac{\pi}{6}$ 的根有 3 个；当 $t=\dfrac{5\pi}{6}$ 时，则 $f(x)=\dfrac{5\pi}{6}$，结合函数 $y=f(x)$ 的图象可得 $f(x)=\dfrac{5\pi}{6}$ 的根有 1 个；当 $t=-1$ 时，则 $f(x)=-1$，结合函数 $y=f(x)$ 的图象可得 $f(x)=-1$ 的根有 0 个. 综上可得，函数 $y=f[f(x)]-1$ 的零点的个数是 4. 故选 C.

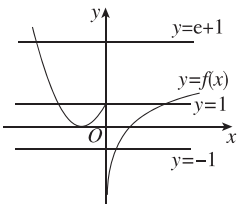


(2)当 $x<0$ 时，$f(x)\in\mathbf{R}$，且单调递减，当 $x>0$ 时，$f(x)\in(0,1)$，且单调递减. 令 $t=f(x)$，由 $y=3t^2-2t=0$，可得 $t=0$ 或 $t=\dfrac{2}{3}$，作出 $t=$



$f(x)$及$t=0$,$t=\frac{2}{3}$的图象,如图所示,由图可知,$f(x)$与$t=0$的图象有一个交点,$f(x)$与$t=\frac{2}{3}$的图象有两个交点,故$y=3[f(x)]^2-2f(x)$共有3个零点.故选C.

变式题 C 【解析】令$t=f(x)-1$,则由$f(t)-1=0$,即$f(t)=1$,得$x^2+2x+1=1(x\leqslant 0)$,$\ln x=1(x>0)$,可得$t=-2$或$t=0$或$t=e$,则当$t=-2$时,$f(x)=-1$;当$t=0$时,$f(x)=1$;当$t=e$时,$f(x)=e+1$,在同一平面直角坐标系中分别作出$y=f(x)$,$y=-1$,$y=1$,$y=e+1$的图象,如图所示,其中当$x\to+\infty$时,$f(x)\to+\infty$.由图可知$y=f(x)$与$y=-1$的图象有1个交点,即$f(x)-1=-2$有1个根;$y=f(x)$与$y=1$的图象有3个交点,即$f(x)-1=0$有3个根;$y=f(x)$与$y=e+1$的图象有2个交点,即$f(x)-1=e$有2个根,所以函数$y=f[f(x)-1]-1$的零点个数为$1+3+2=6$,故选C.



第14讲 实际问题中的函数模型

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 递增 递增 递增

【对点演练】

1. $y_3>y_1>y_2$ 【解析】根据指数函数、一次函数、对数函数的增长速度关系可得$y_3>y_1>y_2$.
2. $[10,30]$ 【解析】设矩形花园的另一边长为y m,由相似三角形的性质可得$\frac{x}{40}=\frac{40-y}{40}(0<x<40)$,得$y=40-x(0<x<40)$,∴矩形花园的面积$S=x(40-x)$.∵矩形花园的面积不小于300 m^2,∴$x(40-x)\geqslant 300$,即$(x-10)(x-30)\leqslant 0$,解得$10\leqslant x\leqslant 30$,故$x$的取值范围是$[10,30]$.
3. $S=\frac{800}{x}+\frac{x}{8}(x>0)$ 【解析】由题意知,每件产品的生产准备费用是$\frac{800}{x}$元,仓储费用是$\left(\frac{x}{8}\times 1\right)$元,所以平均每件产品的生产准备费用与仓储费用之和$S=\frac{800}{x}+\frac{x}{8}(x>0)$.
4. 5500 m 【解析】$\frac{p_1}{p_2}=\frac{p_0\cdot e^{-k\cdot h_1}}{p_0\cdot e^{-k\cdot h_2}}=\frac{e^{-k\cdot h_1}}{e^{-k\cdot h_2}}=e^{k\cdot h_2-k\cdot h_1}=\frac{1}{2}$,故$h_1-h_2=\frac{\ln 2}{k}\approx\frac{0.693}{0.000\,126}=5500(\text{m})$.
5. $[0,26]$ 【解析】令$h=130t-5t^2\geqslant 0$,解得$0\leqslant t\leqslant 26$,故所求定义域为$[0,26]$.
6. 8 ℃ 【解析】由题意知,上午8时即$t=-4$,因此所求温度$T=(-4)^3-3\times(-4)+60=8(℃)$.
7. $s=\begin{cases}60t(0\leqslant t\leqslant 2.5),\\150(2.5<t\leqslant 3.5),\\325-50t(3.5<t\leqslant 6.5)\end{cases}$ 【解析】当$0\leqslant t\leqslant 2.5$时,$s=60t$;当$2.5<t\leqslant 3.5$时,$s=150$;当$3.5<t\leqslant 6.5$时,$s=150-50(t-3.5)=325-50t$.故$s$关于$t$的函数表达式为$s=\begin{cases}60t(0\leqslant t\leqslant 2.5),\\150(2.5<t\leqslant 3.5),\\325-50t(3.5<t\leqslant 6.5).\end{cases}$

● 课堂考点探究

例1 【思路点拨】(1)根据T与$\lg P$的关系图可得正确的选项.(2)蓄水量增加,说明进水速度大于出水速度,蓄水量减少,说明出水速度大于进水速度,再结合具体数据进行分析即可.

(1)D (2)A 【解析】(1)结合图象逐一验证:当$T=220$,$\lg P=\lg 1026>3$时,由图象可知二氧化碳处于固态,故A错误;当$T=270$,$\lg P=\lg 128\in(2,3)$时,由图象可知二氧化碳处于液态,故B错误;当$T=300$,$\lg P=\lg 9987\approx 4$时,由图象可知二氧化碳处于固态,故C错误;当$T=360$,$\lg P=\lg 729\in(2,3)$时,由图象可知二氧化碳处于超临界状态,故D正确.故选D.

(2)由题图a,b得进水的速度为1,出水的速度为2.在题图c中,∵0时到3时直线的斜率为2,即蓄水量每小时增加2,∴只进水不出水(即两个进水口都进水),故①一定正确;若不进水只出水1小时后,则蓄水量减少2,故②一定错误;若两个进水口和一个出水口同时打开,则蓄水量也可以保持不变,故③不一定正确.故选A.

变式题 C 【解析】刚开始交易时,即时价格和平均价格应该相等,故A,D错误;开始交易后,平均价格应该跟随即时价格变动,即时价格与平均价格同增同减,故B错误.故选C.

例2 【思路点拨】(1)根据已知条件列方程,化简求得正确答案.(2)由指数函数的性质确定函数的增减性可判断A,B;分别代入$k=\frac{1}{3}$和$k=-\frac{1}{3}$,解指数不等式可判断C,D.

(1)B (2)AC 【解析】(1)依题意得$m=3100$,令$v=2\ln\left(1+\frac{M}{3100}\right)=11$,则$\ln\left(1+\frac{M}{3100}\right)^2=\ln e^{11}$,所以$\left(1+\frac{M}{3100}\right)^2=e^{11}$,即$1+\frac{M}{3100}=e^{5.5}$,则$\frac{M}{3100}=e^{5.5}-1\approx e^{\ln 244.69}-1=244.69-1=243.69$,所以$M\approx 3100\times 243.69=755\,439(\text{kg})\approx 755.44(\text{t})$.故选B.

(2)易知$P_0>0$,当$k\in(-1,0)$时,$0<1+k<1$,由指数函数的性质可知$P_n=P_0(1+k)^n$随n的增大而减小,即这期间人口数呈下降趋势,故A正确,B不正确.当$k=\frac{1}{3}$时,$P_n=P_0\left(\frac{4}{3}\right)^n\geqslant 2P_0$,所以$\left(\frac{4}{3}\right)^n\geqslant 2$,所以$n\geqslant\log_{\frac{4}{3}}2(n\in\mathbf{N}_+)$,因为$\log_{\frac{4}{3}}2\in(2,3)$,所以$n$的最小值为3,故C正确;当$k=-\frac{1}{3}$时,$P_n=P_0\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant\frac{1}{2}P_0$,所以$\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant\frac{1}{2}$,所以$n\geqslant\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$,因为$\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}=\log_{\frac{3}{2}}2\in(1,2)$,所以$n$的最小值为2,故D不正确.故选AC.

变式题 **解**:(1)不满足条件.理由如下.

当$a=b=\frac{1}{30}$时,$f(x)=\frac{x}{30}-\frac{1}{30x}+\frac{1}{30}$,因为函数$y=\frac{x}{30}+\frac{1}{30}$在$[2,8]$上单调递增,函数$y=-\frac{1}{30x}$在$[2,8]$上单调递增,所以$f(x)=\frac{x}{30}-\frac{1}{30x}+\frac{1}{30}$在$[2,8]$上单调递增,满足条件①.

由$f(x)=\frac{x}{30}-\frac{1}{30x}+\frac{1}{30}\geqslant 5\%\cdot x$,即$\frac{x}{30}-\frac{1}{30x}+\frac{1}{30}\geqslant\frac{x}{20}$,整理可得$x^2-2x+2\leqslant 0$,因为$x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$恒成立,所以不等式$x^2-2x+2\leqslant 0$无解,故不满足条件②.

故$a=b=\frac{1}{30}$不满足条件.

(2)当$b=\frac{1}{3}$时,函数$f(x)=\frac{x}{30}-\frac{a}{x}+\frac{1}{3}$,因为$a>0$,所以由(1)知$f(x)$在$[2,8]$上单调递增,奖金发放方案满足条件①.

由条件②可知$f(x)\geqslant\frac{x}{20}$,即$\frac{x}{60}+\frac{a}{x}\leqslant\frac{1}{3}$在$[2,8]$上恒成立,所以$a\leqslant-\frac{1}{60}x^2+\frac{1}{3}x=\frac{-(x-10)^2+100}{60}$在$[2,8]$上恒成立.因为函数$y=\frac{-(x-10)^2+100}{60}$在$[2,8]$上单调递增,所以当$x=2$时,该函数取得最小值$\frac{3}{5}$,所以$a\leqslant\frac{3}{5}$.所以要使奖金发放方案满足条件,则$a$的取值范围为$\left(0,\frac{3}{5}\right]$.

例3 【思路点拨】(1)根据总成本的表达式,利用二次函数的性质求得总成本的最小值并求得此时对应的年产量;(2)利用求得的总利润的表达式,再根据二次函数的性质求得最大利润以及此时对应的年产量.

解:(1)因为$y=\frac{x^2}{5}-48x+8000=\frac{1}{5}(x-120)^2+5120(0\leqslant x\leqslant 210)$,所以当年产量为120吨时,其生产的总成本最低,最低成本为5120万元.

(2)设该生产线一年获得的总利润为$f(x)$万元,则$f(x)=40x-y=40x-\frac{x^2}{5}+48x-8000=-\frac{x^2}{5}+88x-8000=-\frac{1}{5}(x-220)^2+1680(0\leqslant x\leqslant 210)$.

因为 $f(x)$在$[0,210]$上单调递增,所以当 $x=210$ 时,$f(x)$有最大值,最大值为$-\frac{1}{5}(210-220)^2+1680=1660$.

故当年产量为 210 吨时,可获得最大利润 1660 万元.

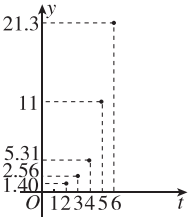
例 4 **[思路点拨]** (1) 根据已知条件,可推得 $1.1^x>2$,再结合对数函数的公式,即可求解.(2)由题意知 $X_n=1000X_0$,代入关系式,根据对数的运算性质及指数与对数的关系计算可得.

(1)C (2)D **[解析]** (1)将 2022 年记为第 1 年,设第 x 年该公司全年投入的研发资金为 y 万元,则 $y=300\times(1+10\%)^x$,由题意可得,$300\times(1+10\%)^x>600$,即 $1.1^x>2$,故 $x>\log_{1.1}2=\frac{\lg 2}{\lg 1.1}=\frac{\lg 2}{\lg 11-\lg 10}=\frac{\lg 2}{\lg 11-1}\approx\frac{0.301}{1.041-1}\approx 7.3$,则 $x\geqslant 8$,故该公司全年投入的研发资金开始超过 600 万元的年份是 2029 年. 故选 C.

(2)由题意知,$X_n=1000X_0$,则 $\lg(1000X_0)=12\lg(1+p)+\lg X_0$,即 $\lg 10^3+\lg X_0=12\lg(1+p)+\lg X_0$,即 $3=12\lg(1+p)$,所以 $1+p=10^{0.25}\approx 1.778$,解得 $p\approx 0.778=77.8\%$. 故选 D.

变式题 (1)C (2)B **[解析]** (1)设溶液浓度变化后的透光度为 T',由 $A=\lg\frac{1}{T}=Kbc$,得 $\frac{1}{T}=10^A$,即 $T=\left(\frac{1}{10}\right)^A$. 保持 K,b 不变,当溶液的浓度增加为原来的两倍时,$Kb\cdot 2c=2A=\lg\frac{1}{T'}$,所以 $\frac{1}{T'}=10^{2A}$,所以 $T'=\left(\frac{1}{10}\right)^{2A}=\left[\left(\frac{1}{10}\right)^A\right]^2=T^2$,所以透光度由原来的 T 变为 T^2. 故选 C.

(2)根据提供的数据画出散点图,如图所示,由图可知,散点图与函数 $y=\frac{1}{3}\cdot 2^t$ 的图象最接近,且随着 t 的增大,y 增大的幅度比较大,符合指数型函数的特征. 故选 B.



例 5 **[思路点拨]** (1)由题意可知,当 $x=10$ 时,$R=4000$,代入可求出 a,然后由年利润等于销售总额减去投入资金再减去固定成本,可求出年利润 W(万元)关于年产量 x(千台)的函数关系式;(2)分别求出当 $0\leqslant x<40$ 和 $x\geqslant 40$ 时 W 的最大值,比较即可得答案.

解:(1)由题意知,当 $x=10$ 时,$R=10\times 10^2+10a=4000$,所以 $a=300$,则当 $0\leqslant x<40$ 时,$W=900x-(10x^2+300x)-260=-10x^2+600x-260$;当 $x\geqslant 40$ 时,$W=900x-\frac{901x^2-9450x+10\,000}{x}-260=\frac{-x^2+9190x-10\,000}{x}$.

所以 $W=\begin{cases}-10x^2+600x-260, & 0\leqslant x<40,\\ \frac{-x^2+9190x-10\,000}{x}, & x\geqslant 40.\end{cases}$

(2)当 $0\leqslant x<40$ 时,$W=-10(x-30)^2+8740$,

所以当 $x=30$ 时,W 取得最大值,最大值为 8740;当 $x\geqslant 40$ 时,$W=-\left(x+\frac{10\,000}{x}\right)+9190\leqslant -2\sqrt{x\cdot\frac{10\,000}{x}}+9190=8990$,当且仅当 $x=\frac{10\,000}{x}$,即 $x=100$ 时,W 有最大值,最大值为 8990.

因为 $8740<8990$,所以当年产量为 100 千台时,该企业所获年利润最大,最大年利润为 8990 万元.

变式题 **解:**(1)由已知可得,$f(x)=\begin{cases}-x^2+49x-205, & 10\leqslant x<20,\\ -30\ln x+24x+5, & x\geqslant 20,\end{cases}$

又 $g(x)=25x-f(x)-5$,

所以当 $x\in[10,20)$时,$g(x)=25x-(-x^2+49x-205)-5=x^2-24x+200$,

当 $x\in[20,+\infty)$时,$g(x)=25x-(-30\ln x+24x+5)-5=30\ln x+x-10$,故 $g(x)=\begin{cases}x^2-24x+200, & 10\leqslant x<20,\\ 30\ln x+x-10, & x\geqslant 20.\end{cases}$

(2)当 $x\in[10,20)$时,$g(x)=x^2-24x+200=(x-12)^2+56$,所以当 $x\in[10,20)$时,$g(x)$的最小值为 $g(12)=56$.

当 $x\in[20,+\infty)$时,$g(x)=30\ln x+x-10$,

则 $g'(x)=\frac{30}{x}+1>0$,所以当 $x\in[20,+\infty)$时,$g(x)$单调递增,故 $g(x)$的最小值为 $g(20)=30\ln 20+20-10=30\ln 20+10\approx 100$.

因为 $56<100$,所以当生产量为 12 吨时,总利润最小,此时总利润为 56 千元.

第三单元 导数及其应用

第 15 讲 导数的概念及其意义、导数的运算

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 平均 (2)$f'(x_0)$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 斜率 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

2. (1)$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 导函数 y'

(2)$\alpha x^{\alpha-1}$ $\cos x$ $-\sin x$ $a^x\ln a$ $\frac{1}{x\ln a}$

$f'(x)\pm g'(x)$ $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ $y'_u\cdot u'_x$

【对点演练】

1. 24 **[解析]** $f(6)=108$,$f(2)=12$,所以平均变化率为$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{108-12}{4}=24$.

2. -4.8 m/s **[解析]** $\because s'=-4t$,$\therefore$ 该物体在 1.2 s 末的瞬时速度为$(-4)\times 1.2=-4.8$(m/s).

3. $y=-\frac{x}{\pi}+1$ **[解析]** 由题得 $y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,$\therefore$ 切线的斜率 $k=y'|_{x=\pi}=-\frac{1}{\pi}$,则切线方程为 $y=-\frac{1}{\pi}(x-\pi)$,即 $y=-\frac{x}{\pi}+1$.

4. $2\cos 2x$ **[解析]** 方法一:$y'=(2\sin x\cos x)'=2(\sin x)'\cos x+2\sin x(\cos x)'=2\cos^2 x-2\sin^2 x=2\cos 2x$.

方法二:$y'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$.

5. -8 **[解析]** $f'(x)=2x+3f'(2)$,令 $x=2$,可得 $f'(2)=-2$,所以 $f(x)=x^2-6x$,则 $f(2)=-8$.

6. $3(2x+3)^2$ $6(2x+3)^2$ **[解析]** $f'(x)=3x^2$,所以 $f'(2x+3)=3(2x+3)^2$.$[f(2x+3)]'=[(2x+3)^3]'=3(2x+3)^2(2x+3)'=6(2x+3)^2$.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** 根据基本初等函数的导数公式和四则运算法则以及复合函数求导的方法求导.

解:(1)$y'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x$.

(2)$y'=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)'=(\ln x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

(3)$y'=\left(\frac{\cos x}{e^x}\right)'=\frac{(\cos x)'e^x-\cos x(e^x)'}{(e^x)^2}=-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$.

(4)$\because y=x\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}x\sin(4x+\pi)=-\frac{1}{2}x\sin 4x$,$\therefore y'=-\frac{1}{2}\sin 4x-\frac{1}{2}x\cdot 4\cos 4x=-\frac{1}{2}\sin 4x-2x\cos 4x$.

变式题 1 **解:**$\because f(x)=x^4-3x$,$\therefore f'(x)=4x^3-3$,

$\therefore\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{-2\Delta x}=-2f'(1)=-2\times(4-3)=-2$.

变式题 2 **解:**(1)$y'=\cos x-x\sin x-\frac{1-\ln x}{x^2}$.

(2)$y'=(2x+2)e^{2-x}-(x^2+2x-1)e^{2-x}=(3-x^2)e^{2-x}$.

例 2 **[思路点拨]** (1)利用导数的几何意义求切线的斜率,从而求切线的方程.(2)分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况讨论,当 $x>0$ 时设切点为 $P(x_0,\ln x_0)$,求出函数的导函数,即可求出切线的斜率,再根据切线过坐标原点和点 P 列方程求出 x_0,即可求出切线方程,当 $x<0$ 时,由曲线的对称性可得切线方程.

1979Book

(1)B　(2)$y=\frac{x}{e}$　$y=-\frac{x}{e}$　**[解析]** (1)由 $f(x)=x^4-2x^3$,得 $f'(x)=4x^3-6x^2$,∴$f'(1)=4-6=-2$,又 $f(1)=1-2=-1$,∴函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y-(-1)=-2(x-1)$,即 $y=-2x+1$. 故选 B.

(2)当 $x>0$ 时,$y=\ln|x|=\ln x$. 设过坐标原点的直线与曲线 $y=\ln x$ 相切于点 $P(x_0,\ln x_0)$,由 $y=\ln x$,得 $y'=\frac{1}{x}$,所以 $\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0}{x_0}$,解得 $x_0=e$,所以 $P(e,1)$,则该切线的方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$,即 $y=\frac{x}{e}$. 由曲线 $y=\ln|x|$ 的对称性,知另一条切线的方程为 $y=-\frac{x}{e}$.

变式题　(1)B　(2)C　**[解析]** (1)$f(1)=0$,则切点为(1,0). $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$,所以 $f'(1)=\frac{3}{2}$,所以切线方程为 $y=\frac{3}{2}(x-1)$,即 $3x-2y-3=0$. 故选 B.

(2)由 $y=e^x-x$,得 $y'=e^x-1$,设切点为(m,e^m-m),则切线的斜率 $k=e^m-1$,则切线方程为 $y-e^m+m=(e^m-1)(x-m)$. 由切线过点$(e,-e)$,可得$-e-e^m+m=(e^m-1)(e-m)$,解得 $m=1+e$,故切线方程为 $y-e^{e+1}=(e^{e+1}-1)(x-e-1)-e-1$,整理得 $y=(e^{e+1}-1)x-e^{e+2}$. 故选 C.

例 3　**[思路点拨]** 根据导数的几何意义及切线过原点写出切线方程,由切线过切点列方程可得 x_0 的值.

1 或$-\frac{1}{2}$　**[解析]** 由题意,$f'(x)=3x^2-6x+a$,则切线的斜率 $k=3x_0^2-6x_0+a$,因为切线过原点,所以切线方程为 $y=(3x_0^2-6x_0+a)x$. 又切线经过切点$(x_0,f(x_0))$,所以 $x_0^3-3x_0^2+ax_0-1=(3x_0^2-6x_0+a)x_0$,整理可得 $2x_0^3-3x_0^2+1=0$,即 $2(x_0^3-x_0^2)-(x_0^2-1)=0$,则 $2x_0^2(x_0-1)=(x_0-1)(x_0+1)$,可得$(x_0-1)(2x_0^2-x_0-1)=0$,即$(x_0-1)^2(2x_0+1)=0$,故 $x_0=1$ 或$-\frac{1}{2}$.

变式题　B　**[解析]** 设 $f(x)=x+\frac{4}{x}(x<0)$,点 $P(x_0,y_0)$,则 $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}(x<0)$,由曲线在点 P 处的切线与直线 $x-3y+1=0$ 垂直可得 $f'(x_0)=-3$,即 $1-\frac{4}{x_0^2}=-3$,又 $x_0<0$,∴$x_0=-1$,故选 B.

例 4　**[思路点拨]** (1)设切点为(x_0,x_0-1),利用切点既在切线上又在曲线上求 x_0 和 a 的值. (2)设切点为$(x_0,y_0)(x_0\neq0)$,利用导数的几何意义,结合切线经过坐标原点得到关于 x_0 的方程,根据此方程应有两个相异的非零实数根,求得 a 的取值范围即可.

(1)−2　(2)$a<-4$ 或 $a>0$　**[解析]** (1)设切点为(x_0,x_0-1),因为 $y=e^{x+a}$,所以 $y'=e^{x+a}$,所以切线的斜率 $k=e^{x_0+a}=1$,即 $x_0+a=0$,又切点(x_0,x_0-1)在曲线 $y=e^{x+a}$ 上,所以 $x_0-1=e^{x_0+a}=1$,则 $x_0=2$,$a=-2$.

(2)设切点为$(x_0,y_0)(x_0\neq0)$,则 $y_0=(x_0+a)e^{x_0}$,由 $y'=(x+a+1)e^x$,知$(x_0+a+1)e^{x_0}=\frac{(x_0+a)e^{x_0}}{x_0}$,所以关于 x 的方程$(x+a+1)e^x=\frac{(x+a)e^x}{x}$有两个相异的非零实数根,即关于 x 的方程 $x+a+1=\frac{x+a}{x}$有两个相异的非零实数根,即关于 x 的方程 $x^2+ax-a=0$ 有两个相异的非零实数根,所以 $\Delta=a^2+4a>0$ 且 $a\neq0$,解得 $a<-4$ 或 $a>0$.

变式题　(1)A　(2)−1 或 3　**[解析]** (1)因为 $y=x\ln x$,所以 $y'=\ln x+1$,设曲线 $y=x\ln x$ 与直线 $y=-2x+b$ 相切于点(x_0,y_0),则由导数的几何意义可得 $\ln x_0+1=-2$,解得 $x_0=e^{-3}$,则 $y_0=x_0\ln x_0=-3e^{-3}$. 又因为点(x_0,y_0)在直线 $y=-2x+b$ 上,所以$-3e^{-3}=-2e^{-3}+b$,则 $b=-e^{-3}$,故选 A.

(2)对于函数 $y=e^x-ax$,$y'=e^x-a$,所以 $y'|_{x=0}=e^0-a=1-a$,所以切线方程为 $y=(1-a)x+1$. 由$\begin{cases}y=(1-a)x+1,\\y=-x^2\end{cases}$消去 y 整理得 $x^2+(1-a)x+1=0$,又直线 $y=(1-a)x+1$ 与曲线 $y=-x^2$ 只有一个交点,所以关于 x 的方程 $x^2+(1-a)x+1=0$ 有两个相等的实数根,即 $\Delta=(1-a)^2-4=0$,解得 $a=-1$ 或 $a=3$.

例 5　**[思路点拨]** (1)设出切点坐标,求解切线方程,利用两函数图象的切线方程相同,转化求解即可. (2)先利用导数结合切点分别求出两曲线的切线方程,然后根据为公切线,找到两切点坐标之间的关系,从而构造出关于一个切点横坐标的函数,转化为值域问题求解.

(1)e−1　(2)$(-\ln 2-1,+\infty)$　**[解析]** (1)因为函数 $f(x)=e^x-1$,所以 $f'(x)=e^x$,设点(t,e^t-1)是 $f(x)$的图象与公切线的切点,则公切线的方程为 $y-e^t+1=e^t(x-t)$,即 $y=e^tx+(1-t)e^t-1$. 因为函数 $g(x)=1+\ln x$,所以 $g'(x)=\frac{1}{x}$,令 $g'(x)=\frac{1}{x}=e^t$,解得 $x=e^{-t}$,可得 $g(e^{-t})=1-t$,可知 $g(x)$的图象与公切线的切点坐标为$(e^{-t},1-t)$,则公切线的方程为 $y-(1-t)=e^t(x-e^{-t})$,即 $y=e^tx-t$,所以$(1-t)e^t-1=-t$,整理得$(t-1)(e^t-1)=0$,解得 $t=0$ 或 $t=1$. 当 $t=0$ 时,公切线的方程为 $y=x$,此时 $b=0$,不符合题意,舍去;当 $t=1$ 时,公切线的方程为 $y=ex-1$,故 $k=e$,$b=-1$. 综上所述,$k+b=e-1$.

(2)设 $f(x)=\ln x$,$g(x)=x^2+2x+a(x<0)$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}$,$g'(x)=2x+2(x<0)$. 设公切线与曲线 $y=x^2+2x+a(x<0)$相切的切点为(s,t),$s<0$,与曲线 $y=\ln x$ 相切的切点为(m,n),$m>0$,则 $2s+2=\frac{1}{m}=\frac{n-t}{m-s}$,又 $t=s^2+2s+a$,$n=\ln m$,∴$a=s^2-1-\ln(2s+2)$. 设 $h(s)=s^2-1-\ln(2s+2)(-1<s<0)$,则 $h'(s)=\frac{2s^2+2s-1}{s+1}<0$,∴$h(s)$在$(-1,0)$上单调递减,∴$h(s)>-\ln 2-1$,∴$a>-\ln 2-1$,即 a 的取值范围为$(-\ln 2-1,+\infty)$.

变式题　(1)B　(2)$[-1,+\infty)$　**[解析]** (1)设直线 l 与曲线 $y=\ln(x+a)$的切点为 $P(x_0,y_0)$,由 $y'=[\ln(x+a)]'=\frac{1}{x+a}$,得$\frac{1}{x_0+a}=1$,则 $x_0=1-a$,$y_0=0$,即切点为 $P(1-a,0)$,所以直线 l 的方程为 $y=x-1+a$. 又直线 l 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 相切,所以 $\frac{|-1+a|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $a=2$ 或 $a=0$. 故选 B.

(2)$f'(x)=3x^2-1$,则曲线 $y=f(x)$在点$(x_1,f(x_1))$处的切线方程为 $y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$,整理得 $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$,设该切线与曲线 $y=g(x)$相切于点$(x_2,g(x_2))$,因为 $g'(x)=2x$,所以 $g'(x_2)=2x_2$,则切线方程为 $y-(x_2^2+a)=2x_2(x-x_2)$,整理得 $y=2x_2x-x_2^2+a$,则$\begin{cases}3x_1^2-1=2x_2,\\-2x_1^3=-x_2^2+a,\end{cases}$可得 $a=x_2^2-2x_1^3=\left(\frac{3x_1^2}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-2x_1^3=\frac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{4}$. 令 $h(x)=\frac{9}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$,则 $h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$,令 $h'(x)>0$,解得$-\frac{1}{3}<x<0$ 或 $x>1$,令 $h'(x)<0$,得 $x<-\frac{1}{3}$或 $0<x<1$,又 $h\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}$,$h(1)=-1$,所以 $h(x)$的值域为$[-1,+\infty)$,故 a 的取值范围为$[-1,+\infty)$.

第 16 讲　导数与函数的单调性

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

递增　递减　$\geqslant0$　$\leqslant0$　充分

【对点演练】

1. $(0,+\infty)$　**[解析]** 由 $f'(x)=e^x-1>0$,解得 $x>0$,故 $f(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$.
2. $>$　$>$　**[解析]** 设 $f(x)=e^x-1-x$,$x\neq0$,则 $f'(x)=e^x-1$,由 $f'(x)>0$,得 $x>0$,由 $f'(x)<0$,得 $x<0$,则 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,故 $f(x)>e^0-1-0=0$,故 $e^x>1+x$,$x\neq0$. 设 $g(x)=x-\ln x$,$x\in(1,$

$+\infty)$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>1-\ln 1=1$，所以 $x>\ln x$，$x\in(1,+\infty)$.

3. $(-\infty,2]$ **【解析】** 因为当 $x\leqslant 2$ 时，$e^{f'(x)}\leqslant 1$，所以当 $x\leqslant 2$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,2]$.

4. $(0,2]$ **【解析】** 方法一：由 $y'=1-\frac{a^2}{x^2}\geqslant 0$，得 $x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$，∴函数 $y=x+\frac{a^2}{x}(a>0)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-a]$，$[a,+\infty)$. ∵函数在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，∴$[2,+\infty)\subseteq[a,+\infty)$，∴$a\leqslant 2$，又 $a>0$，∴$0<a\leqslant 2$.

方法二：$y'=1-\frac{a^2}{x^2}$，依题意知 $1-\frac{a^2}{x^2}\geqslant 0$ 对任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立，即 $a^2\leqslant x^2$ 对任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立，∵$x\in[2,+\infty)$，∴$x^2\geqslant 4$，∴$a^2\leqslant 4$，又 $a>0$，∴$0<a\leqslant 2$.

5. $(-\infty,1)$ **【解析】** 由 $2-x>0$，得 $x<2$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,2)$. 易知 $f'(x)=1-\frac{1}{2-x}$，令 $f'(x)>0$，可得 $\frac{1}{2-x}<1$，结合 $2-x>0$，得 $2-x>1$，解得 $x<1$，所以函数 $f(x)=x+\ln(2-x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1)$.

6. $a>0$，$a=0$，$a<0$ **【解析】** 因为 $y'=3ax^2-1$，所以对 a 应分 $a>0$，$a=0$，$a<0$ 三种情况讨论.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】** (1)首先根据题意求出 $f'(x)$，再根据 $f'(x)<0$ 求得 $f(x)$ 的单调递减区间. (2)求导后结合三角函数知识可得结果. (3)求出函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=\frac{e^x-(x+1)}{(x+1)e^x}$，令 $m(x)=e^x-(x+1)(x>-1)$，利用 $m(x)$ 的单调性得到 $f'(x)\geqslant 0$，即得 $f(x)$ 的单调递增区间.

解：(1) 由题可知，$f(x)=2x+\frac{1}{x}-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x^2}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x^2}$，令 $f'(x)<0$，得 $x\in(0,1)$，故函数 $f(x)=2x+\frac{1}{x}-\ln x$ 的单调递减区间为 $(0,1)$.

(2)由题知 $f'(x)=(x-1)\sin x$，因为当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$\sin x<0$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x>0$，所以当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 和 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$，单调递减区间为 $(0,1)$.

(3)由题意，函数 $f(x)=\ln(x+1)+e^{-x}$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{e^x-(x+1)}{(x+1)e^x}$. 易知 $(x+1)e^x>0$，令 $m(x)=e^x-(x+1)(x>-1)$，则 $m'(x)=e^x-1$，由 $m'(x)=0$，得 $x=0$，可得当 $x\in(-1,0)$ 时，$m'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$m'(x)>0$，所以 $m(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $m(x)\geqslant m(0)=e^0-1=0$，即 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,+\infty)$.

变式题 (1)D (2)$(\ln 5,+\infty)$ **【解析】** (1)∵$f(x)=2\ln x-x(x>0)$，∴$f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$，由 $f'(x)<0$ 得 $x>2$，∴$f(x)=2\ln x-x$ 的单调递减区间为 $(2,+\infty)$，故选 D.

(2)因为 $y=e^x-5x$，所以 $y'=(e^x-5x)'=e^x-5$，令 $y'=e^x-5>0$，解得 $x>\ln 5$，所以 $y=e^x-5x$ 的单调递增区间为 $(\ln 5,+\infty)$.

(3)**解：**$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g'(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)+e^x(-\sin x-\cos x+2)=2e^x(x-\sin x)$.

令 $p(x)=x-\sin x$，则 $p'(x)=1-\cos x$，

因为 $\cos x\in[-1,1]$，所以 $p'(x)=1-\cos x\geqslant 0$ 恒成立，

所以函数 $p(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

又 $p(0)=0$，所以当 $x<0$ 时，$p(x)<0$，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减，

当 $x>0$ 时，$p(x)>0$，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增.

综上，函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

例 2 **【思路点拨】** (1)求导得 $f'(x)=\frac{(2x-a)(x-1)}{x}$，对 $\frac{a}{2}$ 和 1 的大小关系进行分类讨论，分析导数的符号变化，由此可得出函数 $f(x)$ 的单调递增区间和单调递减区间. (2)求 $h(x)$ 的定义域，再求导，分 $0<a<1$，$a=1$ 和 $a>1$ 三种情况讨论函数 $h(x)$ 的单调性.

解：(1)因为 $f(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x(a>0)$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)=\frac{2x^2-(a+2)x+a}{x}=\frac{(2x-a)(x-1)}{x}$.

因为 $a>0$，所以由 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{a}{2}$ 或 $x=1$.

①当 $\frac{a}{2}=1$，即 $a=2$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x>0$ 恒成立，且 $f'(x)$ 不恒为零，此时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

②当 $\frac{a}{2}>1$，即 $a>2$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<1$ 或 $x>\frac{a}{2}$，由 $f'(x)<0$ 得 $1<x<\frac{a}{2}$，此时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(1,\frac{a}{2}\right)$；

③当 $\frac{a}{2}<1$，即 $0<a<2$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\frac{a}{2}$ 或 $x>1$，由 $f'(x)<0$ 得 $\frac{a}{2}<x<1$，此时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(\frac{a}{2},1\right)$.

综上所述，当 $a=2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(1,\frac{a}{2}\right)$；

当 $0<a<2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(\frac{a}{2},1\right)$.

(2)$h(x)=g(x)-af(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)-a(x^2+2\cos x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$h'(x)=2e^x(x-\sin x)-a(2x-2\sin x)=2(x-\sin x)(e^x-a)$，

当 $a>0$ 时，令 $h'(x)=2(x-\sin x)(e^x-a)=0$，解得 $x_1=\ln a$，$x_2=0$.

①若 $0<a<1$，则 $\ln a<0$，∴当 $x<\ln a$ 时，$e^x-a<0$，$x-\sin x<0$，则 $h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，当 $x>0$ 时，$e^x-a>0$，$x-\sin x>0$，则 $h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，当 $\ln a<x<0$ 时，$e^x-a>0$，$x-\sin x<0$，则 $h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减.

②若 $a=1$，则 $\ln a=0$，当 $x\geqslant 0$ 时，$e^x-1\geqslant 0$，$x-\sin x\geqslant 0$，

当 $x<0$ 时，$e^x-1<0$，$x-\sin x<0$，

∴当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，函数 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

③若 $a>1$，则 $\ln a>0$，∴当 $x<0$ 时，$e^x-a<0$，$x-\sin x<0$，则 $h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，当 $x>\ln a$ 时，$e^x-a>0$，$x-\sin x>0$，则 $h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，当 $0<x<\ln a$ 时，$e^x-a<0$，$x-\sin x>0$，则 $h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减.

综上所述，当 $0<a<1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln a,0)$ 上单调递减；

当 $a=1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a>1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\ln a)$ 上单调递减.

变式题 **解：**(1)$f(x)=a(\ln x+a)-x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}-1$.

当 $a<0$ 时，因为 $x>0$，所以 $f'(x)<0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f'(x)=-\frac{x-a}{x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=a$，

则当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，
当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减.
综上所述，当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减.
(2) $f'(x)=2e^{2x}+(2-2a)e^{x}-2a=2(e^{x}+1)(e^{x}-a)$.
①当 $a\leqslant 0$ 时，因为 $e^{x}>0$，所以 $f'(x)>0$ 在 **R** 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增；
②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln a$，由 $f'(x)>0$，得 $x\in(\ln a,+\infty)$，则 $f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，
由 $f'(x)<0$，得 $x\in(-\infty,\ln a)$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减.
综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 **R** 上单调递增，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

例 3 **[思路点拨]** (1)求导，分析可得 $x^{2}-2x\geqslant -2a$ 对任意 $x\in(1,2)$ 恒成立，根据恒成立问题结合二次函数的性质分析求解；(2)分析可得存在 $x\in(1,2)$，使得 $x^{2}-2x<-2a$ 成立，根据存在性问题结合二次函数的性质分析求解；(3)分析可得存在 $x\in(1,2)$，使得 $x^{2}-2x=-2a$ 成立，根据零点问题结合二次函数的性质分析求解.

解：(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^{2}+2a\ln x-2x$，则 $f'(x)=x+\frac{2a}{x}-2$，
函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，等价于对任意 $x\in(1,2)$，$f'(x)=x+\frac{2a}{x}-2\geqslant 0$ 恒成立，可得 $x^{2}-2x\geqslant -2a$ 对任意 $x\in(1,2)$ 恒成立.
设 $g(x)=x^{2}-2x$，可知 $g(x)$ 的图象开口向上，对称轴方程为 $x=1$，
$\because g(1)=-1$，$\therefore -1\geqslant -2a$，解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$，
故 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)由(1)可得 $f'(x)=x+\frac{2a}{x}-2$，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上存在单调递减区间，等价于存在 $x\in(1,2)$，使得 $f'(x)=x+\frac{2a}{x}-2<0$ 成立，可得存在 $x\in(1,2)$，使得 $x^{2}-2x<-2a$ 成立.
由(1)知 $g(x)=x^{2}-2x$ 的图象开口向上，对称轴方程为 $x=1$，$\because g(1)=-1$，$\therefore -1<-2a$，解得 $a<\frac{1}{2}$，
则 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

(3)由(1)可得 $f'(x)=x+\frac{2a}{x}-2$，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上不单调，等价于存在 $x\in(1,2)$，使得 $f'(x)=x+\frac{2a}{x}-2=0$，可得存在 $x\in(1,2)$，使得 $x^{2}-2x=-2a$ 成立.
由(1)知 $g(x)=x^{2}-2x$ 的图象开口向上，对称轴方程为 $x=1$，$\because g(1)=-1$，$g(2)=0$，
$\therefore -1<-2a<0$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$，
则 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

变式题 (1)C (2)$1<m\leqslant 2$ 或 $m\geqslant 4$ **[解析]** (1)由题可知 $f'(x)=ae^{x}-\frac{1}{x}\geqslant 0$ 在区间 $(1,2)$ 上恒成立，即 $a\geqslant\frac{1}{xe^{x}}$ 对任意 $x\in(1,2)$ 恒成立. 令 $h(x)=xe^{x}$ $(x\in(1,2))$，可得 $h'(x)=e^{x}+xe^{x}=(1+x)e^{x}>0$，所以 $h(x)=xe^{x}$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，所以 $h(x)>h(1)=e$，故 $\frac{1}{xe^{x}}<\frac{1}{e}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{e}$，所以 a 的最小值为 e^{-1}. 故选 C.

(2) $f'(x)=x-\frac{9}{x}=\frac{x^{2}-9}{x}(x>0)$，令 $f'(x)>0$，得 $x>3$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<3$，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(3,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,3)$. 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[m-1,m+1]$ 上单调，所以 $\begin{cases}m-1>0,\\ m+1\leqslant 3\end{cases}$ 或 $m-1\geqslant 3$，解得 $1<m\leqslant 2$ 或 $m\geqslant 4$.

例 4 **[思路点拨]** (1)由函数的单调性与奇偶性将原不等式转化为常规不等式后再求解. (2)构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x^{2}}$，利用导数判断其单调性，再结合对应的函数值，可得答案.
(1)BCD (2)C **[解析]** (1)由题意得 $f(x)$ 的定义域为 **R**，且 $f(-x)=e^{-x}+e^{x}+\frac{1}{2}x^{2}=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数. $f'(x)=e^{x}-e^{-x}+x$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. 由 $f(\sqrt{3}a)<f(a+2)$，得 $|\sqrt{3}a|<|a+2|$，得 $3a^{2}<a^{2}+4a+4$，即 $a^{2}-2a-2<0$，解得 $1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{3}$，故选 BCD.

(2) 设 $f(x)=\frac{\ln x}{x^{2}}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^{2}-\ln x\cdot 2x}{x^{4}}=\frac{1-2\ln x}{x^{3}}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$，当 $x\in(0,\sqrt{e})$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(\sqrt{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减. 因为 $a=\frac{\ln 2}{4}=\frac{\ln 2}{2^{2}}=f(2)$，$b=\frac{1}{e^{2}}=\frac{\ln e}{e^{2}}=f(e)$，$c=\frac{\ln 6}{12}=\frac{\ln 6}{2\times 6}=\frac{\ln 6^{\frac{1}{2}}}{6}=\frac{\ln\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^{2}}=f(\sqrt{6})$，且 $\sqrt{e}<2<\sqrt{6}<e$，所以 $a>c>b$. 故选 C.

变式题 (1)B (2)CD **[解析]** (1)因为 $f'(x)=e^{x}+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^{x}\cdot e^{-x}}-2=0$，当且仅当 $e^{x}=e^{-x}$，即 $x=0$ 时，等号成立，所以 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，而且 $f(0)=2$. 由 $f(2x+4)\geqslant 2$，得 $f(2x+4)\geqslant f(0)$，则 $2x+4\geqslant 0$，解得 $x\geqslant -2$. 故选 B.

(2)由 $\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}>\sin\beta-\cos\alpha$，得 $\beta-\sin\beta>\frac{\pi}{2}-\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，令 $f(x)=x-\sin x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f'(x)=1-\cos x>0$，$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增. $\because\alpha,\beta$ 均为锐角，$f(\beta)>f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，$\therefore\beta>\frac{\pi}{2}-\alpha$，$\therefore\cos\beta<\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，$\sin\beta>\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，即 $\cos\beta<\sin\alpha$，$\sin\beta>\cos\alpha$. 故选 CD.

例 5 **[思路点拨]** (1)设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，结合已知条件得到 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，从而比较 a,b,c 的大小. (2)构造函数 $g(x)=f(x)e^{3x}$，结合已知条件可得 $g(x)=f(x)e^{3x}$ 在 **R** 上单调递减，不等式 $f(x)e^{3x}>8$ 可转化为 $g(x)>g(\ln 2)$，根据 $g(x)$ 的单调性可得答案.
(1)A (2)B **[解析]** (1) $f(x)$ 满足 $f(x)-xf'(x)>0$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^{2}}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(4)<g(2)<g(1)$，即 $f(1)>\frac{f(2)}{2}>\frac{f(4)}{4}$，所以 $a>b>c$. 故选 A.

(2)令 $g(x)=f(x)e^{3x}$，$x\in$ **R**，$\because 3f(x)+f'(x)<0$，$\therefore g'(x)=f'(x)e^{3x}+3f(x)e^{3x}=e^{3x}[3f(x)+f'(x)]<0$，$\therefore g(x)=f(x)e^{3x}$ 在 **R** 上单调递减. 又 $f(\ln 2)=1$，$\therefore g(\ln 2)=f(\ln 2)e^{3\ln 2}=8$，$\therefore$ 不等式 $f(x)e^{3x}>8$ 即为 $g(x)>g(\ln 2)$，$\therefore x<\ln 2$，故选 B.

变式题 (1)C (2)$(-1,1)$ **[解析]** (1)依题意，$f'(x)<f(x)$，则 $f'(x)-f(x)<0$，设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{x}}$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^{x}}<0$，所以 $g(x)$ 在 **R** 上单调递减，所以 $g(2)>g(3)$，即 $\frac{f(2)}{e^{2}}>\frac{f(3)}{e^{3}}$，则 $ef(2)>f(3)$. 故选 C.

(2)构造函数 $F(x)=xf(x)-2x$，因为 $F'(x)=xf'(x)+f(x)-2>0$，所以 $F(x)$ 在 **R** 上单调递增. 因为 $f(1)=3$，所以 $F(1)=f(1)-2=3-2=1$，则 $x^{2}[f(x^{2})-2]<1$ 可化为 $x^{2}f(x^{2})-2x^{2}<1$，即 $F(x^{2})<F(1)$，又 $F(x)$ 在 **R** 上单调递增，所以 $x^{2}<1$，解得 $-1<x<1$，故不等式的解集为 $(-1,1)$.

13793389106

第 17 讲　导数与函数的极值、最值

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)小于　极大值点　极大值　(2)大于　极小值点　极小值
2. (2)①极值　②区间端点的函数值

【对点演练】

1. -3　**【解析】** $f'(x)=3x^2-6x$，令 $f'(x)=3x^2-6x=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值 $f(2)=8-12+1=-3$.

2. $\mathrm{e}-1$　**【解析】** $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，令 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1=0$，得 $x=0$. 当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$. 故函数 $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,1]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值是 $\max\{f(-1),f(1)\}=\max\left\{\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1,\mathrm{e}-1\right\}=\mathrm{e}-1$.

3. $\dfrac{100\pi}{\pi+4}$　**【解析】** 设弯成圆的铁丝的长为 x cm，则弯成正方形的铁丝的长为 $(100-x)$ cm，记正方形与圆的面积之和为 S cm^2，则 $S=\pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\dfrac{100-x}{4}\right)^2$ $(0<x<100)$，$\therefore S'=\dfrac{x}{2\pi}-\dfrac{1}{8}(100-x)$. 令 $S'=0$，得 $x=\dfrac{100\pi}{\pi+4}$，当 $0<x<\dfrac{100\pi}{\pi+4}$ 时，$S'<0$，S 单调递减，当 $\dfrac{100\pi}{\pi+4}<x<100$ 时，$S'>0$，S 单调递增，故当 $x=\dfrac{100\pi}{\pi+4}$ 时 S 取得最小值，即当弯成圆的铁丝的长为 $\dfrac{100\pi}{\pi+4}$ cm 时，正方形与圆的面积之和最小.

4. $x=1$　不存在　**【解析】** 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点. 因为 $g'(x)=3(x-1)^2\geqslant0$，即 $g'(x)$ 无变号零点，所以函数 $g(x)=(x-1)^3$ 不存在极值点.

5. $1,4$　不存在　**【解析】** 易知 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，故 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值为 $g(1)=1$，最大值为 $g(2)=4$. 根据最值的定义，可得 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上的最小值和最大值均不存在.

6. $[1,+\infty)$　$[-1,+\infty)$　**【解析】** 对任意实数 x，不等式 $\sin x\leqslant a$ 恒成立，则 $(\sin x)_{\max}\leqslant a$，即 $a\geqslant1$. 存在实数 x，使不等式 $\sin x\leqslant a$ 成立，则 $(\sin x)_{\min}\leqslant a$，即 $a\geqslant-1$.

● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】** 由 $y=xf'(x)$ 的图象可以得出 $f'(x)$ 在各区间上的正负情况，从而可得 $f(x)$ 在各区间上的单调性，进而可得极值.

D　**【解析】** 当 $x\in(-\infty,-3)$ 时，$y=xf'(x)>0$，$\therefore f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；同理可得，当 $x\in(-3,3)$ 时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. $\therefore f(x)$ 的极大值是 $f(3)$，极小值是 $f(-3)$. 故选 D.

例 2　**【思路点拨】** (2)根据函数极值点的定义，结合一元二次方程根的判别式分类讨论进行求解即可.

解：(1)① $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2x+a$，则 $f'(2)=\dfrac{9}{2}+a$，又直线 $2x+3y=0$ 的斜率为 $-\dfrac{2}{3}$，$\therefore\left(\dfrac{9}{2}+a\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-1$，$\therefore a=-3$.

②由(1)知 $f(x)=\ln x+x^2-3x+2$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-3=\dfrac{2x^2-3x+1}{x}=\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$ 或 1，当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)_{\text{极大值}}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln2+\dfrac{3}{4}$，$f(x)_{\text{极小值}}=f(1)=0$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$；$f(x)$ 的极大值为 $-\ln2+\dfrac{3}{4}$，极小值为 0.

(2) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+a}{x}$，$x>0$，令 $g(x)=x^2-2x+a$，关于 x 的方程 $x^2-2x+a=0$ 的判别式 $\Delta=4-4a$.

①当 $\Delta\leqslant0$，即 $a\geqslant1$ 时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 无极值点.

②当 $\Delta>0$，即 $a<1$ 时，函数 $g(x)$ 有两个零点 $x_1=1-\sqrt{1-a}$，$x_2=1+\sqrt{1-a}$.

(i)当 $a\leqslant0$ 时，$x_1\leqslant0$，$x_2>1$，当 $x\in(0,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 有一个极值点；

(ii)当 $0<a<1$ 时，$0<x_1<1$，$x_2>1$，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 有两个极值点.

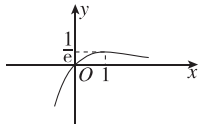
综上，当 $a\geqslant1$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有两个极值点；当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 有一个极值点.

例 3　**【思路点拨】** (1)由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值 10 得 $\begin{cases}f'(1)=0,\\f(1)=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=-11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3,\\b=3,\end{cases}$ 进行检验即可求解.

(2)将函数 $f(x)$ 有两个极值点转化为 $f'(x)=0$ 有两个不同的实数根，令 $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$，则问题等价于函数 $y=g(x)$ 与 $y=-2a$ 的图象有两个不同的交点，数形结合求得 a 的取值范围即可.

(1)-7　(2)$\left(-\dfrac{1}{2\mathrm{e}},0\right)$　**【解析】** (1)由函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$，可得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值 10，所以 $\begin{cases}f'(1)=3+2a+b=0,\\f(1)=1+a+b+a^2=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=-11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3,\\b=3.\end{cases}$ 经检验知，当 $a=-3$，$b=3$ 时，$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geqslant0$，此时函数 $f(x)$ 为增函数，$f(x)$ 无极值点，不符合题意，舍去；当 $a=4$，$b=-11$ 时，$f'(x)=3x^2+8x-11=(3x+11)(x-1)$，当 $x<-\dfrac{11}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $-\dfrac{11}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值，符合题意. 所以 $a+b=-7$.

(2)函数 $f(x)=2ax-\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$，则 $f'(x)=2a+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$，因为函数 $f(x)$ 有两个极值点，所以 $f'(x)=0$ 有两个不同的实数根，即关于 x 的方程 $-2a=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ 有两个不同的实数根. 令 $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$，则函数 $y=g(x)$ 与 $y=-2a$ 的图象有两个不同的交点. 因为 $g'(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，所以当 $x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $g(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 作出函数 $g(x)$ 的图象如图所示，由图可知，$0<-2a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，解得 $-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}<a<0$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{2\mathrm{e}},0\right)$.



【应用演练】

1. C　**【解析】** 由题图得，$f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增，在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore f(x)$ 有一个极大值，没有极小值，故选 C.

2. BCD　**【解析】** 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}-\dfrac{2c}{x^3}=\dfrac{ax^2-bx-2c}{x^3}$，由函数 $f(x)$ 既有极大值也有极小值，得方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等实根. 令 $h(x)=ax^2-bx-2c$，则 $h(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等实根，故 $\begin{cases}\Delta=(-b)^2-4a(-2c)=b^2+8ac>0,\\\dfrac{b}{a}>0,\\-\dfrac{2c}{a}>0,\end{cases}$ 所以 $ab>0$，

$ac<0$，$bc<0$，故选 BCD.

3. $-e$ **【解析】** 由 $f(x)=(x^2+ax-1)e^x$，得 $f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax-1)e^x$，因为 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^x$ 的极值点，所以 $f'(-2)=(-4+a)e^{-2}+(4-2a-1)e^{-2}=0$，即 $-4+a+(3-2a)=0$，解得 $a=-1$. 可得 $f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x-1)e^x=(x^2+x-2)e^x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-2$ 或 $x=1$，当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $-2<x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，所以当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(1)=(1^2-1-1)e^1=-e$.

4. $\left(-\frac{1}{e},0\right)$ **【解析】** 由题意得 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{m}{x^2}=\frac{x+m}{x^2}$，$x>0$，当 $m\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 没有极值，不符合题意，故 $m<0$. 当 $x>-m$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $0<x<-m$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，故当 $x=-m$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值，所以 $f(-m)=\ln(-m)+1<0$，解得 $m>-\frac{1}{e}$，所以 $-\frac{1}{e}<m<0$. 故实数 m 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{e},0\right)$.

例 4 **【思路点拨】** (1)求导后，分 $a\leqslant 1$，$1<a<e$，$a\geqslant e$ 讨论求得最小值，从而可求得 a 的值；(2)分 $a\leqslant 1$，$1<a\leqslant\frac{e}{e-1}$，$\frac{e}{e-1}<a<e$，$a\geqslant e$ 讨论求得 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最大值.

解：(1)$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$，$x>0$. 若 $a\leqslant 1$，则 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,e]$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最小值为 $f(1)=a=\frac{3}{2}$，不满足题意；

若 $1<a<e$，则当 $x\in[1,e]$ 时，令 $f'(x)<0$，解得 $1\leqslant x<a$，令 $f'(x)>0$，解得 $a<x\leqslant e$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[1,a)$ 上单调递减，在 $(a,e]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最小值为 $f(a)=\ln a+1=\frac{3}{2}$，解得 $a=\sqrt{e}$，满足题意；若 $a\geqslant e$，则 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,e]$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最小值为 $f(e)=1+\frac{a}{e}=\frac{3}{2}$，解得 $a=\frac{e}{2}$，不满足题意.

综上所述，$a=\sqrt{e}$.

(2)由(1)可知若 $a\leqslant 1$，则 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最大值为 $f(e)=1+\frac{a}{e}$；若 $1<a<e$，则 $f(x)$ 在 $[1,a)$ 上单调递减，在 $(a,e]$ 上单调递增，当 $1+\frac{a}{e}\geqslant a$，即 $1<a\leqslant\frac{e}{e-1}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最大值为 $f(e)=1+\frac{a}{e}$，当 $1+\frac{a}{e}<a$，即 $\frac{e}{e-1}<a<e$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最大值为 $f(1)=a$；若 $a\geqslant e$，则 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最大值为 $f(1)=a$.

综上，当 $a\leqslant\frac{e}{e-1}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最大值为 $f(e)=1+\frac{a}{e}$；当 $a>\frac{e}{e-1}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最大值为 $f(1)=a$.

变式题 (1)0　$\frac{1}{4}-\ln 2$　(2)$\left[-2,\frac{3}{2}\right)$ **【解析】** (1)∵函数 $f(x)=x^2+\ln(x+1)$，∴ $f'(x)=2x+\frac{1}{x+1}=\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{x+1}$，当 $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ 时，$f'(x)>0$，∴ $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ 上单调递增，∴ $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ 上的最小值为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\ln 2$，最大值为 $f(0)=0$.

(2)由题意得 $f'(x)=\frac{1}{4}x^2-1$，令 $f'(x)<0$，得 $-2<x<2$，令 $f'(x)>0$，得 $x<-2$ 或 $x>2$，所以 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上单调递减，在 $(-\infty,-2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2)=\frac{7}{3}$. 令 $f(x)=\frac{7}{3}$，得 $(x+2)^2(x-4)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=4$，所以 $f(4)=\frac{7}{3}$，所以要使 $f(x)=\frac{1}{12}x^3-x+1$ 在 $(2a-5,a^2)$ 上存在最大值，则有 $\begin{cases}2a-5<-2,\\2a-5<a^2,\\a^2\leqslant 4,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant a<\frac{3}{2}$.

例 5 **【思路点拨】** (1)根据题意得利润为 $g(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{9}{16}ax^2-1$，根据 $g(2)=2.5$ 得 $a=2$，再利用导数研究其单调性即可得答案. (2)将无盖圆柱的表面积表示成关于圆柱底面半径的函数，利用导数求函数的最值，从而可得结果.

(1)A　(2)3 **【解析】** (1)设利润为 $g(x)$ 万元，则 $g(x)=f(x)-1-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{8}x^3+\frac{9}{16}ax^2+\frac{1}{2}x-1-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{8}x^3+\frac{9}{16}ax^2-1$，$0<x\leqslant 8$，由题意得 $g(2)=-\frac{1}{8}\times 2^3+\frac{9}{16}a\times 2^2-1=2.5$，解得 $a=2$，∴ $g(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{9}{8}x^2-1$，∴ $g'(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{4}x=-\frac{3}{8}x(x-6)$. 易知函数 $g(x)$ 在 $(0,6)$ 上单调递增，在 $(6,8]$ 上单调递减，∴ 当 $x=6$ 时，函数 $g(x)$ 取得极大值，也是最大值，故选 A.

(2)设圆柱的高为 h，底面半径为 r，则由圆柱的体积公式可得 $\pi r^2h=27\pi$，即 $h=\frac{27}{r^2}$，则无盖圆柱的表面积 $f(r)=\pi r^2+2\pi rh=\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{27}{r^2}$. 易知 $f'(r)=2\pi r-\frac{54\pi}{r^2}=\frac{2\pi(r^3-27)}{r^2}$，令 $f'(r)>0$，可得 $r>3$，令 $f'(r)<0$，可得 $0<r<3$，∴ $f(r)$ 在 $(0,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，则当 $r=3$ 时，$f(r)$ 取得最小值，即用料最省.

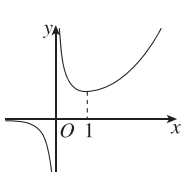
变式题 (1)D　(2)19 **【解析】** (1)设每瓶饮料的利润为 $f(r)$ 分，则 $f(r)=0.2\times\frac{4\pi r^3}{3}-0.8\pi r^2=\frac{4\pi r^3-12\pi r^2}{15}$ $(0<r\leqslant 6)$，所以 $f'(r)=\frac{4\pi r^2-8\pi r}{5}=\frac{4\pi r(r-2)}{5}$. 令 $f'(r)=0$，得 $r=2$，当 $0<r<2$ 时，$f'(r)<0$，$f(r)$ 单调递减，当 $2<r\leqslant 6$ 时，$f'(r)>0$，$f(r)$ 单调递增，所以 $r=2$ 是 $f(r)$ 的极小值点，当 $r\to 0$ 时，$f(r)\to 0$，$f(6)=\frac{144\pi}{5}$，于是当 $r=6$ 时，$f(r)$ 取得最大值. 故选 D.

(2)设收益为 y 元，则 $y=\frac{40\,000x}{x+1}-100x(x\geqslant 2)$，所以 $y'=\frac{-100(x-19)(x+21)}{(x+1)^2}$. 令 $y'>0$，得 $2\leqslant x<19$；令 $y'<0$，得 $x>19$. 故函数 $y=\frac{40\,000x}{x+1}-100x(x\geqslant 2)$ 在 $[2,19)$ 上单调递增，在 $(19,+\infty)$ 上单调递减. 故当收集的数据量为 19 万条时，该软件能获得最高收益.

思维拓展(二)　解决极值、零点有关的参数问题

【针对训练】

1. D **【解析】** 依题意得 $f'(x)=2e^x-6ax$ 有两个不同的变号零点，易知 0 不是 $f'(x)$ 的零点，则关于 x 的方程 $a=\frac{e^x}{3x}$ $(x\neq 0)$ 有两个不同的实数根，令 $g(x)=\frac{e^x}{3x}$，则 $y=a$ 的图象与 $g(x)=\frac{e^x}{3x}$ 的图象有两个不同的交点. $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{3x^2}$，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，作出 $g(x)=\frac{e^x}{3x}$ 的图象如图，因为 $g(1)=\frac{e}{3}$，所以

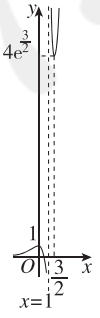


若函数 $f(x)=2e^x-3ax^2+1$ 有两个不同的极值点，则 $a>\frac{e}{3}$. 故选 D.

2. $[-2,-1)$ **【解析】** 因为 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2+(a-1)x$，$x>0$，所以 $f'(x)=\frac{x^2+(a-1)x+1}{x}$. 因为 x_1,x_2 是函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2+(a-1)x$ 的两个极值点，所以 $f'(x)=0$ 有两个不同的正根 x_1,x_2，即关于 x 的方程 $x^2+(a-1)x+1=0$ 有两个不同的正根 x_1,x_2，所以 $\Delta=a^2-2a-3>0$，解得 $a>3$ 或 $a<-1$. 又 $x_1+x_2=1-a>0$，$x_1x_2=1$，得 $a<1$，所以 $a<-1$. 因为 $f(x_1)+f(x_2)=\left[\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^2+(a-1)x_1\right]+\left[\ln x_2+\frac{1}{2}x_2^2+(a-1)x_2\right]=\ln(x_1x_2)+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2-x_1x_2+(a-1)(x_1+x_2)=\ln 1+\frac{1}{2}(1-a)^2-1-(a-1)^2=-\frac{1}{2}a^2+a-\frac{3}{2}$，$f(x_1)+f(x_2)\geqslant-\frac{11}{2}$，所以 $-\frac{1}{2}a^2+a-\frac{3}{2}\geqslant-\frac{11}{2}$，即 $a^2-2a-8\leqslant0$，解得 $-2\leqslant a\leqslant4$. 综上所述，实数 a 的取值范围是 $[-2,-1)$.

3. $-\ln 2$ **【解析】** 因为 $f(x)=e^{2x}-2e^x+2x$，所以 $f'(x)=2e^{2x}-2e^x+2$，$f(x_0)=e^{2x_0}-2e^{x_0}+2x_0$，所以 $g(x)=(2e^{2x_0}-2e^{x_0}+2)(x-x_0)+e^{2x_0}-2e^{x_0}+2x_0$. 令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(x)=e^{2x}-2e^x+2x-[(2e^{2x_0}-2e^{x_0}+2)(x-x_0)+e^{2x_0}-2e^{x_0}+2x_0]$，则 $h(x_0)=0$，$h'(x)=2e^{2x}-2e^x-(2e^{2x_0}-2e^{x_0})$. 令 $\varphi(x)=2e^{2x}-2e^x$，则 $\varphi'(x)=4e^{2x}-2e^x$，令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=-\ln 2$，所以当 $x\in(-\infty,-\ln 2)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，当 $x\in(-\ln 2,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增. 当 $x_0\in[-\ln 2,+\infty)$，$x\geqslant x_0$ 时，$\varphi(x)\geqslant\varphi(x_0)$，则 $h'(x)=\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant0$，$h(x)$ 单调递增，$h(x)\geqslant h(x_0)=0$，即 $f(x)\geqslant g(x)$，所以当 $x_0\in[-\ln 2,+\infty)$，$x\geqslant x_0$ 时，$(x-x_0)[f(x)-g(x)]\geqslant0$ 成立. 当 $x_0\in(-\infty,-\ln 2]$，$x<x_0$ 时，$\varphi(x)>\varphi(x_0)$，则 $h'(x)=\varphi(x)-\varphi(x_0)>0$，$h(x)$ 单调递增，$h(x)<h(x_0)=0$，即 $f(x)<g(x)$，所以当 $x_0\in(-\infty,-\ln 2]$，$x<x_0$ 时，$(x-x_0)[f(x)-g(x)]>0$ 成立. 综上所述，$x_0=-\ln 2$.

4. $0<n<1$ 或 $n>4e^{\frac{3}{2}}$ **【解析】** 函数 $f(x)=\frac{e^x(2x-m)}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，求导得 $f'(x)=e^x\left[\frac{2x-m}{x-1}+\frac{m-2}{(x-1)^2}\right]$，依题意得 $f'(0)=2m-2=0$，解得 $m=1$，此时 $f'(x)=e^x\left[\frac{2x-1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]=\frac{x(2x-3)e^x}{(x-1)^2}$，当 $x<0$ 或 $x>\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 或 $1<x<\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，所以 $m=1$ 符合题意. 函数 $f(x)=\frac{(2x-1)e^x}{x-1}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，且 $f(0)=1$，显然对任意 $x\in(-\infty,0)$，都有 $f(x)>0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，函数 $f(x)$ 在 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 处取得极小值 $f\left(\frac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}$，当 $x\to1^+$ 时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，作出函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图. 函数 $g(x)=f(x)-n$ 有两个零点，即直线 $y=n$ 与 $y=f(x)$ 的图象有两个公共点，观察图象得 $0<n<1$ 或 $n>4e^{\frac{3}{2}}$，所以实数 n 的取值范围为 $0<n<1$ 或 $n>4e^{\frac{3}{2}}$.



增分微课 2　构造法在解决函数、导数问题中的应用

例 1 **【思路点拨】** (1)构造函数 $h(x)=(1-x)e^x$，利用导数判断其单调性，再利用单调性比较大小即可. (2)根据题意构造函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{x+1}$，利用导数判断函数 $f(x)$ 的单调性，进而利用单调性比较大小即可.

(1)D　(2)A **【解析】** (1)设 $h(x)=(1-x)e^x$，则 $h'(x)=-xe^x$，由 $h'(x)<0$，得 $x>0$，所以 $h(x)=(1-x)e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 因为 $a=\left(1-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}}=h\left(\frac{1}{2}\right)$，$b=\left(1-\frac{1}{3}\right)e^{\frac{1}{3}}=h\left(\frac{1}{3}\right)$，$c=\left(1-\frac{2}{3}\right)e^{\frac{2}{3}}=h\left(\frac{2}{3}\right)$，$\frac{2}{3}>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>0$，所以 $h\left(\frac{2}{3}\right)<h\left(\frac{1}{2}\right)<h\left(\frac{1}{3}\right)$，即 $b>a>c$. 故选 D.

(2)$a=\frac{1}{e+1}=\ln e-\frac{e}{e+1}$，$b=2\ln 2-\frac{4}{5}=\ln 4-\frac{4}{4+1}$，$c=\ln 3-\frac{3}{4}=\ln 3-\frac{3}{3+1}$，构造函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{x+1}$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+x+1}{x(x+1)^2}>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(e)<f(3)<f(4)$，即 $a<c<b$，故选 A.

变式题　(1)B　(2)B **【解析】** (1)因为 $a=\log_48=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$，$b=\frac{e^2}{4}>\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$，所以 $b>a$. 设函数 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{(x-2)e^x}{x^3}(x>0)$，令 $f'(x)>0$，得 $x>2$，所以 $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(2024)>f(2)$，即 $\frac{e^{2024}}{2024^2}>\frac{e^2}{4}$，即 $c>b$. 所以 $a<b<c$. 故选 B.

(2)令 $f(x)=(14-x)\ln x$，其中 $x\geqslant7$，则 $f'(x)=\frac{14}{x}-1-\ln x$，因为函数 $y=\frac{14}{x}$，$y=-\ln x-1$ 在 $[7,+\infty)$ 上均单调递减，所以函数 $f'(x)$ 在 $[7,+\infty)$ 上单调递减，则 $f'(x)\leqslant f'(7)=2-1-\ln 7=1-\ln 7<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[7,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(7)>f(8)>f(9)$，即 $c>b>a$. 故选 B.

例 2 **【思路点拨】** 令 $f(x)=x+\sin x$，$g(x)=\ln(x+1)$，$h(x)=e^x-1$，再令 $p(x)=h(x)-f(x)=e^x-1-x-\sin x$，$q(x)=h(x)-g(x)=e^x-1-\ln(x+1)$，然后利用导数判断函数的单调性，利用函数的单调性可比较大小.

D **【解析】** 令 $f(x)=x+\sin x$，$g(x)=\ln(x+1)$，$h(x)=e^x-1$，$p(x)=h(x)-f(x)=e^x-1-x-\sin x$，$q(x)=h(x)-g(x)=e^x-1-\ln(x+1)$，则 $p'(x)=e^x-1-\cos x$，$q'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$. 令 $m(x)=p'(x)$，则 $m'(x)=e^x+\sin x$，当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$m'(x)>0$，所以 $p'(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，所以当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$p'(x)<p'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-1-\cos\frac{1}{2}<\sqrt{e}-1-\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{e}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，所以 $p(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $p(0.001)<p(0)=0$，所以 $c<a$. 令 $n(x)=q'(x)$，则 $n'(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0$，所以 $n(x)=q'(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，所以当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$q'(x)\geqslant q'(0)=0$，所以 $q(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $q(0.001)>q(0)=0$，所以 $c>b$. 综上，$a>c>b$. 故选 D.

变式题　D **【解析】** $a=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}$，$b=\ln 3-\ln 2=2\ln\sqrt{\frac{3}{2}}$，$c=\frac{1}{3}=1-\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}$，设 $m(t)=t-\frac{1}{t}$，$n(t)=2\ln t$，$s(t)=1-\frac{1}{t^2}$. 令 $f(t)=m(t)-n(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$，则 $f'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$，所以

$f(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，则$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)>f(1)=0$，所以$a>b$. 令$g(t)=n(t)-s(t)=2\ln t-1+\frac{1}{t^2}(t>1)$，则$g'(t)=\frac{2}{t}-\frac{2}{t^3}=2\times\frac{t^2-1}{t^3}>0$，所以$g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，则$g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)>g(1)=0$，所以$c<b$. 综上，$c<b<a$. 故选D.

例3 C **【解析】** 方法一：要比较$0.1e^{0.1}$与$\frac{1}{9}$的大小，可比较$e^{0.1}$与$\frac{10}{9}$的大小，即比较$e^{0.1}$与$\frac{1}{1-0.1}$的大小. 构造函数$f(x)=(1-x)e^x(0<x<1)$，则$f'(x)=-xe^x<0$，所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以$f(x)<f(0)=1$，所以当$x\in(0,1)$时，$e^x<\frac{1}{1-x}$，所以$e^{0.1}<\frac{1}{1-0.1}$，所以$0.1e^{0.1}<\frac{1}{9}$，即$a<b$. 构造函数$g(x)=xe^x+\ln(1-x)(0<x\leqslant0.1)$，则$g'(x)=xe^x+e^x-\frac{1}{1-x}=\frac{(1-x^2)e^x-1}{1-x}(0<x\leqslant0.1)$，令$h(x)=(1-x^2)e^x-1(0<x\leqslant0.1)$，则$h'(x)=(1-x^2-2x)e^x>0(0<x\leqslant0.1)$，所以$h(x)$在$(0,0.1]$上单调递增，所以$h(x)>h(0)=0$，所以$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(0,0.1]$上单调递增，所以$g(0.1)>g(0)=0$，即$0.1e^{0.1}+\ln(1-0.1)>0$，即$0.1e^{0.1}>-\ln0.9$，所以$a>c$. 综上，$b>a>c$.

方法二：易知，当$x>-1$且$x\neq0$时，$\ln(1+x)<x$恒成立. 令$x=-\frac{1}{10}$，得$\ln\frac{9}{10}<-\frac{1}{10}$，则$-\ln\frac{9}{10}>\frac{1}{10}$，即$\ln\frac{10}{9}>\frac{1}{10}$，可得$\frac{10}{9}>e^{\frac{1}{10}}$，则$\frac{1}{9}>0.1e^{0.1}$，即$a<b$. 构造函数$g(x)=xe^x+\ln(1-x)(0<x\leqslant0.1)$，则$g'(x)=xe^x+e^x-\frac{1}{1-x}=\frac{(1-x^2)e^x-1}{1-x}(0<x\leqslant0.1)$，令$h(x)=(1-x^2)e^x-1(0<x\leqslant0.1)$，则$h'(x)=(1-x^2-2x)e^x>0(0<x\leqslant0.1)$，所以$h(x)$在$(0,0.1]$上单调递增，所以$h(x)>h(0)=0$，所以$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(0,0.1]$上单调递增，所以$g(0.1)>g(0)=0$，即$0.1e^{0.1}+\ln(1-0.1)>0$，即$0.1e^{0.1}>-\ln0.9$，所以$a>c$. 综上，$b>a>c$.

变式题 (1)C (2)D **【解析】** (1)$a=\frac{1}{3}$，$b=e^{\frac{1}{3}}-1$，$c=\ln\frac{4}{3}=\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)$. 设$f(x)=e^x-x-1(0<x<1)$，则$f'(x)=e^x-1>0$，所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，所以$f(x)>f(0)=0$，即$e^x-1>x(0<x<1)$，所以$e^{\frac{1}{3}}-1>\frac{1}{3}$，即$a<b$. 设$g(x)=\ln(1+x)-x(0<x<1)$，则$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$，所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以$g(x)<g(0)=0$，即$\ln(1+x)<x(0<x<1)$，所以$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)<\frac{1}{3}$，即$c<a$. 综上，$c<a<b$. 故选C.

(2)令$f(x)=e^x-1-x$，则$f'(x)=e^x-1$，令$f'(x)>0$，得$x>0$，令$f'(x)<0$，得$x<0$，故函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,0)$上单调递减，故$f(0.8)>f(0)=0$，即$e^{0.8}-1>0.8$，所以$e^{0.8}>1.8$，即$b>a$. 令$g(x)=\ln x+1-x$，则$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，令$g'(x)>0$，得$0<x<1$，令$g'(x)<0$，得$x>1$，故函数$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，故$g(1.8)<g(1)=0$，即$\ln1.8+1-1.8<0$，所以$\ln1.8+1<1.8$，即$a>c$. 综上，$b>a>c$. 故选D.

例4 **【思路点拨】** (1)将已知等式$2^a+\log_2a=4^b+2\log_4b$按照“左右形式相当，一边一个变量”的目的变形，然后逆用函数的单调性求解即可. (2)由跨阶同构得到$e^a\ln e^a<\frac{b}{e}\ln\frac{b}{e}$，构造函数$f(x)=x\ln x$，得到$f(e^a)<f\left(\frac{b}{e}\right)$，结合题意和函数$f(x)$的单调性，即可求解.

(1)B (2)B **【解析】** (1)由题知$2^a+\log_2a=4^b+\log_2b=2^{2b}+\log_2(2b)-1<2^{2b}+\log_2(2b)$，又函数$y=2^x+\log_2x$在$(0,+\infty)$上为增函数，所以$a<2b$，故选B.

(2)由$ae^{a+1}+b<b\ln b$，可得$ae^{a+1}<b\ln b-b=b(\ln b-1)=b\ln\frac{b}{e}$，即$e^a\ln e^a<\frac{b}{e}\ln\frac{b}{e}$. 设$f(x)=x\ln x$，可得$f(e^a)<f\left(\frac{b}{e}\right)$，因为$a>1$，所以$e^a>1$，又因为$b(\ln b-1)>0$，$b>1$，所以$\ln b>1$，即$b>e$，所以$\frac{b}{e}>1$. 当$x>1$时，$f'(x)=\ln x+1>0$，可得函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$e^a<\frac{b}{e}$，即$b>e^{a+1}$. 故选B.

变式题 (1)B (2)A **【解析】** (1)设函数$f(x)=xe^x$，$x>-1$，则$f'(x)=(x+1)e^x>0$，则函数$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增. 由$y>0$，得$y-1>-1$，又$x>0$，$xe^x=(y-1)e^{y-1}+1>(y-1)e^{y-1}$，即$f(x)>f(y-1)$，所以$x>y-1$，即$x+1>y>0$，因此$\ln(x+1)>\ln y$，B正确；取$x=1$，由$xe^x=(y-1)e^{y-1}+1$，得$(y-1)e^{y-1}=e-1>0$，即$f(y-1)>f(0)$，所以$y-1>0$，此时$y>1=x$，因此$\ln y>\ln x$，A错误；取$x=1$，由以上分析知$x-y<0$，则$e^{x-y}<e^0=1$，C错误；取$x=1$，由以上分析知$y>1=x$，则$e^x+e^y>e+e>e$，D错误. 故选B.

(2)易知$a=\pi^e<c=\pi^\pi$，$b=3^\pi<c=\pi^\pi$. 由$a=\pi^e$，$b=3^\pi$，得$\ln a=e\ln\pi$，$\ln b=\pi\ln3$，所以$\frac{\ln a}{e\pi}=\frac{\ln\pi}{\pi}$，$\frac{\ln b}{e\pi}=\frac{\ln3}{e}>\frac{\ln e}{e}$，令$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in[e,+\infty)$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\leqslant0$且$f'(x)$不恒为零，所以$f(x)$在$[e,+\infty)$上单调递减，所以$f(\pi)<f(e)$，所以$\frac{\ln b}{e\pi}=\frac{\ln3}{e}>\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}=\frac{\ln a}{e\pi}$，故$b>a$. 综上，$a<b<c$. 故选A.

第18讲 导数与不等式

| 第1课时 利用导数研究恒（能）成立问题 |

● 课堂考点探究

例1-1 **【思路点拨】** (1)求出$f'(x)$，分$a\leqslant0$，$a>0$讨论即可；(2)转化为$a\geqslant\frac{e^{-x}}{x}+x-\frac{\ln(-x)}{x}$对任意$x<0$恒成立，进而求函数$h(x)=\frac{e^{-x}}{x}+x-\frac{\ln(-x)}{x}(x<0)$的最大值即可.

解：(1)由题意知$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)$，$f'(x)=a+\frac{1}{x}=\frac{ax+1}{x}(x<0)$，当$a\leqslant0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减. 当$a>0$时，$f'(x)=\frac{a\left(x+\frac{1}{a}\right)}{x}$，所以当$x<-\frac{1}{a}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$-\frac{1}{a}<x<0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减. 综上所述，当$a\leqslant0$时，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减；当$a>0$时，$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(-\frac{1}{a},0\right)$上单调递减.

(2)若对任意$x<0$，$f(x)\leqslant g(x)$恒成立，则$ax\leqslant e^{-x}+x^2-\ln(-x)$对任意$x<0$恒成立，

即$a\geqslant\frac{e^{-x}}{x}+x-\frac{\ln(-x)}{x}$对任意$x<0$恒成立.

令$h(x)=\frac{e^{-x}}{x}+x-\frac{\ln(-x)}{x}(x<0)$，

则$h'(x)=\frac{-e^{-x}(x+1)+x^2-1+\ln(-x)}{x^2}$，

令$M(x)=-e^{-x}(x+1)+x^2-1+\ln(-x)(x<0)$，则$M(-1)=0$，$M'(x)=xe^{-x}+2x+\frac{1}{x}$，

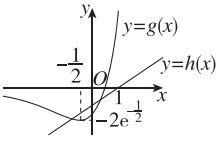
因为$x<0$，所以$M'(x)<0$，所以$M(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，

所以当$x<-1$时，$M(x)>0$，当$-1<x<0$时，$M(x)<0$，所

以当 $x<-1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $-1<x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)\leqslant h(-1)=\frac{\mathrm{e}}{-1}-1-\frac{\ln 1}{-1}=-\mathrm{e}-1$，可得 $a\geqslant-\mathrm{e}-1$.

例 1-2 **【思路点拨】** 构造函数 $g(x)=\mathrm{e}^x(2x-1)$，$h(x)=2ax-2a$，原问题转化为存在唯一的整数 x_0，使得 $g(x_0)<h(x_0)$，结合导数及图象求解即可.

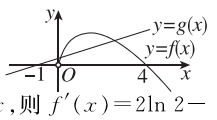
B **【解析】** 设 $g(x)=\mathrm{e}^x(2x-1)$，$h(x)=2ax-2a$，由题意知存在唯一的整数 x_0，使得 $g(x_0)<h(x_0)$. $g'(x)=\mathrm{e}^x(2x-1)+2\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(2x+1)$，令 $g'(x)>0$，可得 $x>-\frac{1}{2}$，此时 $g(x)$ 单调递增，令 $g'(x)<0$，可得 $x<-\frac{1}{2}$，此时 $g(x)$ 单调递减，所以当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. $h(x)$ 的图象恒过点 $(1,0)$，当 $x=1$ 时，$g(1)=\mathrm{e}>0=h(1)$，作出函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象，如图所示. 当 $a\leqslant0$ 时，存在无数个整数 x_0，使得 $g(x_0)<h(x_0)$，不合题意，所以 $0<a<1$. 设过点 $(1,0)$ 的直线与 $g(x)$ 的图象相切于点 $(b,\mathrm{e}^b(2b-1))$，则切线方程为 $y-\mathrm{e}^b(2b-1)=\mathrm{e}^b(2b+1)(x-b)$，又点 $(1,0)$ 在切线上，所以 $2b^2-3b=0$，解得 $b=0$ 或 $b=\frac{3}{2}$. 当 $b=0$ 时，切线斜率为 $g'(0)=1$，当 $b=\frac{3}{2}$ 时，切线斜率为 $g'\left(\frac{3}{2}\right)=4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}>2$. 当 $0<a<1$ 时，$0<2a<2$，所以要使存在唯一的整数 x_0，使得 $g(x_0)<h(x_0)$，只需 $h(0)>g(0)$ 且 $g(-1)\geqslant h(-1)$. 由 $h(0)>g(0)$，可得 $-2a>-1$，解得 $a<\frac{1}{2}$，由 $g(-1)\geqslant h(-1)$，可得 $-3\mathrm{e}^{-1}\geqslant-2a-2a$，解得 $a\geqslant\frac{3}{4\mathrm{e}}$，所以 $\frac{3}{4\mathrm{e}}\leqslant a<\frac{1}{2}$，所以实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{3}{4\mathrm{e}},\frac{1}{2}\right)$. 故选 B.



变式题 1 **解：**(1)易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，根据题意可得 $f'(x)=\frac{1}{x}+a=\frac{1+ax}{x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{1}{a}$，当 $x\in\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，当 $x\in\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f\left(-\frac{1}{a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{a}\right)+1=2$，解得 $a=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+2$，因为 $x\geqslant1$，所以 $\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+2\leqslant bx$ 可化为 $b\geqslant\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{2}{x}$. 设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{2}{x}(x\geqslant1)$，所以 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{-\ln x-1}{x^2}$，则 $g'(x)<0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，故 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $b\geqslant g(x)_{\max}=g(1)=2-\frac{1}{\mathrm{e}}$，故 b 的取值范围是 $\left[2-\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$.

变式题 2 $\left[\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3},\frac{2\ln 2}{3}\right)$ **【解析】** 由 $x\ln x+(x+1)k<2x\ln 2$ 得 $(x+1)k<2x\ln 2-x\ln x$，设 $f(x)=2x\ln 2-x\ln x$，则 $f'(x)=2\ln 2-\ln x-1=\ln\frac{4}{\mathrm{e}}-\ln x$. 令 $f'(x)>0$，即 $\ln\frac{4}{\mathrm{e}}-\ln x>0$，得 $0<x<\frac{4}{\mathrm{e}}$，即当 $x\in\left(0,\frac{4}{\mathrm{e}}\right)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；令 $f'(x)<0$，即 $\ln\frac{4}{\mathrm{e}}-\ln x<0$，得 $x>\frac{4}{\mathrm{e}}$，即当 $x\in\left(\frac{4}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减. 当 $x\to0$ 时，$f(x)\to0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$. 设 $g(x)=(x+1)k$，则 $g(x)$ 的图象过定点 $(-1,0)$，易知 $k\leqslant0$ 时不符合题意，故 $k>0$. 作出 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象，如图所示. 由图可知，只需 $\begin{cases}g(1)<f(1),\\g(2)<f(2),\\g(3)\geqslant f(3),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2k<2\ln 2,\\3k<4\ln 2-2\ln 2,\\4k\geqslant6\ln 2-3\ln 3,\end{cases}$ 解得 $\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3}\leqslant k<\frac{2\ln 2}{3}$，故实数 k 的取值范围为 $\left[\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3},\frac{2\ln 2}{3}\right)$.



例 2 **【思路点拨】** (1)求出 $g'(x)$，根据 $g'(x)$ 的分子构造新函数，判断 $g'(x)$ 的单调性，从而得出 $g(x)$ 在 $(0,b)$ 和 $(b,+\infty)$ 上单调递减，需注意单调性在各个区间上分开描述；(2)求出 $h'(x)$，分 $a\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<a<1$，$a>1$ 三种情况，当 $a\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<a<1$ 时，讨论 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值 $h(x)_{\min}$，使 $h(x)_{\min}<\frac{a}{a-1}$，解出 a 的取值范围，当 $a>1$ 时，可得 $h(1)<\frac{a}{a-1}$，最后取并集即可.

解：(1)当 $a=2$ 时，$g(x)=\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\frac{2(\ln x-\ln b)}{x-b}$ $(x>0,x\neq b,b>0)$，

$\therefore g'(x)=\frac{\frac{2}{x}(x-b)-2\ln x+2\ln b}{(x-b)^2}=\frac{-\frac{2b}{x}-2\ln x+2\ln b+2}{(x-b)^2}$.

令 $w(x)=-\frac{2b}{x}-2\ln x+2\ln b+2(x>0)$，则 $w'(x)=\frac{2b}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{2(b-x)}{x^2}$，令 $w'(x)>0$，可得 $0<x<b$，令 $w'(x)<0$，可得 $x>b$，$\therefore w(x)$ 在 $(0,b)$ 上单调递增，在 $(b,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore$ 当 $x\neq b$ 时，$w(x)<w(b)=0$，故 $g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,b)$ 和 $(b,+\infty)$ 上单调递减.

(2)由题意知 $a\neq1$，$h(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-x$，函数 $h(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$\therefore h'(x)=\frac{a}{x}+(1-a)x-1=\frac{1-a}{x}\left(x-\frac{a}{1-a}\right)(x-1)$.

①当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\frac{a}{1-a}\leqslant1$，则当 $x\geqslant1$ 时，$h'(x)\geqslant0$，$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，若存在 $x_0\geqslant1$，使得 $h(x_0)<\frac{a}{a-1}$，则只需 $h(1)<\frac{a}{a-1}$，即 $\frac{1-a}{2}-1<\frac{a}{a-1}$，

即 $\frac{a^2+2a-1}{2(a-1)}>0$，又 $2(a-1)<0$，故只需 $a^2+2a-1<0$，

解得 $-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1$，此时 $-\sqrt{2}-1<a\leqslant\frac{1}{2}$.

②当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，$\frac{a}{1-a}>1$，则当 $x\in\left[1,\frac{a}{1-a}\right)$ 时，$h'(x)\leqslant0$，函数 $h(x)$ 在 $\left[1,\frac{a}{1-a}\right)$ 上单调递减；当 $x\in\left(\frac{a}{1-a},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 在 $\left(\frac{a}{1-a},+\infty\right)$ 上单调递增.

若存在 $x_0\geqslant1$，使得 $h(x_0)<\frac{a}{a-1}$，则只需 $h\left(\frac{a}{1-a}\right)<\frac{a}{a-1}$，而 $h\left(\frac{a}{1-a}\right)=a\ln\frac{a}{1-a}+\frac{a^2}{2(1-a)}+\frac{a}{a-1}>\frac{a}{a-1}$，不符合题意，舍去.

③当 $a>1$ 时，$h(1)=\frac{1-a}{2}-1=\frac{-a-1}{2}<\frac{a}{a-1}$，满足题意.

综上可得，a 的取值范围是 $(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)\cup(1,+\infty)$.

变式题 **解：**(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=x\ln x-x$，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x$，

则当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

(2)$f'(x)=ax^{a-1}\ln x+x^{a-1}-1$，$f'(1)=0$.

令 $g(x)=f'(x)=ax^{a-1}\ln x+x^{a-1}-1$，则 $g'(x)=a(a-1)x^{a-2}\ln x+(2a-1)x^{a-2}$，$g'(1)=2a-1$.

①当 $2a-1>0$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，因为 $g'(1)>0$，所以存在 $\delta>1$，使得当 $x\in(1,\delta)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,\delta)$ 上单调递增，即 $f'(x)$ 在 $(1,\delta)$ 上单调递增，

因为 $f'(1)=0$,所以 $f(x)$在$(1,\delta)$上单调递增,
则当 $x\in(1,\delta)$时,$f(x)>f(1)=-1$,与题意矛盾,舍去.

②当 $2a-1\leqslant 0$,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$时,$f(x)=x^a\ln x-x\leqslant\sqrt{x}\ln x-x$在$(1,+\infty)$上恒成立,只需证明$\sqrt{x}\ln x-x<-1$在$(1,+\infty)$上恒成立即可,即证 $\ln x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}<0$ 在$(1,+\infty)$上恒成立.令 $F(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}(x>1)$,则 $F'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2<0$,所以 $F(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,所以 $F(x)<F(1)=0$,所以 $2\ln x-x+\frac{1}{x}<0(x>1)$,即 $\ln x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}<0(x>1)$.

综上可得,a 的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

例 3 **【思路点拨】** 将存在性问题转化为$|f(x)_{\max}-f(x)_{\min}|=f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\geqslant e-1$,利用导数判断函数的单调性,并求函数的最值,代入不等式,进而求解 a 的取值范围.

解: 由题意得,当 $x\in[-1,1]$时,$|f(x)_{\max}-f(x)_{\min}|=f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\geqslant e-1$.

$f'(x)=a^x\ln a+2x-\ln a=2x+(a^x-1)\ln a$.

①当 $0<x\leqslant 1$ 时,由 $a>1$,可知 $2x>0$,$a^x-1>0$,$\ln a>0$,$\therefore f'(x)>0$;

②当 $-1\leqslant x<0$ 时,由 $a>1$,可知 $2x<0$,$a^x-1<0$,$\ln a>0$,$\therefore f'(x)<0$;

③当 $x=0$ 时,$f'(x)=0$. $\therefore f(x)$在$[-1,0]$上单调递减,$[0,1]$上单调递增,$\therefore$ 当 $x\in[-1,1]$时,$f(x)_{\min}=f(0)$,$f(x)_{\max}=\max\{f(-1),f(1)\}$.

$f(1)-f(-1)=a-\frac{1}{a}-2\ln a$,设 $g(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>0)$,$\because g'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2\geqslant 0$(当且仅当 $t=1$ 时取等号),$\therefore g(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又 $g(1)=0$,

$\therefore$当 $t>1$ 时,$g(t)>0$,即当 $a>1$ 时,$a-\frac{1}{a}-2\ln a>0$,

$\therefore f(1)>f(-1)$,$\therefore f(x)_{\max}=f(1)$,$\therefore f(1)-f(0)\geqslant e-1$,即 $a-\ln a\geqslant e-1=e-\ln e$. 设 $h(x)=x-\ln x(x>1)$,则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}>0$,$\therefore h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,

$\therefore$由 $a-\ln a\geqslant e-\ln e$ 得 $a\geqslant e$,即 a 的取值范围是$[e,+\infty)$.

变式题 **解:** (1) $f'(x)=mx+m-1-\frac{1}{x}=\frac{(mx-1)(x+1)}{x}$,$x>0$. 当 $m\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$ 恒成立,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;当 $m>0$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $x>\frac{1}{m}$,故 $f(x)$在$\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$上单调递增,由 $f'(x)<0$,得 $0<x<\frac{1}{m}$,故 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{m}\right)$上单调递减. 综上所述,当 $m\leqslant 0$ 时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;当 $m>0$ 时,$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{m}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$上单调递增.

(2)当 $m>0$ 时,由(1)知 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{m}\right)=\ln m+1-\frac{1}{2m}$.

当 $x\geqslant 1$ 时,$g'(x)=2x+\frac{1}{2}e^{-x}>0$ 恒成立,故 $g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以 $g(x)$在$[1,+\infty)$上的最小值 $g(x)_{\min}=g(1)=2-\frac{1}{2e}$,

由题意知 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$,即 $\ln m+1-\frac{1}{2m}\geqslant 2-\frac{1}{2e}$.

设 $h(x)=\ln x+1-\frac{1}{2x}$,则 $h'(x)=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}>0$,所以 $h(x)$为增函数,又 $h(e)=2-\frac{1}{2e}$,所以 $m\geqslant e$,

即 m 的取值范围是$[e,+\infty)$.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】** (1)求出函数的导数,分 $a\leqslant 0$,$0<a<1$,$a=1$,$a>1$ 四种情况讨论,进而判断函数的单调性.

(2)思路一:问题转化为证 $\ln x+2<e^x$,设 $h(x)=\ln x-e^x+2$,根据导数判断函数的单调性,求出 $h(x)$的最大值,从而证明结论;思路二:问题转化为证 $\ln x+2<e^x$,结合 $\ln x\leqslant x-1$,当且仅当 $x=1$ 时取等号及 $e^x\geqslant x+1$,当且仅当 $x=0$ 时取等号证明即可.

解: (1) $f'(x)=a-\frac{2a+2}{x}+\frac{4}{x^2}=\frac{(ax-2)(x-2)}{x^2}(x>0)$.

当 $a\leqslant 0$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $0<x<2$,由 $f'(x)<0$,得 $x>2$,所以 $f(x)$在$(0,2)$上单调递增,在$(2,+\infty)$上单调递减;

当 $0<a<1$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $0<x<2$ 或 $x>\frac{2}{a}$,由 $f'(x)<0$,得 $2<x<\frac{2}{a}$,所以 $f(x)$在$(0,2)$,$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(2,\frac{2}{a}\right)$上单调递减;当 $a=1$ 时,$f'(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2}\geqslant 0$,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

当 $a>1$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $0<x<\frac{2}{a}$或 $x>2$,由 $f'(x)<0$,得 $\frac{2}{a}<x<2$,所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$,$(2,+\infty)$上单调递增,在$\left(\frac{2}{a},2\right)$上单调递减.

(2)证明:方法一,当 $a=-\frac{3}{2}$时,$f(x)=-\frac{3}{2}x+\ln x-\frac{4}{x}+2$,要证 $f(x)<g(x)$,只需证 $\ln x+2<e^x$.

令 $h(x)=\ln x-e^x+2$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-e^x(x>0)$,

令 $\varphi(x)=h'(x)=\frac{1}{x}-e^x(x>0)$,则 $\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}-e^x<0$,故 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,即 $h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,又 $h'(1)=1-e<0$,$h'\left(\frac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0$,所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $h'(x_0)=0$,即 $\frac{1}{x_0}=e^{x_0}$,即 $x_0=-\ln x_0$,

且当 $0<x<x_0$ 时,$h'(x)>0$,当 $x>x_0$ 时,$h'(x)<0$,

故 $h(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,在$(x_0,+\infty)$上单调递减,

所以 $h(x)_{\max}=h(x_0)=\ln x_0-e^{x_0}+2=-x_0-\frac{1}{x_0}+2=-\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)+2$,又 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,所以 $x_0+\frac{1}{x_0}>2$,所以 $h(x_0)<0$,所以 $h(x)\leqslant h(x_0)<0$,所以 $\ln x+2<e^x$,

所以当 $a=-\frac{3}{2}$时,$f(x)<g(x)$.

方法二,当 $a=-\frac{3}{2}$时,$f(x)=-\frac{3}{2}x+\ln x-\frac{4}{x}+2$,

要证 $f(x)<g(x)$,只需证 $\ln x+2<e^x$,即证 $e^x>\ln x+2$.

因为 $\ln x\leqslant x-1$,当且仅当 $x=1$ 时取等号,所以只需证 $e^x>x-1+2=x+1$,又 $e^x\geqslant x+1$,当且仅当 $x=0$ 时取等号,所以当 $x>0$ 时,$e^x>x+1$,得证.

例 2 **【思路点拨】** (1)求出 $f'(x)$,分 $a\leqslant 0$,$a>0$ 两种情况讨论即可.(2)思路一:求出 $f(x)_{\min}=1+a^2+\ln a$,构造函数 $g(a)=1+a^2+\ln a-\left(2\ln a+\frac{3}{2}\right)$,利用导数判断 $g(a)$的单调性,从而得到 $g(a)$ 的最小值,即可证明;思路二:求出 $f(x)_{\min}=1+a^2+\ln a$,转化为证明 $a^2-\frac{1}{2}>\ln a$,结合 $\ln a\leqslant a-1$ 即可证明.

解: (1)由题知 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f'(x)=ae^x-1$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$ 恒成立,故 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数;

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $x>-\ln a$,令 $f'(x)<0$,得 $x<-\ln a$,故 $f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减,在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增.

综上,当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数;当 $a>0$ 时,$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减,在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增.

(2)证明:方法一:由(1)知,当 $a>0$ 时,$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=a(e^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$,

令 $g(a)=1+a^2+\ln a-\left(2\ln a+\frac{3}{2}\right)=a^2-\ln a-\frac{1}{2}(a>0)$,则 $g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}(a>0)$.

令 $g'(a)>0$,得 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$,令 $g'(a)<0$,得 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故 $g(a)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,

故 $g(a)\geqslant g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}>0$,

即 $f(x)_{\min}>2\ln a+\frac{3}{2}$,所以 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$,故得证.

方法二:当 $a>0$ 时,由(1)得 $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=1+a^2+\ln a$,要证 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$,只需证 $1+a^2+\ln a>2\ln a+\frac{3}{2}$,即证 $a^2-\frac{1}{2}>\ln a$,易证 $\ln a\leqslant a-1$,

所以只需证明 $a^2-\frac{1}{2}>a-1$,即证 $a^2-a+\frac{1}{2}>0$.

因为 $a^2-a+\frac{1}{2}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0$ 恒成立,所以 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$ 成立,故得证.

变式题 1 **解**:(1)因为 $f(x)=x\ln(x+1)$,所以 $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$,所以 $f(1)=\ln 2$,$f'(1)=\ln 2+\frac{1}{2}$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-\ln 2=\left(\frac{1}{2}+\ln 2\right)(x-1)$,即 $y=\left(\frac{1}{2}+\ln 2\right)x-\frac{1}{2}$.

(2)证明:令 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^3-x^2=\frac{1}{2}x^3-x^2+x\ln(x+1)$,其中 $x>-1$,

则 $g'(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$.

令 $h(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$,其中 $x>-1$,

则 $h'(x)=3x-2+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x^2(3x+4)}{(x+1)^2}$,

当 $x>-1$ 时,$h'(x)\geqslant 0$ 且 $h'(x)$ 不恒为零,所以函数 $g'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,所以当 $-1<x<0$ 时,$g'(x)<g'(0)=0$,此时函数 $g(x)$ 单调递减,

当 $x>0$ 时,$g'(x)>g'(0)=0$,此时函数 $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$,即 $f(x)+\frac{1}{2}x^3\geqslant x^2$.

变式题 2 **解**:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=\frac{\ln x+1}{x}(x>0)$,则 $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$,由 $f'(x)<0$,可得 $x>1$,由 $f'(x)>0$,可得 $0<x<1$,故当 $a=1$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$,单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

(2)证明:当 $a>0$ 时,$f(x)=\frac{a(\ln x+a)}{x}(x>0)$,则 $f'(x)=\frac{a(1-a-\ln x)}{x^2}$,由 $f'(x)<0$,可得 $x>e^{1-a}$,由 $f'(x)>0$,可得 $0<x<e^{1-a}$,所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,e^{1-a})$,单调递减区间为 $(e^{1-a},+\infty)$,所以 $f(x)_{\max}=f(e^{1-a})=\frac{a}{e^{1-a}}$.

要证当 $a>0$ 时,$f(x)\leqslant e^{2a-2}$,只需证 $\frac{a}{e^{1-a}}\leqslant e^{2a-2}$,即证 $e^{a-1}\geqslant a$.记 $g(a)=e^{a-1}-a$,$a>0$,则 $g'(a)=e^{a-1}-1$,

当 $a\in(0,1)$ 时,$g'(a)<0$,当 $a\in(1,+\infty)$ 时,$g'(a)>0$,

所以函数 $g(a)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$,单调递增区间为 $(1,+\infty)$,所以 $g(a)_{\min}=g(1)=0$,所以 $g(a)\geqslant 0$ 恒成立,即 $e^{a-1}\geqslant a$,得证.

例 3 **[思路点拨]** (1)求导,判断导函数的符号,进而可得答案;(2)当 $x\in(0,2)$ 时,要证 $f(x)\leqslant g(x)$,即证 $\frac{\ln x}{e^{\ln x}}\leqslant\frac{x-1}{e^{x-1}}$,利用导数求出函数 $l(x)=\frac{x}{e^x}$ 的单调区间,再利用导数比较当 $x\in(0,2)$ 时 $\ln x$ 和 $x-1$ 的大小,即可证明.

解:(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=e^{x-1}\ln x+\frac{e^{x-1}}{x}=e^{x-1}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$,

记 $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$,

所以当 $0<x<1$ 时,$h'(x)<0$,函数 $h(x)$ 单调递减,

当 $x>1$ 时,$h'(x)>0$,函数 $h(x)$ 单调递增,

所以 $h(x)\geqslant h(1)=1$,所以 $f'(x)=e^{x-1}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)>0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2)证明:原不等式为 $e^{x-1}\ln x\leqslant x^2-x=x(x-1)$,即 $\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{x-1}{e^{x-1}}$,故只需证 $\frac{\ln x}{e^{\ln x}}\leqslant\frac{x-1}{e^{x-1}}$ 对任意 $x\in(0,2)$ 恒成立.

设 $l(x)=\frac{x}{e^x}$,则 $l'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$,所以当 $x<1$ 时,$l'(x)>0$,$l(x)$ 单调递增,当 $x>1$ 时,$l'(x)<0$,$l(x)$ 单调递减.令 $t(x)=\ln x-x+1$,则 $t'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,

当 $0<x<1$ 时,$t'(x)>0$,$t(x)$ 单调递增,当 $x>1$ 时,$t'(x)<0$,$t(x)$ 单调递减,

所以 $t(x)_{\max}=t(1)=0$,所以 $\ln x\leqslant x-1$.

当 $x\in(0,2)$ 时,$\ln x<1$,$x-1<1$,所以 $l(\ln x)\leqslant l(x-1)$,即 $\frac{\ln x}{e^{\ln x}}\leqslant\frac{x-1}{e^{x-1}}$,所以对任意 $x\in(0,2)$,$f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立.

变式题 **解**:(1)因为 $f(x)=x^2-x\ln x$,所以 $f'(x)=2x-\left(x\cdot\frac{1}{x}+\ln x\right)=2x-1-\ln x$,所以 $f'(1)=2-1-\ln 1=1$,又 $f(1)=1-\ln 1=1$,所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=1\times(x-1)$,即 $y=x$.

(2)证明:由题意可知 $x>0$,要证 $2x^2-(2x+a)\ln x>0$,即证 $2x^2-2x\ln x>a\ln x$,即证 $x-\ln x>\frac{a\ln x}{2x}$.

令 $g(x)=x-\ln x$,则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

当 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,当 $x>1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,所以 $g(x)\geqslant g(1)=1$.

令 $h(x)=\frac{a\ln x}{2x}$,则 $h'(x)=\frac{a(1-\ln x)}{2x^2}$,因为 $a\in(0,2e)$,所以当 $x>e$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,当 $0<x<e$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,所以 $h(x)\leqslant h(e)=\frac{a}{2e}<1$,所以 $g(x)>h(x)$ 恒成立,即 $x-\ln x>\frac{a\ln x}{2x}$ 恒成立,所以当 $a\in(0,2e)$ 时,$2x^2-(2x+a)\ln x>0$.

| 第 3 课时　放缩法证明不等式 |

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)利用导数研究函数 $f(x)=x-\ln(x+1)$ 的单调性可得 $f(x)\geqslant f(0)=0$,即证 $x\geqslant\ln(x+1)$,进而 $e^x\geqslant e^{\ln(x+1)}$,即证 $e^x-1\geqslant x$.(2)易知当 $x=0$ 时不等式成立;当 $x\neq 0$ 时,利用导数研究函数 $g(x)=\frac{x}{e^x-1}$ 的单调性,可得 $g(x)<g[\ln(x+1)]$,变形即可证明.

证明:(1)令 $f(x)=x-\ln(x+1)$,则 $f'(x)=\frac{x}{x+1}$,$x>-1$,

当 $-1<x<0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$,所以 $x\geqslant\ln(x+1)$,从而 $e^x\geqslant e^{\ln(x+1)}=x+1$,即 $e^x-1\geqslant x$.

综上,$e^x-1\geqslant x\geqslant\ln(x+1)$.

(2)显然当 $x=0$ 时,$(e^x-1)\ln(x+1)=x^2=0$,即 $(e^x-1)\ln(x+1)\geqslant x^2$ 成立.

令 $g(x)=\frac{x}{e^x-1}$,$x\neq 0$,则 $g'(x)=\frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}$,$x\neq 0$.

令 $h(x)=(1-x)e^x-1$,则 $h'(x)=-xe^x$,当 $x<0$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,当 $x>0$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,所以 $h(x)\leqslant h(0)=0$,当且仅当 $x=0$ 时等号成立,

所以 $g'(x)=\frac{h(x)}{(e^x-1)^2}<0$，$x\neq0$，所以 $g(x)$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调递减. 由(1)知，当$-1<x<0$时，$0>x>\ln(x+1)$，当$x>0$时，$x>\ln(x+1)>0$，

所以 $g(x)<g[\ln(x+1)]$，即$\frac{x}{e^x-1}<\frac{\ln(x+1)}{e^{\ln(x+1)}-1}=\frac{\ln(x+1)}{x}$.

又当$x>-1$且$x\neq0$时，$x(e^x-1)>0$，所以$(e^x-1)\ln(x+1)>x^2$. 综上，当$x>-1$时，$(e^x-1)\ln(x+1)\geqslant x^2$.

变式题 **解**：(1)由 $f(x)=x^2+\ln x$，可得函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=2x+\frac{1}{x}$，所以 $f(1)=1$，$f'(1)=3$，

所以曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y-1=3(x-1)$，即 $3x-y-2=0$.

(2)证明：要证 $f(x)<e^x+x^2-2$，即证 $e^x>\ln x+2$，先证明当$x>0$时，$e^x>x+1$. 令 $g(x)=e^x-x-1$，其中$x>0$，则$g'(x)=e^x-1>0$，所以函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

则 $g(x)>g(0)=0$，即 $e^x>x+1$.

接下来证明当$x>0$时，$\ln x\leqslant x-1$.

令 $h(x)=x-\ln x-1$，其中$x>0$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

由 $h'(x)<0$，可得$0<x<1$，由 $h'(x)>0$，可得$x>1$，所以函数 $h(x)$的单调递减区间为$(0,1)$，单调递增区间为$(1,+\infty)$，所以 $h(x)\geqslant h(1)=0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，所以当$x>0$时，$e^x>x+1=(x-1)+2\geqslant\ln x+2$，即 $e^x>\ln x+2$，

故 $f(x)<e^x+x^2-2$.

例 2 **【思路点拨】**(1)利用导数研究函数 $f(x)$的单调性，进而可求得最大值；(2)由(1)得到 $\ln(x+1)\leqslant x(x+1)$，令 $x=\frac{1}{n}$，得到 $\ln\frac{n+1}{n}<\frac{n+1}{n^2}$，进而证明.

解：(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-1=\frac{1-x^2-\ln x}{x^2}$. 令 $g(x)=1-x^2-\ln x$，$x>0$，则 $g'(x)=-2x-\frac{1}{x}<0$，$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，$\because g(1)=0$，

$\therefore$当$x\in(0,1)$时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

$\therefore f(x)_{max}=f(1)=-1$.

(2)证明：由(1)知 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-x\leqslant-1$，即 $\ln x\leqslant x(x-1)$，即 $\ln(x+1)\leqslant x(x+1)$，当且仅当$x=0$时等号成立.

令 $x=\frac{1}{n}$，$\because n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)<\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)=\frac{n+1}{n^2}$，即 $\ln\frac{n+1}{n}<\frac{n+1}{n^2}$，$\therefore\frac{2}{1^2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n+1}{n^2}>\ln2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$，即 $\ln(n+1)<\frac{2}{1^2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n+1}{n^2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

变式题 **解**：(1)令 $g(x)=f(x)-a=\ln(x+1)-\frac{ax}{x+1}$，则有 $g(0)=0$，$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{a}{(x+1)^2}$.

若$g'(0)>0$，则存在$x_1<0$，使得$g(x)$在$(x_1,0)$上单调递增，所以$g(x_1)<0$，矛盾；若$g'(0)<0$，则存在$x_2>0$，使得$g(x)$在$(0,x_2)$上单调递减，所以$g(x_2)<0$，矛盾；

若$g'(0)=0$，即$a=1$，$g'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$，则$g(x)$在$(-1,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，故$g(x)\geqslant g(0)=0$，符合题意. 综上，$a=1$.

(2)证明：由(1)知，当$a=1$时，$g(x)\geqslant0$恒成立，即 $\ln(x+1)\geqslant\frac{x}{x+1}$恒成立，当且仅当$x=0$时取等号.

令 $x=\frac{1}{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant2$，则 $\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\ln\frac{n}{n-1}>\frac{1}{n}$，即 $\ln n-\ln(n-1)>\frac{1}{n}$，…，$\ln2-\ln1>\frac{1}{2}$，上式累加得 $\ln n-\ln(n-1)+\ln(n-1)-\ln(n-2)+\cdots+\ln2-\ln1>\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}$，即 $\ln n>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，得证.

例 3 **【思路点拨】**(1)对函数 $f(x)$求导，根据切线斜率为2，求出切点坐标，进而得到切线方程，即可证明；(2)先证明$g(x)\leqslant2x+2$，再利用放缩法证明 $f(x)+\pi>2x+2$ 即可.

证明：(1)由 $g(x)=\ln x+x+3$，得 $g'(x)=\frac{1}{x}+1$. 设切点坐标为$(x_0,g(x_0))$，则$\frac{1}{x_0}+1=2$，解得 $x_0=1$，所以 $g(x_0)=4$，则切点坐标为$(1,4)$，则切线方程为 $y-4=2(x-1)$，即 $y=2x+2$，所以直线 $y=2x+2$ 是曲线 $y=g(x)$的一条切线.

(2)证明：令 $h(x)=g(x)-(2x+2)=\ln x-x+1\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，当 $x\in(0,1)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，当 $x\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right]$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，所以 $h(x)\leqslant h(x)_{max}=h(1)=0$，即 $g(x)\leqslant2x+2\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$. 要证 $f(x)+\pi>g(x)$，只需证 $f(x)+\pi>2x+2$，即证 $2x\sin x+\pi>2x+2$.

令 $m(x)=x-\sin x$，则 $m'(x)=1-\cos x>0$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上恒成立，所以 $m(x)=x-\sin x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，

所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$m(x)>m(0)=0$，即 $x>\sin x$，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x\sin x>2\sin^2x$，

故只需证明当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2\sin^2x+\pi\geqslant2x+2$.

令 $F(x)=2\sin^2x-2x+\pi-2\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，则 $F'(x)=4\sin x\cos x-2=2\sin2x-2\leqslant0$，所以 $F(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$F(x)\geqslant F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times1^2-2\times\frac{\pi}{2}+\pi-2=0$，即 $2\sin^2x+\pi\geqslant2x+2$.

综上，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)+\pi>g(x)$.

变式题 **解**：(1)设函数 $\varphi(x)=f(x)-x=\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-x$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x}+x-1=\frac{x^2}{1+x}$，当 $x\in[0,+\infty)$时，$\varphi'(x)\geqslant0$，则 $\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，即 $f(x)-x\geqslant0$，即 $f(x)\geqslant x$.

(2)证明：设函数 $h(x)=f(x)+1-g(x)=\ln(1+x)+1-\cos x$，当 $x>0$ 时，$1-\cos x\geqslant0$，$\ln(1+x)>0$，则 $h(x)>0$ 恒成立，则 $h(e^{\frac{a}{2}})>0$，$h(b^2)>0$，可得 $f(e^{\frac{a}{2}})+1>g(e^{\frac{a}{2}})$，$f(b^2)+1>g(b^2)$，又 $f(e^{\frac{a}{2}})+1=g(b)$，所以 $g(b)>g(e^{\frac{a}{2}})$. 因为 $g(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$，所以 $g'(x)=x-\sin x$.

令 $\varphi(x)=x-\sin x$，则 $\varphi'(x)=1-\cos x\geqslant0$ 恒成立，

所以 $\varphi(x)=g'(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则当 $x>0$ 时，$g'(x)>g'(0)=0$，所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又 $b>0$，$e^{\frac{a}{2}}>0$，所以 $b>e^{\frac{a}{2}}$. 要证 $f(b^2)+1>g(a+1)$，只需证 $g(b^2)>g(a+1)$，只需证 $b^2>a+1$. 因为 $b>e^{\frac{a}{2}}$，所以 $b^2>e^a$. 设函数 $m(x)=e^x-x-1(x>0)$，则 $m'(x)=e^x-1>0$，所以 $m(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，因为 $a>0$，所以 $m(a)>m(0)=0$，所以 $e^a>a+1$，所以 $b^2>a+1$，得证.

第 19 讲　利用导数研究函数的零点

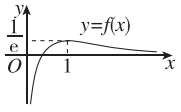
● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】**(1)求出导函数 $f'(x)$，分析导函数的符号，即可得到 $f(x)$的单调区间，从而求解最值；(2)把函数零点问题转化为方程 $a=\frac{\ln x+1}{e^x}$ 的根的个数问题，数形结合即可求解.

解：(1)由函数 $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$，得 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot e^x-(\ln x+1)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{\frac{1}{x}-(\ln x+1)}{e^x}$，

令 $h(x)=\dfrac{1}{x}-(\ln x+1)$，则 $h'(x)=-\dfrac{1+x}{x^2}<0$ 恒成立，所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，且 $h(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，所以当 $x=1$ 时，$f(x)$取得最大值，最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{e}$，$f(x)$无最小值.

(2)函数 $g(x)=ae^x-\ln x-1$ 的零点个数就是方程 $ae^x-\ln x-1=0$ 的根的个数，即方程 $a=\dfrac{\ln x+1}{e^x}$ 的根的个数. $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$，由(1)可知，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，当 $x=1$ 时，$f(x)$取得最大值 $f(1)=\dfrac{1}{e}$，当 $x\to0$ 时，$f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$时，$f(x)>0$ 且 $f(x)\to0$，作出函数 $f(x)$的图象，如图所示.



由图可知，当 $a>\dfrac{1}{e}$时，函数 $g(x)$没有零点；

当 $a=\dfrac{1}{e}$或 $a\leqslant0$ 时，函数 $g(x)$只有一个零点；

当 $0<a<\dfrac{1}{e}$时，函数 $g(x)$有两个零点.

例 2 **[思路点拨]** (1)求导，利用导数判断 $g(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上的单调性，进而由函数零点存在定理证明；(2)对 x 分类讨论，结合导数判断单调性，由函数零点存在定理即可求解.

解：(1)证明：由 $g(x)=\dfrac{2-2x-f(x)}{e^x}=\dfrac{2-x-e^x\sin x}{e^x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，

得 $g'(x)=\dfrac{(2-x-e^x\sin x)'e^x-(2-x-e^x\sin x)(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{-3+x-e^x\cos x}{e^x}$.

因为 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos x\in(0,1)$，$e^x\cos x>0$，$x-3<0$，所以 $-3+x-e^x\cos x<0$，即 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减. 又 $g(0)=2>0$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2-\frac{\pi}{2}-e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi}{2}}}=\dfrac{2-\frac{\pi}{2}-e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}}}<0$，所以 $g(x)$存在唯一零点.

(2)由 $f(x)=e^x\sin x-x$，得 $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-1$，当 $x\leqslant-\dfrac{\pi}{2}$ 时，因为 $e^x\leqslant e^{-\frac{\pi}{2}}$，$\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$，两个等号不能同时取到，所以 $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-1<\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}}-1<\sqrt{2}e^{-1}-1<0$，所以 $f(x)$在$\left(-\infty,-\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减，又 $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{2}=-e^{-\frac{\pi}{2}}+\dfrac{\pi}{2}>0$，所以 $f(x)$在$\left(-\infty,-\dfrac{\pi}{2}\right]$上没有零点.

令 $h(x)=f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-1$，则 $h'(x)=2e^x\cos x$. 当 $-\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$时，$h'(x)=2e^x\cos x\geqslant0$，所以 $f'(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增，又 $f'(0)=0$，所以当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$上单调递减，当 $0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增，又 $f(0)=0$，所以当 $-\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$时，$f(x)$只有 1 个零点. 当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$h'(x)=2e^x\cos x<0$，所以 $f'(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减，又 $f'(\pi)=-e^\pi-1<0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-1>0$，所以存在 $x_0\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，且当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},x_0\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当 $x\in(x_0,\pi)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{\pi}{2}>e-\dfrac{\pi}{2}>0$，$f(\pi)=-\pi<0$，所以当 $\dfrac{\pi}{2}<x<x_0$ 时，$f(x)>0$，此时 $f(x)$无零点，当 $x_0<x<\pi$ 时，$f(x)$只有 1 个零点.

综上可知，当 $x\in(-\infty,\pi)$时，$f(x)$有 2 个零点.

变式题 1 **解**：(1)函数 $f(x)$的定义域为$\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，$f'(x)=\ln(2x+1)+\dfrac{2x}{2x+1}-2ax$. 当 $-\dfrac{1}{2}<x<0$ 时，$0<2x+1<1$，则 $\ln(2x+1)<0$，$\dfrac{2x}{2x+1}<0$，$-2ax<0$，此时 $f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$2x+1>1$，则 $\ln(2x+1)>0$，$\dfrac{2x}{2x+1}>0$，$-2ax>0$，此时 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$在$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以函数 $f(x)$的极小值点为 $x=0$，无极大值点.

(2)当 $a=1$ 时，$f(x)=x\ln(2x+1)-x^2=x[\ln(2x+1)-x]$，函数 $f(x)$的定义域为$\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，且 $f(0)=0$.

令 $g(x)=\ln(2x+1)-x$，其中 $x>-\dfrac{1}{2}$，则 $g'(x)=\dfrac{2}{2x+1}-1=\dfrac{1-2x}{2x+1}$. 令 $g'(x)=0$ 可得 $x=\dfrac{1}{2}$，列表如下：

x	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	单调递增	$\ln2-\frac{1}{2}$	单调递减

所以函数 $g(x)$的单调递增区间为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，单调递减区间为$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，因为 $g(0)=0$，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln2-\dfrac{1}{2}>g(0)=0$，$g(2)=\ln5-2=\ln5-\ln e^2<0$，所以函数 $g(x)$在$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},2\right)$上各有一个零点，且其中一个零点为 $x=0$.

综上所述，当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$的零点个数为 2.

变式题 2 **解**：(1)因为 $f(x)=(2-x)e^x-ax-2$，所以 $f'(x)=(1-x)e^x-a$，由 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，得 $f'(x)\leqslant0$，即 $(1-x)e^x-a\leqslant0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立.

令 $g(x)=(1-x)e^x-a$，则 $g'(x)=-xe^x$.

当 $x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

当 $x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减.

故 $g(x)_{\max}=g(0)=1-a$，由 $1-a\leqslant0$，解得 $a\geqslant1$，

故 a 的取值范围为$[1,+\infty)$.

(2)证明：由(1)可知，$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，当 $0\leqslant a<1$ 时，$f'(0)=1-a>0$，$f'(1)=-a\leqslant0$，

故存在 $x_1\in(0,1]$，使得 $f'(x_1)=0$.

当 $x\in(0,x_1)$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增；

当 $x\in(x_1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$单调递减.

因为 $f(0)=0$，$f(2)=-2a-2<0$，所以 $f(x)$在$(0,2)$上只有一个零点 x_0，故函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上只有一个零点 x_0.

因为 $0<x_0<2$，所以要证 $x_0<\dfrac{e}{a+1}$，即证 $ax_0+x_0-e<0$，只

19933516

需证 $ax_0+2-e\leqslant 0$.

由 $f(x_0)=(2-x_0)e^{x_0}-ax_0-2=0$,得 $(2-x_0)e^{x_0}=ax_0+2$,所以只需证 $(2-x_0)e^{x_0}-e\leqslant 0$.

令 $h(x)=(2-x)e^x-e$,$0<x<2$,则 $h'(x)=(1-x)e^x$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增;

当 $x\in(1,2)$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减.

故 $h(x)_{max}=h(1)=0$,故 $(2-x_0)e^{x_0}-e\leqslant 0$,原不等式得证.

例 3 **【思路点拨】**(1)设出切点坐标,根据导数的几何意义列出方程组,求出切点的横坐标,进而可求得 a 的值;(2)由题意可得 $e^x-ax^2-x+1=0$ 只有一个根,可转化为直线 $y=a$ 与 $h(x)=\dfrac{e^x-x+1}{x^2}$ 的图象只有一个交点,根据导数研究函数 $h(x)$ 的单调性,数形结合即可求解.

解:(1)设直线 $y=x-1$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切于点 (x_0,y_0),因为 $f'(x)=e^x-2ax$,所以 $\begin{cases}e^{x_0}-2ax_0=1①,\\ y_0=x_0-1②,\\ y_0=e^{x_0}-ax_0^2③,\end{cases}$ 由②③可得 $e^{x_0}-ax_0^2=x_0-1$④,易知 $x_0\neq 0$.

由①得 $a=\dfrac{e^{x_0}-1}{2x_0}$,代入④可得 $e^{x_0}-\dfrac{e^{x_0}-1}{2x_0}\cdot x_0^2=x_0-1$,

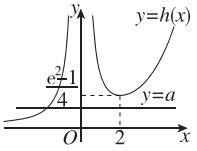
即 $2e^{x_0}-x_0e^{x_0}+x_0=2x_0-2$,

即 $(2-x_0)e^{x_0}=x_0-2$,解得 $x_0=2$,

故 $a=\dfrac{e^2-1}{2\times 2}=\dfrac{e^2-1}{4}$.

(2)令 $g(x)=f(x)-x+1=0$,可得 $e^x-ax^2-x+1=0$,由题意可得 $e^x-ax^2-x+1=0$ 只有一个根.

易知 $x=0$ 不是方程 $e^x-ax^2-x+1=0$ 的根,所以 $a=\dfrac{e^x-x+1}{x^2}$ 只有一个根.



设 $h(x)=\dfrac{e^x-x+1}{x^2}$,则直线 $y=a$ 与 $h(x)=\dfrac{e^x-x+1}{x^2}$ 的图象只有一个交点.

易知 $h'(x)=\dfrac{(e^x-1)x^2-2x(e^x-x+1)}{x^4}=\dfrac{(e^x+1)(x-2)}{x^3}$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$h'(x)>0$,函数 $h(x)$ 单调递增;

当 $x\in(0,2)$ 时,$h'(x)<0$,函数 $h(x)$ 单调递减;

当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$h'(x)>0$,函数 $h(x)$ 单调递增.

设 $t(x)=e^x-x+1$,则 $t'(x)=e^x-1$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$t'(x)<0$,函数 $t(x)$ 单调递减;

当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$t'(x)>0$,函数 $t(x)$ 单调递增.

所以 $t(x)\geqslant t(0)=2$,所以 $h(x)=\dfrac{e^x-x+1}{x^2}>0$.

$h(2)=\dfrac{e^2-2+1}{2^2}=\dfrac{e^2-1}{4}$,当 $x\to-\infty$ 时,$h(x)\to 0$,当 $x\to 0^-$ 时,$h(x)\to+\infty$,当 $x\to 0^+$ 时,$h(x)\to+\infty$,当 $x\to+\infty$ 时,$h(x)\to+\infty$,作出直线 $y=a$ 与函数 $h(x)$ 的图象,如图所示.

由图可知,若直线 $y=a$ 与 $h(x)=\dfrac{e^x-x+1}{x^2}$ 的图象只有一个交点,

则 $0<a<\dfrac{e^2-1}{4}$,所以实数 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{e^2-1}{4}\right)$.

变式题 **解:**(1)当 $a\neq 0$,$b=0$ 时,$f(x)=axe^{ax}$,

$f'(x)=ae^{ax}+a^2xe^{ax}=e^{ax}(a^2x+a)$,

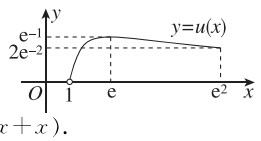
当 $x<-\dfrac{1}{a}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,

当 $x>-\dfrac{1}{a}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,

$\therefore f(x)_{极小值}=f\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-\dfrac{1}{e}$,$f(x)$ 无极大值.

(2)当 $a=0$ 时,$g(x)=be^{(b-1)x}-\ln x-x$,当 $x\in(1,e^2]$ 时,令 $g(x)=0$,则 $be^{(b-1)x}=\ln x+x$,

即 $be^{bx}=e^x(\ln x+x)$,即 $bxe^{bx}=xe^x(\ln x+x)$,即 $bxe^{bx}=e^{x+\ln x}(\ln x+x)$.



$\because x\in(1,e^2]$,$\therefore \ln x+x>0$,$\therefore b>0$.

令 $h(x)=xe^x$,则 $h(bx)=h(x+\ln x)$,$\because h'(x)=(x+1)e^x>0$ 在 $(1,e^2]$ 上恒成立,$\therefore h(x)$ 在 $(1,e^2]$ 上单调递增,

$\therefore bx=x+\ln x$,$\therefore b=1+\dfrac{\ln x}{x}$,$\therefore b-1=\dfrac{\ln x}{x}$.

令 $u(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,$x\in(1,e^2]$,则 $u'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x\in(1,e)$ 时,$u'(x)>0$,$u(x)$ 单调递增;当 $x\in(e,e^2]$ 时,$u'(x)<0$,$u(x)$ 单调递减.

又 $u(1)=0$,$u(e)=\dfrac{1}{e}$,$u(e^2)=\dfrac{2}{e^2}$,$\therefore y=u(x)$ 的大致图象如图所示.

由图可知,要使 $be^{(b-1)x}=\ln x+x$ 在 $(1,e^2]$ 上有两个不同的根,

只需 $\dfrac{2}{e^2}\leqslant b-1<\dfrac{1}{e}$,即 $\dfrac{2}{e^2}+1\leqslant b<\dfrac{1}{e}+1$,

$\therefore b$ 的取值范围为 $\left[\dfrac{2}{e^2}+1,\dfrac{1}{e}+1\right)$.

第 20 讲　双变量不等式的证明

● 课堂考点探究

例 1 **解:**(1)函数 $f(x)=ax\ln x-x+1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=a\ln x+a-1$.

①当 $a=0$ 时,$f'(x)=-1<0$,此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;

②当 $a>0$ 时,由 $f'(x)>0$,可得 $x>e^{\frac{1-a}{a}}$,由 $f'(x)<0$,可得 $0<x<e^{\frac{1-a}{a}}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0,e^{\frac{1-a}{a}})$ 上单调递减,在 $(e^{\frac{1-a}{a}},+\infty)$ 上单调递增;

③当 $a<0$ 时,由 $f'(x)<0$,可得 $x>e^{\frac{1-a}{a}}$,由 $f'(x)>0$,可得 $0<x<e^{\frac{1-a}{a}}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0,e^{\frac{1-a}{a}})$ 上单调递增,在 $(e^{\frac{1-a}{a}},+\infty)$ 上单调递减.

(2)证明:设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$,则 $g'(x)=\dfrac{-(x\ln x-x+1)}{x(x-1)^2}$,

由(1)可得当 $a=1$ 时,$f(x)=x\ln x-x+1$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

又此时 $f(1)=0$,$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$x\ln x-x+1>0$,

$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

又 $p>q>1$,$\therefore g(p)<g(q)$,即 $\dfrac{\ln p}{p-1}<\dfrac{\ln q}{q-1}$,

$\therefore q\ln p-\ln p<p\ln q-\ln q$,

$\therefore q\ln p+\ln q<p\ln q+\ln p$.

变式题 **解:**(1)由 $f(x)=e^x+bx$,得 $f'(x)=e^x+b$.

当 $b\geqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增;

当 $b<0$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $x>\ln(-b)$,令 $f'(x)<0$,得 $x<\ln(-b)$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-b))$ 上单调递减,在 $(\ln(-b),+\infty)$ 上单调递增.

(2)由题意知 $f(x_1)-f(x_2)<(x_1-x_2)(mx_1+mx_2+1)$,$x_2>x_1>0$,即 $f(x_1)-mx_1^2-x_1<f(x_2)-mx_2^2-x_2$,

即函数 $\varphi(x)=f(x)-mx^2-x=e^x-mx^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以只需 $\varphi'(x)=e^x-2mx\geqslant 0(x>0)$,即 $2m\leqslant\dfrac{e^x}{x}$ $(x>0)$.

令 $h(x)=\dfrac{e^x}{x}$ $(x>0)$,则 $h'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$,由 $h'(x)=0$,得 $x=1$,当 $h'(x)<0$ 时,$0<x<1$,当 $h'(x)>0$ 时,$x>1$,

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x)_{min}=h(1)=e$,则 $2m\leqslant e$,即 $m\leqslant\dfrac{e}{2}$,

所以实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{e}{2}\right]$.

例 2 **【思路点拨】**由条件可得 $x_2=-x_1$,$m=x_1x_2+4$,由此可得要证 $f(-x_1)-2x_1+f(x_2)>0$,只需证 $(2+x_2)\ln(x_2+2)-\dfrac{x_2}{2}>0$,利用导数研究函数 $g(x)=(2+x)\ln(x+2)-\dfrac{x}{2}$ $(0<x<2)$ 的单调性,由此完成证明.

证明:因为函数 $f(x)=m\ln(x+2)+\dfrac{x^2}{2}-2x$,所以 $f(x)$ 的

定义域为$(-2,+\infty)$，$f'(x)=\frac{m}{x+2}+x-2=\frac{x^2+(m-4)}{x+2}$ $(x>-2)$.
因为$f'(x)=0$的两根为x_1,x_2且$-2<x_1<x_2$，
所以$-4<m-4<0$，即$0<m<4$，其中$x_1=-\sqrt{4-m}>-2$，$x_2=\sqrt{4-m}$，
所以$x_1+x_2=0$，$x_1x_2=m-4$且$x_2\in(0,2)$，
则$x_2=-x_1$，$m=x_1x_2+4$，
所以$f(-x_1)=f(x_2)$，$m=x_1x_2+4=4-x_2^2$.
要证$f(-x_1)-2x_1+f(x_2)>0$，
只需证$2f(x_2)-2x_1>0$，只需证$f(x_2)+x_2>0$，
即证$m\ln(x_2+2)+\frac{x_2^2}{2}-x_2>0$，即证$(4-x_2^2)\ln(x_2+2)+\frac{x_2^2}{2}-x_2>0$，即证$(2+x_2)\ln(x_2+2)-\frac{x_2}{2}>0$.
令$g(x)=(2+x)\ln(x+2)-\frac{x}{2}(0<x<2)$，
则$g'(x)=\ln(x+2)+\frac{1}{2}>\ln 2+\frac{1}{2}>0$，
所以$g(x)$在$(0,2)$上单调递增，且$g(0)=2\ln 2>0$，
故$g(x)>g(0)>0$，所以$f(-x_1)-2x_1+f(x_2)>0$.

变式题 **解**：(1)当$a=1$时，$f(x)=\ln(1+x)+\frac{1}{2}x^2-x$，$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x+1}+x-1=\frac{x^2}{x+1}$.
因为$x>-1$，所以$f'(x)\geqslant 0$，
则$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增.
(2)证明：由题意得$f'(x)=\frac{a}{x+1}+x-1=\frac{x^2-1+a}{x+1}$.
当$a\geqslant 1$时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，不合题意.
当$a<1$时，令$f'(x)=0$，得$x^2=1-a$.
当$a\leqslant 0$时，令$f'(x)=0$，得$x=\sqrt{1-a}$，则$f(x)$只有一个极值点，不合题意.
当$0<a<1$时，令$f'(x)=0$，得$x_1=-\sqrt{1-a}$，$x_2=\sqrt{1-a}$，则$x_1x_2=a-1$，$x_1+x_2=0$，
故$a=x_1x_2+1=1-x_2^2$.
要证$f(x_2)>\frac{x_1}{2}$，即证$a\ln(1+x_2)+\frac{1}{2}x_2^2-x_2>\frac{x_1}{2}$，
即证$2a\ln(1+x_2)+x_2^2-2x_2-x_1>0$，
即证$2(1-x_2^2)\ln(1+x_2)+x_2^2-x_2>0$，
又$x_2=\sqrt{1-a}\in(0,1)$，所以要证$f(x_2)>\frac{x_1}{2}$，
即证$\ln(1+x_2)-\frac{x_2}{2(1+x_2)}>0$.
构造函数$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{2(1+x)}$，$x\in(0,1)$，
则$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{4(x+1)^2}=\frac{2x+1}{2(1+x)^2}>0$，即$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，
则$g(x)>g(0)=0$，所以$f(x_2)>\frac{x_1}{2}$.

例3 **【思路点拨】** 思路一：根据题意得$\ln x_1-\ln x_2+\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)=0$，进而令$t=\frac{x_1}{x_2}(0<t<1)$，得$x_1+x_2=\frac{t-\frac{1}{t}}{\ln t}$，构造函数$h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(0<t<1)$，利用导数判断函数$h(t)$的单调性，进而证明. 思路二：由题知方程$\ln x+\frac{1}{x}=m-1$有两个不同的实数根$x_1,x_2$，构造函数$G(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$x>0$，$\varphi(x)=\ln x+\frac{1}{x}-\ln(2-x)-\frac{1}{2-x}$，$x\in(0,1)$，进而利用导数求证即可.

证明：方法一：$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$，$x>0$.
因为x_1,x_2为方程$f(x)=m$的两个不同的实数根，
所以$\ln x_1+\frac{1}{x_1}+1=m$①，$\ln x_2+\frac{1}{x_2}+1=m$②.
由①－②得$\ln x_1-\ln x_2+\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)=0$，即$\ln\frac{x_1}{x_2}=-\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$，所以$x_1x_2=\frac{x_1-x_2}{\ln\frac{x_1}{x_2}}$.
令$t=\frac{x_1}{x_2}(0<t<1)$，则$x_1=\frac{x_1-x_2}{x_2\ln\frac{x_1}{x_2}}=\frac{t-1}{\ln t}$，
所以$x_2=\frac{x_1}{t}=\frac{1-\frac{1}{t}}{\ln t}$，可得$x_1+x_2=\frac{t-\frac{1}{t}}{\ln t}$.
令$h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(0<t<1)$，
则$h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2>0$，
所以函数$h(t)$在$(0,1)$上单调递增，
则当$t\in(0,1)$时，$h(t)<h(1)=0$，即$t-\frac{1}{t}<2\ln t$，
又$\ln t<0$，所以对任意的$t\in(0,1)$，$\frac{t-\frac{1}{t}}{\ln t}>2$恒成立，
即$x_1+x_2>2$，得证.
方法二：$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$，$x>0$.
因为x_1,x_2为方程$f(x)=m$的两个不同的实数根，所以方程$\ln x+\frac{1}{x}+1=m$，即方程$\ln x+\frac{1}{x}=m-1$有两个不同的实数根x_1,x_2.
令$G(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$x>0$，
则$G'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，$x>0$.
令$G'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=0$，得$x=1$.
当$x\in(0,1)$时，$G'(x)<0$，所以$G(x)$在$(0,1)$上单调递减；
当$x\in(1,+\infty)$时，$G'(x)>0$，所以$G(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$0<x_1<1<x_2$.
当$0<x<1$时，$G(x)-G(2-x)=\ln x+\frac{1}{x}-\ln(2-x)-\frac{1}{2-x}$，令$\varphi(x)=\ln x+\frac{1}{x}-\ln(2-x)-\frac{1}{2-x}$，$x\in(0,1)$，
则$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{-2}{x(x-2)}-\frac{2x^2-4x+4}{x^2(x-2)^2}=\frac{-4(x-1)^2}{x^2(x-2)^2}<0$，
所以$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，
即当$0<x<1$时，$G(x)-G(2-x)>0$，
所以当$0<x<1$时，$G(x)>G(2-x)$，
所以$G(x_2)=G(x_1)>G(2-x_1)$.
又$G(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，
所以$x_2>2-x_1$，即$x_1+x_2>2$，得证.

变式题 **解**：(1)由题可知，$f'(x)=\frac{x+a-x\ln x}{x(x+a)^2}$，
则$f'(1)=\frac{1+a}{(1+a)^2}=\frac{1}{1+a}$，
又直线$x+y+1=0$的斜率$k=-1$，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与直线$x+y+1=0$垂直，
所以$f'(1)=\frac{1}{1+a}=1$，解得$a=0$.
$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，
所以当$x\in(0,\mathrm{e})$时，$f'(x)>0$，
当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$f'(x)<0$，
所以$f(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，
所以$f(2023)>f(2024)$，即$\frac{\ln 2023}{2023}>\frac{\ln 2024}{2024}$，

即 $2024\ln 2023>2023\ln 2024$，即 $\ln 2023^{2024}>\ln 2024^{2023}$，所以 $2023^{2024}>2024^{2023}$.

(2)证明：不妨设 $x_1>x_2>0$，所以 $g(x_1)=g(x_2)=0$，化简得 $\ln x_1-kx_1=0$，$\ln x_2-kx_2=0$，

则 $\ln x_1+\ln x_2=k(x_1+x_2)$，$\ln x_1-\ln x_2=k(x_1-x_2)$.

要证 $x_1\cdot x_2>e^2$，即证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，

即证 $k(x_1+x_2)>2$，因为 $k=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，所以只需证 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\dfrac{2}{x_1+x_2}$，即证 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\dfrac{\frac{2x_1}{x_2}-2}{\frac{x_1}{x_2}+1}$.

设 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$，因为 $x_1>x_2>0$，所以 $t>1$，

即证 $\ln t>\dfrac{2t-2}{t+1}$ $(t>1)$.

设 $h(t)=\ln t-\dfrac{2t-2}{t+1}(t>1)$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，所以函数 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(t)>h(1)=0$，即 $\ln t-\dfrac{2t-2}{t+1}>0(t>1)$，

即 $\ln t>\dfrac{2t-2}{t+1}(t>1)$，所以 $x_1\cdot x_2>e^2$.

第四单元　三角函数、解三角形

第 21 讲　任意角和弧度制、三角函数的概念

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)端点　(2)正角　负角　象限角　(3)$\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

2. 半径长　$|\alpha|r$　$\dfrac{1}{2}|\alpha|r^2$

【对点演练】

1. ①④　**【解析】** 锐角一定是第一象限角，①正确；终边相同的角不一定相等，②错误；小于 90° 的角除锐角外还有零角、负角，③错误；钝角一定是第二象限角，④正确. 故填①④.

2. 6　**【解析】** 设扇形的半径为 R，则 $\dfrac{1}{2}R^2\times 4=2$，得 $R^2=1$，$\therefore R=1$，$\therefore$ 扇形的周长为 $2R+4\cdot R=2+4=6$.

3. 二　**【解析】** 因为 $\sin A>0$，所以角 A 的终边在第一象限或第二象限或 y 轴的正半轴上. 因为 $\tan A<0$，所以角 A 的终边在第二或第四象限上，所以角 A 的终边在第二象限.

4. $\dfrac{1}{2}$　**【解析】** 依题意知 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{-1}{2}$，所以 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

5. -4π　**【解析】** 时钟的分针顺时针旋转，所得的角为负角，又考试时间为 120 分钟，所以从考试开始到结束，时钟的分针旋转了 -4π 弧度.

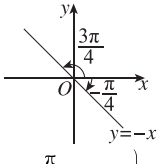
6. 1 或 4　**【解析】** 设扇形的半径为 r，圆心角为 $\alpha(\alpha>0)$，则扇形的弧长 $l=r\alpha$，由题得 $\begin{cases}2r+r\alpha=6,\\ \dfrac{1}{2}r^2\alpha=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=2,\\ \alpha=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=1,\\ \alpha=4,\end{cases}$ 所以扇形的圆心角的弧度数为 1 或 4.

7. $\sin\theta$　**【解析】** $\because\cos\theta<0$，$\tan\theta<0$，$\therefore\theta$ 是第二象限角，$\therefore\sin\theta>0$，$\therefore|\sin\theta-\cos\theta|+\cos\theta=\sin\theta-\cos\theta+\cos\theta=\sin\theta$.

● 课堂考点探究

探究点一

1. D　**【解析】** 如图所示，由图知角 α 构成的集合为 $\left\{\alpha\left|\alpha=2n\pi+\dfrac{3\pi}{4},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}\cup\left\{\alpha\left|\alpha=2n\pi-\dfrac{\pi}{4},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}=\left\{\alpha\left|\alpha=(2n+1)\pi-\dfrac{\pi}{4},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}\cup\left\{\alpha\left|\alpha=2n\pi-\dfrac{\pi}{4},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}=\left\{\alpha\left|\alpha=k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.



故选 D.

2. BCD　**【解析】** 与 -835° 终边相同的角可表示为 $\alpha=-835^\circ+360^\circ k$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，$\alpha=-475^\circ$；当 $k=2$ 时，$\alpha=-115^\circ$；当 $k=3$ 时，$\alpha=245^\circ$；当 $k=4$ 时，$\alpha=605^\circ$. 故选 BCD.

3. AD　**【解析】** 因为 α 是第三象限角，所以 $\pi+2k\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 对于 A，$-\dfrac{3\pi}{2}-2k\pi<-\alpha<-\pi-2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，故 $-\alpha$ 是第二象限角，所以 A 正确. 对于 B，$\dfrac{\pi}{2}+k\pi<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，当 k 为偶数时，$\dfrac{\alpha}{2}$ 是第二象限角；当 k 为奇数时，$\dfrac{\alpha}{2}$ 是第四象限角，所以 B 错误. 对于 C，$\dfrac{5\pi}{2}+2k\pi<\dfrac{3\pi}{2}+\alpha<3\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\dfrac{\pi}{2}+2(k+1)\pi<\dfrac{3\pi}{2}+\alpha<\pi+2(k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\dfrac{3\pi}{2}+\alpha$ 是第二象限角，所以 C 错误. 对于 D，$2\pi+4k\pi<2\alpha<3\pi+4k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 2α 的终边在第一象限或第二象限或 y 轴正半轴上，所以 D 正确. 故选 AD.

4. 136°(或 -224°)　**【解析】** $\because-2024^\circ=-6\times 360^\circ+136^\circ$，$\therefore$ 在 $-360^\circ\sim 360^\circ$ 范围内，角 -2024° 的终边与角 136° 的终边相同，$\because-2024^\circ=-5\times 360^\circ-224^\circ$，$\therefore$ 在 $-360^\circ\sim 360^\circ$ 范围内与角 -2024° 终边相同的另一个角是 -224°.

例 1　**【思路点拨】** (1)由弧长公式即可得出弧长，弓形的面积等于扇形的面积减去三角形的面积；(2)由周长为定值可得出弧长和半径的关系，再把扇形的面积用 R 表示出来，运用函数的知识求解即可.

解： 设扇形的弧长为 l.

(1)由 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$R=10$，得 $l=\dfrac{\pi}{3}\times 10=\dfrac{10\pi}{3}$，

$S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10\pi}{3}\times 10-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 10^2=\dfrac{50\pi}{3}-25\sqrt{3}$.

(2)易知 $l+2R=20$，则 $l=20-2R(0<R<10)$，$\therefore S_{扇形}=\dfrac{1}{2}lR=\dfrac{1}{2}(20-2R)\cdot R=-R^2+10R=-(R-5)^2+25$，

$\therefore$ 当 $R=5$ 时，$S_{扇形}$ 取得最大值 25，此时 $l=10$，$\alpha=\dfrac{l}{R}=2$.

因此当 $\alpha=2$ 时，这个扇形的面积最大.

变式题　(1)ABC　(2) D　**【解析】** (1)由题意知 $2r+l=4$，扇形的面积 $S=\dfrac{1}{2}lr$，$l=\alpha r$(α 为扇形的圆心角的弧度数，$\alpha>0$).

对于选项 A，当 $r=1$ 时，$l=2$，可得 $S=\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$，故选项 A 正确；对于选项 B，C，$S=\dfrac{1}{2}(4-2r)r=(2-r)r=-r^2+2r=-(r-1)^2+1$，当 $r=1$ 时，S 取得最大值 1，此时 $l=2$，$\alpha=2$，故选项 B，C 正确；对于选项 D，当 $r=1$ 时，$l=2$，此时 $\dfrac{2}{r}+\dfrac{1}{l}=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}<9$，故选项 D 不正确. 故选 ABC.

(2)设 $\angle BOC=\alpha$，则 $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{OA\cdot\alpha}{OB\cdot\alpha}=3$，所以 $\dfrac{OA}{OB}=3$，所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{1}{2}\alpha\cdot OA^2-\frac{1}{2}\alpha\cdot OB^2}{\frac{1}{2}\alpha\cdot OB^2}=\dfrac{OA^2-OB^2}{OB^2}=\dfrac{9OB^2-OB^2}{OB^2}=8$，故选 D.

例 2　**【思路点拨】** (1)根据三角函数的定义得到 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，再根据特殊角的三角函数判断即可. (2)对于 A 选项，利用三角函数的定义计算即可；对于 B，C 选项，先判断角 α 终边所过的点，再用三角函数的定义求解；对于 D 选项，利用定义求出三角函数值，再判断点所在象限.

(1)B　(2)ACD　**【解析】**(1)依题意可得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $\alpha=30°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$ 或 $\alpha=-30°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,所以 α 的一个可能取值为 $-30°$. 故选 B.

(2)因为角 θ 的终边经过点 $(2,-\sqrt{3})$,所以 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{21}}{7}$,A 正确;因为 θ 与 α 的终边关于原点对称,所以角 α 的终边经过点 $(-2,\sqrt{3})$,所以 α 为第二象限角,但不一定为钝角,B 错误;$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$,C 正确;因为 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$,$\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}>0$,所以点 $(\tan\theta,\sin\alpha)$ 在第二象限,D 正确. 故选 ACD.

变式题　(1)AB　(2)$-\frac{\sqrt{6}}{4}$　$\frac{\sqrt{15}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{15}}{3}$　**【解析】**(1)在角 θ 的终边所在的直线 $y=-2x$ 上任取一点 $P(a,-2a)(a\neq0)$,则 $r=|OP|=\sqrt{5}|a|$(O 为坐标原点). 由三角函数的定义知 $\sin\theta=\frac{-2a}{\sqrt{5}|a|}$,$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{5}|a|}$. 当 $a>0$ 时,$2\sin\theta+\cos\theta=2\times\frac{-2a}{\sqrt{5}a}+\frac{a}{\sqrt{5}a}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$;当 $a<0$ 时,$2\sin\theta+\cos\theta=2\times\frac{-2a}{-\sqrt{5}a}+\frac{a}{-\sqrt{5}a}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 故选 AB.

(2)设 $P(x,y)$,由题设知 $x=-\sqrt{3}$,$y=m$,所以 $r^2=|OP|^2=(-\sqrt{3})^2+m^2$($O$ 为原点),即 $r=\sqrt{3+m^2}$,因为 $\sin\alpha=\frac{m}{r}=\frac{\sqrt{2}m}{4}=\frac{m}{2\sqrt{2}}$,所以 $r=\sqrt{3+m^2}=2\sqrt{2}$,即 $3+m^2=8$,解得 $m=\pm\sqrt{5}$. 当 $m=\sqrt{5}$ 时,$r=2\sqrt{2}$,$x=-\sqrt{3}$,$y=\sqrt{5}$,所以 $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$,$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{3}$;当 $m=-\sqrt{5}$ 时,$r=2\sqrt{2}$,$x=-\sqrt{3}$,$y=-\sqrt{5}$,所以 $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$,$\tan\alpha=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

例 3　**【思路点拨】**(1)根据三角函数确定横坐标和纵坐标的正负即可求解. (2)由题可知 α 为第四象限角,由此可得角 α 的三角函数值的正负,再依次判断各选项的正负即可.

(1)D　(2)BD　**【解析】**(1)因为 α 是第二象限角,所以 $0<\sin\alpha<1$,$-1<\cos\alpha<0$,所以 $\cos(\sin\alpha)>0$,$\sin(\cos\alpha)<0$,所以点 $(\cos(\sin\alpha),\sin(\cos\alpha))$ 在第四象限. 故选 D.

(2)因为角 α 的终边经过点 $P(1,m)(m<0)$,所以 α 为第四象限角,则 $\sin\alpha<0$,$\cos\alpha>0$,$\tan\alpha<0$. $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的正负无法判断,$\cos\alpha-\sin\alpha>0$,$\sin\alpha\cos\alpha<0$,$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}>0$. 故选 BD.

变式题　(1)D　(2)BC　**【解析】**(1)方法一:由 α 为第四象限角,可得 $\frac{3\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $3\pi+4k\pi<2\alpha<4\pi+4k\pi,k\in\mathbf{Z}$,故 2α 的终边在第三象限或第四象限或 y 轴的非正半轴上,所以 $\sin2\alpha<0$,故选 D.

方法二:当 $\alpha=-\frac{\pi}{3}$ 时,$\cos2\alpha=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)<0$,选项 A 错误;当 $\alpha=-\frac{\pi}{6}$ 时,$\cos2\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)>0$,选项 B 错误;由 α 为第四象限角可得 $\sin\alpha<0$,$\cos\alpha>0$,则 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha<0$,选项 C 错误,选项 D 正确. 故选 D.

(2)因为 $\sin\alpha>0$,$\tan\alpha<0$,所以 α 为第二象限角,$\cos\alpha<0$,$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,A 错误;若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$,则 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,D 错误;$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha<0$,C 正确;因为 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,若 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$,则 $\frac{\pi}{4}+2n\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+2n\pi(n\in\mathbf{Z})$,则 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角,若 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$,则 $\frac{5\pi}{4}+2n\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{2}+2n\pi(n\in\mathbf{Z})$,则 $\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角,B 正确. 故选 BC.

第 22 讲　同角三角函数的基本关系式与诱导公式

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　(2)$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

2. $-\sin\alpha$　$\tan\alpha$

【对点演练】

1. $-\frac{4}{5}$　$\frac{4}{3}$　**【解析】**∵ $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,且 α 为第三象限角,∴ $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{4}{5}$,∴ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$.

2. $-\frac{23}{16}$　**【解析】**由 $\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{3\sin\alpha+5\cos\alpha}=-5$,知 $\cos\alpha\neq0$,等式左边分子分母同时除以 $\cos\alpha$,可得 $\frac{\tan\alpha-2}{3\tan\alpha+5}=-5$,解得 $\tan\alpha=-\frac{23}{16}$.

3. $-\frac{3}{5}$　**【解析】**∵ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,∴ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,∴ $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

4. $-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$　**【解析】**因为 $\tan\alpha=k$,α 为钝角,所以 $k<0$,$\sin\alpha>0$,且 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=k$①,又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$②,所以由①②可得 $\sin\alpha=-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

5. 2 或 -2　**【解析】**当 k 为偶数时,$A=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}=2$;当 k 为奇数时,$A=\frac{-\sin\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}=-2$. 故 $A=2$ 或 -2.

6. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　**【解析】**∵ $\sin\alpha=\frac{1}{3}>0,\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,∴ $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,∴ $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,∴ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$,∴ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】**(1)首先由所给条件判断出角是第几象限角,利用平方关系与商数关系求解即可. (2)利用平方关系式,把分子、分母中的 1 代换为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 整理化简即可.

(1)0　(2)1　**【解析】**(1)∵ $\cos\alpha=-\frac{12}{13}<0$ 且 $\cos\alpha\neq-1$,∴ α 是第二或第三象限角. 若 α 是第二象限角,则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$,∴ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}$,此时 $13\sin\alpha+12\tan\alpha=13\times\frac{5}{13}+12\times\left(-\frac{5}{12}\right)=0$. 若 α 是第三象限角,则 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$,∴ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}$,此时 $13\sin\alpha+12\tan\alpha=13\times\left(-\frac{5}{13}\right)+12\times\frac{5}{12}=0$. 综上,$13\sin\alpha+12\tan\alpha=0$.

(2)$\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-2\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=1$.

变式题　(1)1　(2)$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　**【解析】**(1)由 $\tan\alpha=\cos\alpha$,得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$,即 $\sin\alpha=\cos^2\alpha$,则 $\sin\alpha=(1-\sin\alpha)(1+$

$\sin\alpha$)，即 $\frac{1}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}$，所以 $\frac{1}{1-\sin\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}=1$.

(2)方法一：因为 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\theta=2\sin\theta$，代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 得 $\sin^2\theta=\frac{1}{5}$，因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

方法二：$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=1-\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{5}$，因为 $\tan\theta=\frac{1}{2}<1$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，所以 $\sin\theta<\cos\theta$，所以 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

例 2 **[思路点拨]** (1)把分子中 $\sin\theta$ 化为 $\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$，整理得到关于 $\sin\theta,\cos\theta$ 的齐次式，再利用同角公式化为关于 $\tan\theta$ 的表达式求解. (2)利用同角三角函数的关系化 $3\sin^2x-2\sin x\cos x$ 的分母为 $\sin^2x+\cos^2x$，结合 $\tan x=\sqrt{3}$ 即可求解.

(1)A　(2)$\frac{9-2\sqrt{3}}{4}$　**[解析]** (1)因为 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\sin^3\theta+\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{\sin^3\theta+\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{2\sin^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{2\tan^3\theta+\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

(2)因为 $\tan x=\sqrt{3}$，所以 $3\sin^2x-2\sin x\cos x=\frac{3\sin^2x-2\sin x\cos x}{\sin^2x+\cos^2x}=\frac{3\tan^2x-2\tan x}{1+\tan^2x}=\frac{3\times(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2}=\frac{9-2\sqrt{3}}{4}$.

变式题 (1)B　(2)$-\frac{5}{3}$　$\frac{13}{5}$　**[解析]** (1)因为第二象限角 α 的终边与单位圆交于 $P\left(m,\frac{3}{5}\right)$ $(m<0)$，所以 $\sqrt{m^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=1$，可得 $m=-\frac{4}{5}$，则 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，所以 $\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-2}{\tan\alpha+1}=-11$，故选 B.

(2)由 $\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}=-1$ 得 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-3}{\tan\alpha+1}=-\frac{5}{3}$. $\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+2=\frac{\tan^2\alpha+\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}+2=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}+2=\frac{13}{5}$.

例 3 **[思路点拨]** (1)利用同角三角函数的关系式的变换求出结果. (2)根据同角三角函数关系式分析运算，注意三角函数值的符号的判断.

(1)B　(2)D　**[解析]** (1)由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，平方得 $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{9}{5}$，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$，则 $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{5}{2}$. 故选 B.

(2)由题意可得 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$，整理得 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{12}{25}>0$，又 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha>0$，因为 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$，所以 $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\frac{12}{25}}{\frac{7}{5}}=\frac{12}{35}$. 故选 D.

变式题 (1)C　(2)$\frac{7}{9}$　**[解析]** (1)因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $2\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，又 $\cos2\alpha=\frac{7}{9}$，所以 $\sin2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，即 $2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\sqrt{1+\frac{4\sqrt{2}}{9}}=\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$. 故选 C.

(2)因为 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$，所以 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$.

例 4 **[思路点拨]** (1)由已知利用诱导公式对分子、分母进行化简，进而求目标式的值. (2)由已知利用诱导公式求 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$，$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值，进而求目标式的值.

(1) B　(2) $-\frac{4}{3}$　**[解析]** (1)原式 $=\frac{-\tan\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)\cdot[-\sin(\pi+\alpha)]}=\frac{\tan\alpha\cdot\cos^2\alpha}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-1$. 故选 B.

(2)$\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2}{3}$，$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2}{3}$，所以原式 $=-\frac{4}{3}$.

变式题 (1)A　(2)$\frac{7}{4}$　**[解析]** (1)$\sin613^\circ+\cos1063^\circ+\tan(-30^\circ)=\sin(180^\circ+73^\circ)+\cos(-17^\circ)-\tan30^\circ=-\sin73^\circ+\cos(-17^\circ)-\tan30^\circ=-\cos17^\circ+\cos17^\circ-\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 A.

(2)因为 $\sin(\alpha-3\pi)=2\sin\left(-\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$，所以 $-\sin(3\pi-\alpha)=-2\cos\alpha$，得 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，所以 $\frac{\sin(\pi-\alpha)-5\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{2\cos(2\pi-\alpha)-\sin(-\alpha)}=\frac{\sin\alpha+5\cos\alpha}{2\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{2\cos\alpha+5\cos\alpha}{2\cos\alpha+2\cos\alpha}=\frac{7}{4}$.

例 5 **[思路点拨]** (1)根据诱导公式进行化简；(2)首先化简 $\cos\left(\beta-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}$，根据 β 为第三象限角及同角三角函数基本关系式 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ 求 $\cos\beta$，确定 $f(\beta)$ 的值.

解：(1) $f(\alpha)=\frac{\sin(\alpha-3\pi)\cos(\pi-\alpha)\sin\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(-\pi-\alpha)\tan(-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}=\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)\cos\alpha}{(-\cos\alpha)(-\tan\alpha)\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\cos\alpha$，$\therefore f(\alpha)=\cos\alpha$，$\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)$\because\cos\left(\beta-\frac{3\pi}{2}\right)=-\sin\beta$，$\therefore\sin\beta=-\frac{1}{3}$，$\because\beta$ 为第三象限角，$\therefore\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore f(\beta)$ 的值为 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

变式题 (1)B (2)C **【解析】**(1)由 $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\cos x}$,得 $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}=\frac{1}{\cos x}$,即 $\frac{-\cos x}{-\sin x}=\frac{1}{\cos x}$,则 $\cos^2 x=\sin x$,所以 $\sin^2 x+\sin x-1=0$,又 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$,所以 $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,故选 B.

(2)由已知得 $\begin{cases}3\sin\beta-2\tan\alpha+5=0,\\ \tan\alpha-6\sin\beta-1=0,\end{cases}$ 消去 $\sin\beta$,得 $\tan\alpha=3$,∴$\sin\alpha=3\cos\alpha$,又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,∴$\sin^2\alpha=\frac{9}{10}$. ∵$\alpha$ 为锐角,∴$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 故选 C.

第 23 讲　两角和与差的三角函数公式与二倍角的三角函数公式

● 课前基础巩固

【对点演练】

1. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **【解析】** $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **【解析】** 方法一:$\sin 20^\circ\cos 40^\circ-\cos 160^\circ\sin 40^\circ=\cos 70^\circ\cos 40^\circ+\sin 70^\circ\sin 40^\circ=\cos(70^\circ-40^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 方法二:$\sin 20^\circ\cos 40^\circ-\cos 160^\circ\sin 40^\circ=\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\cos 20^\circ\sin 40^\circ=\sin(20^\circ+40^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\pm\frac{24}{25}$ **【解析】** 因为 $\cos(\alpha-\pi)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\frac{4}{5}$,所以 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,所以 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{3}{5}$,所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\left(\pm\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\pm\frac{24}{25}$.

4. -3　$-\frac{4}{3}$ **【解析】** $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{2+1}{1-2}=-3$,$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$.

5. $-\frac{7}{25}$ **【解析】** ∵$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$,∴$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1-\frac{32}{25}=-\frac{7}{25}$.

6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **【解析】** $\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}=\frac{\tan 45^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ-15^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ **【解析】** 由 $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=\frac{3}{5}$,得 $\sin[(\alpha-\beta)-\alpha]=\frac{3}{5}$,即 $\sin(-\beta)=\frac{3}{5}$,所以 $\sin\beta=-\frac{3}{5}$. 又 β 是第三象限角,所以 $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$,因此 $\sin\left(\beta+\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\beta\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\beta\sin\frac{5\pi}{4}=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】**(1)运用两角和与差的正弦公式和同角三角函数的商数关系,计算即可得到所求值.(2)根据同角三角函数基本关系式,以及两角和的余弦公式,即可求解.(3)由两角和的正弦公式和同角三角函数公式将条件化为 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=2$,进而求出 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{3}{2}$,再利用两角和的正切公式即可求值.

(1)B (2)A (3)D **【解析】**(1)因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$,所以 $\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha$,所以 $(\sqrt{3}+1)\cos\alpha=(\sqrt{3}-1)\sin\alpha$,所以 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$. 故选 B.

(2)由 $\tan\alpha=2$,$\sin\beta=\frac{1}{3}$,且 α,β 均为锐角,得 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{15}$. 故选 A.

(3)由 $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$ 得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=2\sin\alpha\sin\beta$,故 $\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=2$,可得 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=2$,所以 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{3}{2}$,所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3}{1-\frac{3}{2}}=-6$,故选 D.

变式题 (1)B (2)$\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$ (3)$-\frac{1}{3}$ **【解析】**(1)因为 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$,所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$. 因为 $\tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$,所以 $\tan\beta=-\frac{1}{2}$,则 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{2}{11}$. 故选 B.

(2)∵$\theta\in(0,\pi)$,∴$\theta+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$,又 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}>0$,∴$\theta+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$,若 $\theta+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)>\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,与 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$ 矛盾,∴$\theta+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,∴$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,∴$\cos\theta=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$.

(3)设 $\alpha+\frac{\pi}{6}=t$,则 $\alpha=t-\frac{\pi}{6}$,$\sin t=\frac{\sqrt{6}}{3}$,∴$\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{6}-2\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)=\cos 2t=1-2\sin^2 t=1-2\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=-\frac{1}{3}$.

例 2 **【思路点拨】**(1)利用诱导公式,逆用两角和的正弦公式计算出答案.(2)思路一:由已知结合辅助角公式及两角和与差的正弦公式对已知等式进行化简可求出 $\alpha-\beta$,进而可求;思路二:根据等式恒成立,取角 α,β 为特殊值分别判断选项.(3)根据两角和的正切公式变形即可得解.

(1)C (2)C (3)2 **【解析】**(1)$\cos 198^\circ\cos 132^\circ+\cos 42^\circ\sin 18^\circ=\cos(180^\circ+18^\circ)\cos(90^\circ+42^\circ)+\cos 42^\circ\sin 18^\circ=\cos 18^\circ\sin 42^\circ+\cos 42^\circ\sin 18^\circ=\sin(42^\circ+18^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

(2)方法一:由 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$,可知 $\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$,即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta=$

$2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta=0$，即 $\sin\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}\right)=0$，所以 $\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=-1$，$k\in\mathbf{Z}$，故选 C.

方法二：取 $\beta=0$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，取 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\tan(\alpha-\beta)=\tan\frac{3}{4}\pi=-1$，排除 B，D；取 $\alpha=0$，则 $\sin\beta+\cos\beta=2\sin\beta$，即 $\sin\beta=\cos\beta$，取 $\beta=\frac{\pi}{4}$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$，排除 A. 故选 C.

(3)因为 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，所以 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=1+\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=1+\tan\frac{\pi}{4}(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=2$.

变式题 (1)ABC (2)A **【解析】**(1)对于 A，因为 $\tan\alpha+\tan\beta=(1-\tan\alpha\tan\beta)\tan(\alpha+\beta)$，所以 $\tan25^\circ+\tan35^\circ+\sqrt{3}\tan25^\circ\tan35^\circ=(1-\tan25^\circ\tan35^\circ)\tan(25^\circ+35^\circ)+\sqrt{3}\tan25^\circ\tan35^\circ=(1-\tan25^\circ\tan35^\circ)\tan60^\circ+\sqrt{3}\tan25^\circ\tan35^\circ=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan25^\circ\tan35^\circ+\sqrt{3}\tan25^\circ\tan35^\circ=\sqrt{3}$；对于 B，$2(\sin35^\circ\cos25^\circ+\cos35^\circ\cos65^\circ)=2(\sin35^\circ\cos25^\circ+\cos35^\circ\sin25^\circ)=2\sin60^\circ=\sqrt{3}$；对于 C，因为 $\tan45^\circ=1$，所以 $\frac{1+\tan15^\circ}{1-\tan15^\circ}=\frac{\tan45^\circ+\tan15^\circ}{1-\tan45^\circ\tan15^\circ}=\tan60^\circ=\sqrt{3}$；对于 D，$\frac{\tan30^\circ}{1-\tan^230^\circ}=\frac{1}{2}\times\frac{2\tan30^\circ}{1-\tan^230^\circ}=\frac{1}{2}\tan60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 ABC.

(2)因为 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\sin x+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$，故选 A.

例 3 **【思路点拨】**(1)先根据 α,β 的取值范围判断 $\alpha+\frac{\pi}{6},\beta-\frac{5\pi}{6}$ 的取值范围，利用同角三角函数公式求出 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，$\sin\left(\beta-\frac{5\pi}{6}\right)$，再利用 $\alpha-\beta=-\pi+\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\left(\beta-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$ 求解.(2)根据同角三角函数基本关系求出 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值，再利用两角差的正切公式计算 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$ 即可求解.

(1)A (2)-7 **【解析】**(1)由题意可得 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta-\frac{5\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{5}$，$\sin\left(\beta-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{12}{13}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=-\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\left(\beta-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{16}{65}$，故选 A.

(2)因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right)$，因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}>0$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$，所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$，所以 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{3}{4}-1}{1-\frac{3}{4}\times1}=-7$.

变式题 (1)B (2)$\frac{4}{5}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **【解析】**(1)因为 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，且 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$. 由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，得 $0<\beta-\alpha<\pi$，又因为 $\cos(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{10}$，所以 $\sin(\beta-\alpha)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，所以 $\cos\beta=\cos[(\beta-\alpha)+\alpha]=\cos(\beta-\alpha)\cos\alpha-\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{3}{5}-\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{4}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

第 24 讲　简单的三角恒等变换

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. (1)$2\sin^2\frac{\alpha}{2}$　$2\cos^2\frac{\alpha}{2}$　(2)$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$

(3)$\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$　$\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$　(4)$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$

【对点演练】

1. $-\sqrt{2}$ **【解析】**$\cos75^\circ-\sqrt{3}\sin75^\circ=2\times\left(\frac{1}{2}\cos75^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin75^\circ\right)=2(\sin30^\circ\cos75^\circ-\cos30^\circ\sin75^\circ)=2\sin(30^\circ-75^\circ)=2\sin(-45^\circ)=-\sqrt{2}$.

2. π **【解析】**$f(x)=\sin^2x-\frac{1}{2}=-\frac{\cos2x}{2}$，故 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

3. $\frac{\sqrt{30}}{6}$ **【解析】**由 $\alpha\in(0,\pi)$，得 $\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\cos\frac{\alpha}{2}>0$，$\therefore\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

4. $\frac{3}{2}$ **【解析】**$\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos15^\circ+\sin15^\circ)=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{2}\sin(45^\circ+15^\circ)=\sqrt{3}\sin60^\circ=\frac{3}{2}$.

5. $\frac{3\pi}{4}$ **【解析】**$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{7+\frac{4}{3}}{1-7\times\frac{4}{3}}=-1$，因为 α,β 均为锐角，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$，所以 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

6. $2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$ **【解析】**$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$，则 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\varphi=\frac{1}{2}$，所以 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，

$k\in\mathbf{Z}$.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)利用正弦、余弦的二倍角公式化简即可.(2)将 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 化切为弦,利用诱导公式、二倍角公式化简即可.

(1) D　(2) D　**[解析]** (1) 原式 $=\sqrt{\frac{1+\cos 20^\circ}{2}}+\sqrt{1-\sin 20^\circ}=\sqrt{\frac{1+(2\cos^2 10^\circ-1)}{2}}+\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\cos 10^\circ+\cos 10^\circ-\sin 10^\circ=2\cos 10^\circ-\sin 10^\circ$. 故选 D.

(2) $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos 2\alpha}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos 2\alpha}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1$, 故选 D.

变式题 (1)$\cos\alpha$　(2)$\frac{1}{2}\cos 2x$　**[解析]** (1)$\because\alpha\in(0,\pi)$, $\therefore\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\therefore\cos\frac{\alpha}{2}>0$,

$\therefore\frac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2+2\cos\alpha}}=\frac{\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2+2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left|2\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha.$

(2)原式 $=\frac{-2\sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{2}}{\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}=\frac{\frac{1}{2}(1-\sin^2 2x)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\frac{1}{2}\cos^2 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\frac{1}{2}\cos 2x.$

例 2 **[思路点拨]** (1)根据给定条件,利用和角、差角的正弦公式或积化和差公式求出 $\sin(\alpha+\beta)$,再利用二倍角的余弦公式计算作答.(2)根据两角和与差的正弦公式、辅助角公式、二倍角的余弦公式求解.

(1)B　(2)B　**[解析]** (1)方法一:因为 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$, 所以 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$, 所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$, 所以 $\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{9}$.

方法二:由 $\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}=\frac{1}{6}$, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$, 可得 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$, 所以 $\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{9}$.

(2)因为 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\cos\alpha=\frac{3}{5}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{3}{5}$, 所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$, 则 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$, 故选 B.

变式题 (1)A　(2)$\frac{3}{5}$　$\frac{24}{25}$　**[解析]** (1)因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$, 所以由 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$ 得 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-1=-\frac{7}{9}$, 故选 A.

(2)$\because\alpha$ 为锐角, $\therefore\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$, 又 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$, $\therefore\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$, $\therefore\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{24}{25}$.

例 3 **[思路点拨]** (1)利用二倍角公式及辅助角公式可化简所求代数式.(2)利用同角三角函数公式化切为弦,整理后利用辅助角公式与二倍角公式化简求值.

(1)B　(2)B　**[解析]** (1)原式 $=\frac{2\sin 18^\circ(3\cos^2 9^\circ-\sin^2 9^\circ-\cos^2 9^\circ-\sin^2 9^\circ)}{2\sin(6^\circ+30^\circ)}=\frac{2\sin 18^\circ(2\cos^2 9^\circ-2\sin^2 9^\circ)}{2\sin 36^\circ}=\frac{2\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ}=1$, 故选 B.

(2) $\frac{\sin 10^\circ}{1-\sqrt{3}\tan 10^\circ}=\frac{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}=\frac{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{4\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}=\frac{\sin 20^\circ}{4\sin(30^\circ-10^\circ)}=\frac{1}{4}$, 故选 B.

变式题 (1)C　(2)$-\frac{1}{8}$　**[解析]** (1)原式 $=\frac{\cos 20^\circ}{\cos 35^\circ|\sin 10^\circ-\cos 10^\circ|}=\frac{\cos^2 10^\circ-\sin^2 10^\circ}{\cos 35^\circ(\cos 10^\circ-\sin 10^\circ)}=\frac{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}{\cos 35^\circ}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\cos 35^\circ}=\frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ-10^\circ)}{\cos 35^\circ}=\frac{\sqrt{2}\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ}=\sqrt{2}$.

(2) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 100^\circ=-\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=-\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=-\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=-\frac{\frac{1}{4}\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=-\frac{\frac{1}{8}\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=-\frac{\frac{1}{8}\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=-\frac{1}{8}$.

例 4 **[思路点拨]** (1)根据 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 得到 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$, 由同角三角函数关系式求得 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值,然后由两角差的余弦公式求解 $\cos\alpha$ 即可;(2)由(1)可知 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{12}$, 然后由两角差的正切公式求解即可.

解:(1)因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$,

又 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$, 所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{13}{14}$,

所以 $\cos\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{14}\times\frac{1}{2}+\frac{13}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

(2)由(1)可知 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{12}$, 所以 $\tan\beta=\tan(\alpha+\beta-\alpha)=$

$$\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{11}-\frac{\sqrt{3}}{12}}{1+\frac{5\sqrt{3}}{11}\times\frac{\sqrt{3}}{12}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

因为 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\beta=\frac{\pi}{6}$.

变式题 (1)C (2)$\frac{\pi}{4}$ **[解析]** (1)$\because\tan\alpha$ 与 $\tan\beta$ 是方程 $x^2+3\sqrt{3}x+4=0$ 的两个根，$\therefore\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3}$，$\tan\alpha\tan\beta=4$，$\therefore\tan\alpha<0$，$\tan\beta<0$，$\therefore\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore\alpha+\beta\in(\pi,2\pi)$，$\because\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3\sqrt{3}}{1-4}=\sqrt{3}$，$\therefore\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}$. 故选 C.

(2)因为 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$，且 α 为锐角，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{2}{100}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$. 因为 $\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，且 β 为锐角，所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{90}{100}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\sin2\beta=2\sin\beta\cos\beta=2\times\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{5}$，$\cos2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\times\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2=\frac{4}{5}$，所以 $\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+2\beta\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$，故 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$.

例 5 **[思路点拨]** (1)由 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$ 求出 $\tan\alpha$ 的值，然后将原式的分子、分母同时除以 $\cos^2\alpha$，将其转化为关于 $\tan\alpha$ 的式子，由此求出结果；(2)由 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{n}|$ 求出 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值，然后再将 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 表示为 $\sin\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$，结合两角和的正弦公式求出结果.

解：(1)因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，所以 $-\frac{1}{2}\times2\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\cos\alpha$，

所以 $\sin\alpha=-\sqrt{3}\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，

则原式 $=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+\tan\alpha-2}=\frac{-2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}-2}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=3+\sqrt{3}$.

(2)因为 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{n}|$，且 $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=\left(2\cos\alpha-\frac{1}{2},2\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\sqrt{\left(2\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{(2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha)^2}$，整理得 $2\sqrt{3}\sin\alpha-2\cos\alpha+1=0$，

所以 $4\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-1$，即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}$.

因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

又 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)<0$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3\sqrt{5}-1}{8}$.

变式题 **解**：(1)由已知可得，$f(x)=3\cos2\omega x+\sqrt{3}\sin2\omega x=2\sqrt{3}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，$\because f(x)$ 的最小正周期 $T=8$，$\therefore\frac{2\pi}{2\omega}=8$，$\therefore\omega=\frac{\pi}{8}$，$\therefore f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)$. 由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 得 $\frac{2}{3}+8k\leqslant x\leqslant\frac{14}{3}+8k(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{2}{3}+8k,\frac{14}{3}+8k\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)$f(x_0)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{5}$，则 $\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$，由 $x_0\in\left(-\frac{10}{3},\frac{2}{3}\right)$，知 $\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore\cos\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$，则 $f(x_0+1)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}\sin\left[\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=2\sqrt{3}\left[\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right]=2\sqrt{3}\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{7\sqrt{6}}{5}$.

例 6 **[思路点拨]** (1)在 $\triangle OPN$ 中，利用正弦定理用 θ 相关的三角函数表示出 ON，再根据面积公式可求停车场的面积 S（单位：平方米）关于 θ 的函数关系式，结合题意可得 θ 的取值范围；(2)利用三角恒等变换化简三角函数，结合三角函数的单调性可求最大值.

解：(1)因为四边形 $OMPN$ 为平行四边形，所以 $\angle AOB=\angle PNB=\frac{\pi}{3}$，$\angle PNO=\frac{2\pi}{3}$.

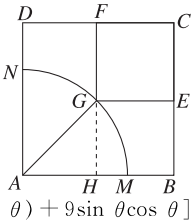
在 $\triangle OPN$ 中，由正弦定理得 $\frac{OP}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{ON}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$，

即 $\frac{60}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{ON}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$，得 $ON=40\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$，

所以 $S=40\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cdot60\sin\theta=2400\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\theta$，其中 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)由(1)知 $S=2400\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\theta=2400\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\cdot\sin\theta=1200\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)=1200\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}\right)=1200\sqrt{3}\left[\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\right]$，当 $2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，停车场的面积 S 最大，其最大值为 $1200\sqrt{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=600\sqrt{3}\approx600\times1.732=1039.2$（平方米）.

变式题 **解**：(1)延长 FG 交 AB 于 H，如图，则 $GH=60\sin\theta$ 米，$AH=60\cos\theta$ 米，$GE=(80-60\cos\theta)$ 米，$FG=(80-60\sin\theta)$ 米，$\therefore S=(80-60\cos\theta)(80-60\sin\theta)=400[16-12(\sin\theta+\cos\theta)+9\sin\theta\cos\theta]\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.



(2)由(1)得 $S=400[16-12(\sin\theta+\cos\theta)+9\sin\theta\cos\theta]\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，令 $t=\sin\theta+\cos\theta$，则 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$，

$\because t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore t\in[1,\sqrt{2}]$，$\therefore S=400\left(16-12t+\frac{9t^2-9}{2}\right)=1800\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+1400$，

$\because t\in[1,\sqrt{2}]$，$\therefore$ 当 $t=\frac{4}{3}$ 时，$S_{\min}=1400$，

即当 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$ 时，矩形 $ECFG$ 的面积取得最小值，最小值为 1400 平方米.

19793351

第 25 讲　三角函数的图象与性质

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$　$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$　(2)$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$　$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$

2. $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$　$[-1,1]$　$[-1,1]$　2π　π　奇函数　偶函数　奇函数　$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$　$[-\pi+2k\pi,2k\pi]$　$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$　$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$　$[2k\pi,\pi+2k\pi]$　$(k\pi,0)$　$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$　$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$　$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$　$x=k\pi$

【对点演练】

1. 3　6π　**【解析】** 由 $y=2+\cos\frac{x}{3}(x\in\mathbf{R})$ 知，$y_{\max}=2+1=3$，其最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$.

2. $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$　**【解析】** 因为 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

3. $\left[2k\pi-\frac{7\pi}{6},2k\pi-\frac{\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$　**【解析】** 由 $2k\pi-\pi\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $2k\pi-\frac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，所以函数的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{7\pi}{6},2k\pi-\frac{\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$.

4. π　**【解析】** $y=|\sin x|$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象将 x 轴下方的部分向上翻折，并保留 x 轴及其上方的部分得到的，所以 $y=|\sin x|$ 的最小正周期为 π.

5. ±2　**【解析】** 由题意可得 $\frac{2\pi}{|2\omega|}=\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=\pm2$.

6. 1　**【解析】** $\because y=-\sin^2x+3\sin x-1=-\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，$\sin x\in[-1,1]$，$\therefore$ 当 $\sin x=1$ 时，$y_{\max}=1$.

7. $\sqrt{2}$　**【解析】** $f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$，$\therefore$ 当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\sqrt{2}$.

● 课堂考点探究

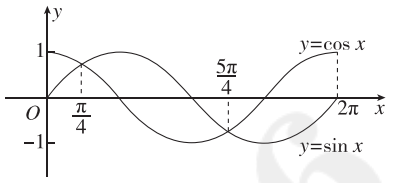
例 1　**【思路点拨】** (1)根据对数函数的定义域可得 $2\sin x+1>0$，求解即可. (2)根据正切函数的定义域及分母不等于零构造不等式组求解即可. (3)思路一：根据偶次根式的被开方数大于或等于 0，结合正弦、余弦函数的图象与性质进行求解；思路二：对 $\sin x-\cos x$ 进行三角恒等变换，化为 $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，进而求解.

(1)D　(2)A　(3)$\left\{x\middle|2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

【解析】 (1)由 $2\sin x+1>0$，得 $\sin x>-\frac{1}{2}$，$\therefore 2k\pi-\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{7\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，$\therefore$ 函数 $y=\lg(2\sin x+1)$ 的定义域为 $\left\{x\middle|2k\pi-\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{7\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$. 故选 D.

(2)由 $\begin{cases}x\neq k\pi,\\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\\ 2x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，得 $\begin{cases}x\neq\frac{k\pi}{2},\\ x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，$\therefore x\neq\frac{2k}{4}\pi$ 且 $x\neq\frac{2k+1}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\therefore x\neq\frac{k\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，故选 A.

(3)方法一：要使函数有意义，则 $\sin x-\cos x\geqslant0$. 在同一坐标系中画出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象，如图所示. 在 $[0,2\pi]$ 内，当 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ 时，满足 $\sin x=\cos x$，再结合正弦、余弦函数的最小正周期是 2π，可知原函数的定义域为 $\left\{x\middle|2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.



方法二：要使函数有意义，则 $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant0$，由正弦函数 $y=\sin x$ 的图象和性质可知 $2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，所以原函数的定义域为 $\left\{x\middle|2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

变式题　$\left[-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　**【解析】** 由 $y=\lg(\sin 2x)+\sqrt{9-x^2}$ 知 $\begin{cases}\sin 2x>0,\\ 9-x^2\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z},\\ -3\leqslant x\leqslant3,\end{cases}$ $\therefore -3\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$ 或 $0<x<\frac{\pi}{2}$，$\therefore$ 函数 $y=\lg(\sin 2x)+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 $\left[-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

例 2　**【思路点拨】** (1)利用辅助角公式化简，然后结合三角函数的性质求解即可. (2)根据已知可推得 $-1\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}$，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{5\pi}{6},2m+\frac{\pi}{3}\right]$，结合正弦函数的图象可知 $\frac{3\pi}{2}\leqslant2m+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{13\pi}{6}$，解不等式即可. (3)利用换元法和二次函数的性质即可求得 $f(x)$ 的值域.

(1)C　(2)C　(3)$\left[1,\frac{3}{2}\right]$　**【解析】** (1)$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，则 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\in[1,2]$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 1. 故选 C.

(2)因为 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 的值域为 $[-5,1]$，所以 $-1\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}$. 又 $x\in\left[\frac{\pi}{4},m\right]$，所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{5\pi}{6},2m+\frac{\pi}{3}\right]$，根据正弦函数的图象可知 $\frac{3\pi}{2}\leqslant2m+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{13\pi}{6}$，解得 $\frac{7\pi}{12}\leqslant m\leqslant\frac{11\pi}{12}$，所以 m 的最大值是 $\frac{11\pi}{12}$. 故选 C.

(3)$f(x)=\cos 2x+2|\sin x|=1-2\sin^2x+2|\sin x|(x\in[0,2\pi])$，令 $|\sin x|=t$，则 $t\in[0,1]$，则 $f(x)$ 的值域转化为 $g(t)=1-2t^2+2t,t\in[0,1]$ 的值域，$g(t)=-2t^2+2t+1=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$，所以 $g(t)\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$，所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

13793338816

变式题 (1)A (2)$3+\sqrt{2}$ **【解析】**(1)因为 $f(x)=2\sin x+4\cos x=2\sqrt{5}\sin(x+\theta)$,其中 $\sin\theta=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,当 $x=\varphi$ 时,$f(x)$取得最大值,所以 $\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $\cos\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta+2k\pi\right)=\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5},k\in\mathbf{Z}$,故选 A.

(2)设 $t=\sin x+\cos x$,则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$,$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,$f(x)=g(t)=t+t^2-1+2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$,∴当 $t=\sqrt{2}$ 时,$g(t)_{\max}=\sqrt{2}+2+1=3+\sqrt{2}$,即 $f(x)_{\max}=3+\sqrt{2}$.

例 3 **【思路点拨】**(1)根据三角函数的周期性,求出各个函数的最小正周期,从而得出结论.(2)首先表示出 T,根据 $f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$求出 φ,再根据 $x=\frac{\pi}{9}$为函数的零点,即可求出 ω 的取值,从而得解.

(1)ABC (2)3 **【解析】**(1) 对于 A,$y=\cos|2x|=\cos 2x$,所以它的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$,满足题意;对于 B,$y=|\cos x|$ 的最小正周期为$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{1}=\pi$,满足题意;对于 C,$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$,满足题意;对于 D,$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,不满足题意.故选 ABC.

(2)因为 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$,所以最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,因为 $f(T)=\cos\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\varphi\right)=\cos(2\pi+\varphi)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,即 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,又 $x=\frac{\pi}{9}$为 $f(x)$的零点,所以$\frac{\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=3+9k,k\in\mathbf{Z}$,因为 $\omega>0$,所以 $\omega_{\min}=3$.

例 4 **【思路点拨】**(1)利用降幂公式及辅助角公式化简 $f(x)$,然后分别求出 $y=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,$y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$,判断奇偶性即可.(2)根据函数 $f(x)$图象的对称中心得到 b,再根据函数的最小正周期的范围和图象的对称中心得到 ω 的值,进而得到所求.

(1)B (2)A **【解析】**(1)$f(x)=\cos x-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+1=\cos x-2\times\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}+1=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\cos x$,所以 $y=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$为偶函数,故 A 错误,B 正确;$y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1=-\sqrt{2}\sin x-1$,所以函数 $y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$ 为非奇非偶函数,故 C,D 错误.故选 B.

(2)因为$\frac{2\pi}{3}<T<\pi$,即$\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{\omega}<\pi$,所以 $2<\omega<3$.因为 $y=f(x)$的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$中心对称,所以 $b=2$,且 $\omega\times\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=\frac{2}{3}\left(k-\frac{1}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$,又 $2<\omega<3$,所以 $k=4$,$\omega=\frac{5}{2}$,所以 $f(x)=\sin\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+2$,所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}+2=1$.

例 5 **【思路点拨】**(1)根据整体法列不等式求解.(2)化简得出 $f(x)=\cos 2x$,利用余弦型函数的单调性逐项判断可得出正确的选项.

(1)A (2)C **【解析】**(1)由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,故 $f(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$,故选 A.

(2)$f(x)=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$,令 $2k\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,∴函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.同理,$f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.结合选项可知,C 选项正确.

【应用演练】

1. A **【解析】** 方法一:当 $x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $x\in\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$ 时,函数 $f(x)$单调递增,故选 A.

方法二:当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$,函数 $f(x)$单调递增;当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,$x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$,函数 $f(x)$不单调递增,同理可知,区间$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$均不是函数 $f(x)$的单调递增区间.故选 A.

2. B **【解析】**因为函数 $f(x)$的一个周期为 4,且 C,D 选项中函数的最小正周期为 8,所以排除 C,D.对于 A,当 $x=2$ 时,$f(2)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right)=\sin\pi=0$,所以直线 $x=2$ 不是该函数图象的对称轴,排除 A.对于 B,当 $x=2$ 时,$f(2)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right)=\cos\pi=-1$,所以直线 $x=2$ 是该函数图象的对称轴.故选 B.

3. A **【解析】**∵点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$和直线 $x=\frac{3\pi}{2}$分别是 $f(x)$图象的对称中心和对称轴,∴$\frac{T}{4}+k\cdot\frac{T}{2}=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi(k\in\mathbf{N}^*)$,得 $T=\frac{4\pi}{2k+1}(k\in\mathbf{N}^*)$,∵$\pi<T<4\pi$,∴$k=1$,$T=\frac{4\pi}{3}$,故选 A.

4. B **【解析】**依题意,函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right),\omega>0$,由 $x\in\left[-\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{4}\right]$,得 $\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{2\pi}{5}\omega-\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}\right]$,因为 $f(x)$在区间$\left[-\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{4}\right]$上单调递增,所以$-\frac{2\pi}{5}\omega-\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2}$且$\frac{3\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$,解得 $\omega\leqslant\frac{5}{6}$且 $\omega\leqslant\frac{8}{9}$,即 $0<\omega\leqslant\frac{5}{6}$.当 $x\in[0,\pi]$时,$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right]$,因为 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上只取得一次最大值,所以$\frac{\pi}{2}\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{6}<\frac{5}{2}\pi$,解得$\frac{2}{3}\leqslant\omega<\frac{8}{3}$,所以 ω 的取值范围是$\left[\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right]$.故选 B.

5. AC **【解析】**由题知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin 2x$,则 $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos 2x$,∴$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$为偶函数,A 正确;令 $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}$,即曲线 $y=f(x)$的对称轴为 $x=\frac{\pi}{4}+$

$\frac{k}{2}\pi, k\in\mathbf{Z}$，B 错误；当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$2x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，∴$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，C 正确；$f(x)_{\min}=-\sqrt{2}$，D 错误. 故选 AC.

第 26 讲　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及三角函数的简单应用

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $\frac{-\varphi}{\omega}$　$\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$　$\frac{\pi-\varphi}{\omega}$　$\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}$　$\frac{2\pi-\varphi}{\omega}$　0　$\frac{\pi}{2}$　π　$\frac{3\pi}{2}$　2π

2. $|\varphi|$　$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$　3. $\frac{2\pi}{\omega}$　$\frac{\omega}{2\pi}$　$\omega x+\varphi$　φ

【对点演练】

1. $2,\frac{1}{\pi},\frac{\pi}{4}$　**【解析】** 由振幅、频率和初相的定义可知，函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的振幅为 2，频率为$\frac{1}{\pi}$，初相为$\frac{\pi}{4}$.

2. $3\sin\left(2x+\frac{11}{12}\pi\right)$　**【解析】** $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=3\sin\left(2x+\frac{11}{12}\pi\right)$.

3. $y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+20, x\in[6,14]$　**【解析】** 从题图中可以看出，6～14 时的温度变化曲线是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 在半个周期内的图象，所以 $A=\frac{1}{2}\times(30-10)=10$，$b=\frac{1}{2}\times(30+10)=20$，又$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=14-6$，所以 $\omega=\frac{\pi}{8}$. 又$\frac{\pi}{8}\times10+\varphi=2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，$0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$，所以所求解析式为 $y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+20, x\in[6,14]$.

4. 右　$\frac{\pi}{15}$　**【解析】** $y=2\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin 5\left(x-\frac{\pi}{15}\right)$，故将函数 $y=2\sin 5x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{15}$个单位长度即可得到 $y=2\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

5. -1 或 -5　**【解析】** 由 $f\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$ 得，直线 $x=\frac{\pi}{8}$为函数 $f(x)$的图象的一条对称轴，故当 $x=\frac{\pi}{8}$时，函数 $f(x)$取得最大值或最小值，则 $-2+m=-3$ 或 $2+m=-3$，解得 $m=-1$ 或 $m=-5$.

6. $-2\sqrt{3}$　**【解析】** 由题图可得 $A=2\sqrt{3}$，又 $T=2\times[6-(-2)]=16$，所以 $\omega=\frac{\pi}{8}$，所以$\frac{\pi}{8}\times6+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $\varphi=2k\pi-\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，又$|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{3}{4}\pi\right)$，所以 $f(2)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)=-2\sqrt{3}$.

● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】** (1)根据三角函数的图象变换规则，逐项判断，即可求解. (2)化简 $f(x)$的解析式，然后根据三角函数图象变换的知识求得正确答案.

(1)AC　(2) A　**【解析】** (1)将 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象，又 $y=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sin x$，所以将 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度可得 $y=\sin x$ 的图象，故 A 正确，B 错误；对于 C，将 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象上所有点向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度可得 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sin 2x$ 的图象，将 $y=\sin 2x$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)可得 $y=\sin x$ 的图象，故 C 正确；对于 D，将 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象上所有点向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，可得 $y=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$的图象，将 $y=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)得到 $y=\sin\left(4x-\frac{3\pi}{4}\right)$的图象，故 D 错误. 故选 AC.

(2) $f(x)=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos 2x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，故将 $f(x)$的图象向右平移 φ $(\varphi>0)$个单位长度得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}-2\varphi\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$的图象. 由 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，令$\frac{\pi}{3}-2\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}-k\pi, k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-1$ 时，φ 取得最小正值，最小正值为$\frac{5\pi}{6}$. 故选 A.

变式题　(1)B　(2)C　**【解析】** (1)因为 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=\cos 2\left(x-\frac{3}{8}\pi\right)$，所以为了得到 $f(x)$的图象，只需将 $g(x)$的图象向右平移$\frac{3\pi}{8}$个单位长度. 故选 B.

(2) $f(x)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\sin x=\frac{3}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，将函数 $f(x)$的图象向左平移 a $(a>0)$个单位长度后所得图象对应的函数记为 $g(x)$，则 $g(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+a+\frac{\pi}{6}\right)$. 由题得函数 $g(x)$的图象关于 y 轴对称，则 $g(0)=\pm\sqrt{3}$，∴$\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=\pm1$，∴$a+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，∴$a=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $a>0$，∴实数 a 的最小值为$\frac{\pi}{3}$. 故选 C.

例 2　**【思路点拨】** (1)由最大值、最小正周期以及 $f(-1)=0$ 分别得到 A，ω，φ 的值，进而得到函数 $f(x)$的解析式. (2)设 $A\left(x_1,\frac{1}{2}\right)$，$B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$，依题可得 $x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$，结合 $\sin x=\frac{1}{2}$的解可得 $\omega(x_2-x_1)=\frac{2\pi}{3}$，从而得到 ω 的值，再根据 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$ 以及 $f(0)<0$，可得 φ 的一个值，进而可得 $f(x)$，从而求得 $f(\pi)$.

(1)A　(2)$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　**【解析】** (1)由题图可知$\frac{T}{2}=3-(-1)=4$，$A=\sqrt{3}$，所以 $T=8$，即$\frac{2\pi}{\omega}=8$，解得 $\omega=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)$. 由题图得 $f(-1)=\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=0$，所以$-\frac{\pi}{4}+\varphi=\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，又$|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$，所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{3\pi}{4}\right)$，故选 A.

(2)依题意设 $A\left(x_1,\frac{1}{2}\right)$,$B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$,则 $x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$,因为 $\omega x_2+\varphi-(\omega x_1+\varphi)=\frac{2\pi}{3}$,即 $\frac{\pi}{6}\omega=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\omega=4$,又 $\frac{2\pi}{3}\omega+\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=-\frac{8\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,不妨取 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$,则 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$,故 $f(\pi)=\sin\left(4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

变式题 (1)C (2)2 **【解析】**(1)∵点 $\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上,∴$\cos\left[\omega\times\left(-\frac{4\pi}{9}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=0$,∴$-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,∴$\omega=\frac{3}{2}-\frac{9}{2}k(k\in\mathbf{Z})$,∴$f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{3}{2}-\frac{9}{2}k\right|}(k\in\mathbf{Z})$. 由题图可知 $\frac{10\pi}{9}<T<\frac{13\pi}{9}$,得 $\frac{18}{13}<\left|\frac{3}{2}-\frac{9}{2}k\right|<\frac{9}{5}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $-\frac{1}{15}<k<\frac{1}{39}$ 或 $\frac{25}{39}<k<\frac{11}{15}(k\in\mathbf{Z})$,故 $k=0$,则 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{4\pi}{3}$. 故选 C.

(2)由题图知 $\frac{3}{4}T=\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}$($T$ 为函数 $f(x)$ 的最小正周期),∴$T=\pi$,则 $|\omega|=2$,不妨取 $\omega=2$. 由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ 及图象得 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,不妨取 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$,则 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,∴$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$,$f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=1$,∴$\left(f(x)-f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=(f(x)-1)(f(x)-0)>0$,则 $f(x)>1$ 或 $f(x)<0$. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时,令 $f(x)>1$,可得 $0<x<\frac{\pi}{4}$,区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内没有整数;易知 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=0$,由题图知,当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$ 时,$f(x)<0$,$2\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$. 故满足条件的最小正整数 x 为 2.

例 3 **【思路点拨】**(1)先化简 $f(x)$,再根据正弦函数的单调性即可得出答案;(2)根据三角函数图象的平移变换和对称性求出 φ,$g(x)$,再由三角函数的性质求解即可.

解:(1)$f(x)=\cos^4x-\sin^4x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,所以当 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,即 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,所以函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$.

(2)由题意可知 $g(x)=\sin\left(2x+2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$,因为函数 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 中心对称,所以 $2\times\frac{\pi}{3}+2\varphi+\frac{\pi}{6}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\varphi=-\frac{5\pi}{12}+\frac{k}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}$. 因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$,所以令 $k=1$,得 $\varphi=\frac{\pi}{12}$,所以 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\alpha\right]$ 时,$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},2\alpha+\frac{\pi}{3}\right]$. 因为 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\alpha\right]$ 上的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$,所以 $\frac{\pi}{2}\leqslant2\alpha+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,解得 $\frac{\pi}{12}\leqslant\alpha\leqslant\frac{5\pi}{12}$,所以 α 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$.

变式题 (1)ABC (2)D **【解析】**(1)由函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象可知,函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{4}{3}\times\left[\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\pi$,且 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{5\pi}{12},3\right)$,函数 $f(x)$ 的最大值为 3,所以 $A=3$. 由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,解得 $\omega=2$,又 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=3\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=3$,所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,不妨取 $k=0$,则函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,得到 $g(x)=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=3\sin2x$ 的图象,所以 $g(x)=3\sin2x$. 显然 $g(x)$ 为奇函数,故 A 正确;当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 时,$2x\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$,因为 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ 上单调递减,所以 $g(x)=3\sin2x$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减,故 B 正确;$F(x)=xg(x)=3x\sin2x$,则 $F(-x)=3(-x)\sin(-2x)=3x\sin2x=F(x)$,所以 $F(x)=xg(x)$ 为偶函数,故 C 正确;令 $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,故 $g(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,故 D 错误. 故选 ABC.

(2)由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{4\omega},k\in\mathbf{Z}$,即函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega},\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{4\omega}\right],k\in\mathbf{Z}$,又函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减,所以 $\begin{cases}\frac{5\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\geqslant\pi,\\ \frac{\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}k\in\mathbf{Z}$,所以 $\frac{1}{2}+4k\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}+2k$,$k\in\mathbf{Z}$,则 $\begin{cases}\frac{5}{4}+2k\geqslant\frac{1}{2}+4k,\\ \frac{5}{4}+2k>0,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$,所以 $k=0$,则 $\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$,所以 ω 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$. 故选 D.

例 4 **【思路点拨】**(1)根据已知条件求函数解析式;(2)令 $H(t)=30$,结合余弦函数分析运算.

解:(1)由题意知 $\begin{cases}A+B=90,\\ -A+B=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=40,\\ B=50,\end{cases}\omega=\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$,

故 $H(t)=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\varphi\right)+50,t\in[0,30]$.

因为 $H(0)=40\sin\varphi+50=10$,所以 $\sin\varphi=-1$,

又 $|\varphi|\leqslant\pi$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$,因此 $H(t)=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+50=50-40\cos\frac{\pi}{15}t,t\in[0,30]$,

即 $H(t)=50-40\cos\frac{\pi}{15}t,t\in[0,30]$.

(2)令 $H(t)=50-40\cos\frac{\pi}{15}t=30$,可得 $\cos\frac{\pi}{15}t=\frac{1}{2}$,

因为 $t\in[0,30]$,所以 $\frac{\pi}{15}t\in[0,2\pi]$,所以 $\frac{\pi}{15}t=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$,解得 $t=5$ 或 $t=25$,故游客甲坐上摩天轮 5 分钟或 25 分钟时,距离地面的高度恰好为 30 米.

变式题 (1)C (2)BD **【解析】**(1)由 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ 可知,若 $f_1=\frac{\omega_1}{2\pi}=nf_2=n\frac{\omega_2}{2\pi}(n\in\mathbf{N}^*)$,则必有 $\omega_1=n\omega_2(n\in\mathbf{N}^*)$. 易

15733883316

得 $360\ 000=2\times180\ 000$，$180\ 000=1\times180\ 000$，$540\ 000=3\times180\ 000$，故 A，B，D 中的函数都能与函数 $y=0.06\sin 180\ 000t$ 构成乐声的数学表达式. C 选项中，$181\ 800$ 不是 $180\ 000$ 的整数倍，故选 C.

(2)小球运动的最高点与最低点的距离为 $2-(-2)=4(\text{cm})$，所以选项 A 错误；因为 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，所以小球经过 4 s 往复运动一次，所以选项 B 正确；当 $t\in(3,5)$ 时，$\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{7\pi}{4},\frac{11\pi}{4}\right)$，所以小球自下往上运动到最高点，再往下运动，所以选项 C 错误；当 $t=\frac{13}{2}$ 时，$h=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{13}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-2$，所以选项 D 正确. 故选 BD.

第 27 讲　余弦定理、正弦定理

● 课前基础巩固

【对点演练】

1. $\frac{2\pi}{3}$　**【解析】** 在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB=c=5$，$AC=b=3$，$BC=a=7$，则由余弦定理得 $\cos\angle BAC=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9+25-49}{30}=-\frac{1}{2}$，因为 $\angle BAC$ 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$.

2. 8　**【解析】** 由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2c\times\frac{1}{2}=4$，得 $c=8$.

3. $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}$　**【解析】** $B=180°-45°-75°=60°$，由正弦定理，得 $\frac{2}{\sin 60°}=\frac{c}{\sin 75°}$，得 $c=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. $\frac{\pi}{3}$　**【解析】** 由余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+4-c^2}{4a}=\frac{a}{2}-\frac{c}{4}$，化简整理得 $a^2+c^2-4=ac$，则 $\cos B=\frac{a^2+c^2-4}{2ac}=\frac{1}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

5. $A=B$　$A>B$　**【解析】** 根据正弦定理知，在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\sin B\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow A=B$，$\sin A>\sin B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow A>B$.

6. $45°$ 或 $135°$　**【解析】** 由正弦定理得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sin 30°}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $c>b$，$B=30°$，所以 $C=45°$ 或 $C=135°$.

7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　1　**【解析】** $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4+3-4\sqrt{3}\cos 30°=1$，所以 $b=1$.

● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】** (1)先算出 $\sin C=\frac{4}{5}$，然后直接由三角形的面积公式求解即可；(2)先由余弦定理求出 $c=4\sqrt{5}$，然后由正弦定理求解 $\sin A$ 即可.

解：(1)因为在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\frac{3}{5}$，$\sin C>0$，

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$，

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times5\times11\times\frac{4}{5}=22$.

(2)在 $\triangle ABC$ 中，$a=5$，$b=11$，$\cos C=\frac{3}{5}$，所以由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=5^2+11^2-2\times5\times11\times\frac{3}{5}=80$，

又 $c>0$，所以 $c=4\sqrt{5}$. 由(1)可知 $\sin C=\frac{4}{5}$，所以由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{5}{\sin A}=\frac{4\sqrt{5}}{\frac{4}{5}}$，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

变式题 1　(1)C　(2)B　(3)$2\sqrt{2}$　**【解析】** (1)方法一：因为 $a\cos B-b\cos A=c$，所以由正弦定理得 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin C$，即 $\sin(A-B)=\sin C$，所以 $A-B=C$ 或 $A-B+C=\pi$(舍). 因为 $C=\frac{\pi}{5}$，$A+B+C=\pi$，所以 $A+B=\frac{4\pi}{5}$. 所以 $B=\frac{3\pi}{10}$. 故选 C.

方法二：由余弦定理得 $a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$，整理得 $a^2=b^2+c^2$，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $A=\frac{\pi}{2}$，又 $C=\frac{\pi}{5}$，所以 $B=\frac{3\pi}{10}$. 故选 C.

(2)因为 $(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，所以由正弦定理得 $(a+c)(a-c)=b(a-b)$，即 $a^2-c^2=ab-b^2$，则 $a^2+b^2-c^2=ab$，故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，又 $0<\angle C<\pi$，所以 $\angle C=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

(3)$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$，$\therefore ac=4$，根据余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=3ac-ac=2ac=8$，$\therefore b=2\sqrt{2}$.

变式题 2　**解：**(1)因为 $\angle A=120°$，所以 $\angle B$，$\angle C$ 都为锐角，且 $\angle B+\angle C=60°$. 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\frac{\sqrt{39}}{\sin 120°}=\frac{2}{\sin B}$，解得 $\sin B=\frac{\sqrt{13}}{13}$.

(2)由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以 $39=4+c^2+2c$，整理得 $c^2+2c-35=0$，解得 $c=5$ 或 $c=-7$(舍)，所以 $c=5$.

(3)方法一：因为 $\sin B=\frac{\sqrt{13}}{13}$，$\angle B$ 为锐角，所以 $\cos B=\frac{2\sqrt{39}}{13}$，所以 $\sin(B-C)=\sin[B-(60°-B)]=\sin(2B-60°)=\frac{1}{2}\sin 2B-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2B=\sin B\cos B-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-2\sin^2 B)=-\frac{7\sqrt{3}}{26}$.

方法二：因为 $\sin B=\frac{\sqrt{13}}{13}$，$\angle B$ 为锐角，所以 $\cos B=\frac{2\sqrt{39}}{13}$. 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\frac{\sqrt{39}}{\sin 120°}=\frac{5}{\sin C}$，解得 $\sin C=\frac{5\sqrt{13}}{26}$，又 $\angle C$ 为锐角，所以 $\cos C=\frac{3\sqrt{39}}{26}$，

所以 $\sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=-\frac{7\sqrt{3}}{26}$.

例 2　**【思路点拨】** (1)根据正弦定理可得 $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$，整理可得 $\sin 2A=\sin 2B$，又由 $a\neq b$，可得 $A\neq B$，即可得解.
(2)首先利用余弦定理求出角 C，再利用正弦定理与余弦定理将 $2\cos A\sin B=\sin C$ 化简得到 a，b 的关系，进而判断出三角形形状.

(1)B　(2)C　**【解析】** (1)$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}=\frac{\sin B}{\sin A}$，$\therefore\sin A\cdot\cos A=\sin B\cdot\cos B$，$\therefore\sin 2A=\sin 2B$. $\because\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，$\therefore a\neq b$，$\therefore 2A+2B=\pi$，$\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$，$\therefore C=\frac{\pi}{2}$. 故选 B.

(2)$\because a^2+b^2-c^2=ab$，$\therefore\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$. 由 $2\cos A\sin B=\sin C$，得 $\cos A=\frac{\sin C}{2\sin B}=\frac{c}{2b}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$，$\therefore b^2=a^2$，即 $b=a$，又 $C=\frac{\pi}{3}$，$\therefore$ 该三角形

为等边三角形.

变式题 (1)ACD (2)D **[解析]** (1)对于A,若$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$,则由正弦定理得$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C}$,即$\tan A=\tan B=\tan C$,则$A=B=C$,所以$\triangle ABC$一定是等边三角形,故A正确;对于B,若$a\cos A=b\cos B$,则由正弦定理得$\sin A\cos A=\sin B\cos B$,即$\sin 2A=\sin 2B$,则$2A=2B$或$2A+2B=180°$,即$A=B$或$A+B=90°$,所以$\triangle ABC$是等腰三角形或直角三角形,故B错误;对于C,若$b\cos C+c\cos B=b$,则由正弦定理得$\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin B$,所以$\sin(B+C)=\sin A=\sin B$,即$A=B$,所以$\triangle ABC$一定是等腰三角形,故C正确;对于D,在$\triangle ABC$中,因为$a^2+b^2<c^2$,且$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,所以$\cos C<0$,所以角$C$为钝角,所以$\triangle ABC$一定是钝角三角形,故D正确.故选ACD.

(2)因为$c-a\cos B=(2a-b)\cos A$,所以由正弦定理得$\sin C-\sin A\cos B=2\sin A\cos A-\sin B\cos A$,又$C=\pi-(A+B)$,所以$\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin A\cos B=2\sin A\cos A-\sin B\cos A$,所以$\cos A\cdot(\sin B-\sin A)=0$,所以$\cos A=0$或$\sin B=\sin A$,所以$A=\frac{\pi}{2}$或$B=A$,所以$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

例3 **[思路点拨]** (1)选条件①,由已知等式得$\tan A=\sqrt{3}$,根据正切函数值得角A的大小;选条件②,由已知等式结合正弦定理与三角恒等变换,化简得$\cos A=\frac{1}{2}$,进而可得角A的大小.(2)根据正弦定理,结合三角恒等变换将三角形的周长转化为正弦型三角函数,利用正弦型三角函数的性质求$\triangle ABC$周长的取值范围即可.

解:(1)选条件①:因为$\frac{\sqrt{3}\sin A-\cos A}{\sqrt{3}\sin A+\cos A}=\frac{1}{2}$,所以$2(\sqrt{3}\sin A-\cos A)=\sqrt{3}\sin A+\cos A$,所以$\sqrt{3}\sin A=3\cos A$,又因为$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\cos A\neq 0$,所以$\tan A=\sqrt{3}$,所以$A=\frac{\pi}{3}$.

选条件②:因为$2a\cos A-b\cos C=c\cos B$,所以由正弦定理可得$2\sin A\cos A-\sin B\cos C=\sin C\cos B$,即$2\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin A$,又因为$\sin A\neq 0$,所以$\cos A=\frac{1}{2}$.因为$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,则$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B$,$c=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin C$,又$A+B+C=\pi$,$A=\frac{\pi}{3}$,所以$C=\frac{2\pi}{3}-B$,又$\triangle ABC$为锐角三角形,所以$C=\frac{2\pi}{3}-B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则$B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,所以$a+b+c=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin B+\sin C)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]+2=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)+2=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)+2=4\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+2$,因为$B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,所以$B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,则$\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,所以$a+b+c\in(2+2\sqrt{3},6]$,即$\triangle ABC$的周长的取值范围为$(2+2\sqrt{3},6]$.

例4 **[思路点拨]** (1)思路一:利用三角形的面积公式求出a,再利用余弦定理求得$\cos B$,进而可得$\sin B$,从而求得$\tan B$的值;思路二:利用三角形的面积公式求出a,作出BC边上的高,利用直角三角形的性质求解即可.(2)思路一:利用余弦定理求出a,再利用三角形的面积公式求出$\angle ADC$,即可求解b,c;思路二:由已知利用向量相关计算建立关系求出a,再利用三角形的面积公式求出$\angle ADC$,即可求解b,c.

解:(1)方法一:在$\triangle ABC$中,因为D为BC的中点,$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$,$AD=1$,所以$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC\cdot\sin\angle ADC=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}a=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得$a=4$.在$\triangle ABD$中,$\angle ADB=\frac{2\pi}{3}$,由余弦定理得$c^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\angle ADB$,即$c^2=4+1-2\times 2\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$,可得$c=\sqrt{7}$,则$\cos B=\frac{7+4-1}{2\times\sqrt{7}\times 2}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$,$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{7}}{14}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{14}$,所以$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

方法二:在$\triangle ABC$中,因为D为BC的中点,$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$,$AD=1$,所以$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC\cdot\sin\angle ADC=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}a=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得$a=4$.

在$\triangle ACD$中,由余弦定理得$b^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cos\angle ADC$,即$b^2=4+1-2\times 2\times 1\times\frac{1}{2}=3$,可得$b=\sqrt{3}$,则$AC^2+AD^2=4=CD^2$,则$\angle CAD=\frac{\pi}{2}$,$C=\frac{\pi}{6}$,过$A$作$AE\perp BC$于$E$,于是$CE=AC\cos C=\frac{3}{2}$,$AE=AC\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则$BE=\frac{5}{2}$,所以$\tan B=\frac{AE}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

(2)方法一:在$\triangle ABD$与$\triangle ACD$中,由余弦定理得$\begin{cases}c^2=\frac{1}{4}a^2+1-2\times\frac{1}{2}a\times 1\times\cos(\pi-\angle ADC),\\ b^2=\frac{1}{4}a^2+1-2\times\frac{1}{2}a\times 1\times\cos\angle ADC,\end{cases}$整理得$\frac{1}{2}a^2+2=b^2+c^2$,又$b^2+c^2=8$,所以$a=2\sqrt{3}$,

又$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1\times\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\sin\angle ADC=1$,而$0<\angle ADC<\pi$,于是$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$,所以$b=c=\sqrt{AD^2+CD^2}=2$.

方法二:在$\triangle ABC$中,因为D为BC的中点,所以$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,又$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,所以$4\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{CB}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2=2(b^2+c^2)=16$,即$4+a^2=16$,可得$a=2\sqrt{3}$,又$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1\times\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\sin\angle ADC=1$,而$0<\angle ADC<\pi$,于是$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$,所以$b=c=\sqrt{AD^2+CD^2}=2$.

【应用演练】

1. D **[解析]** $\because(a+b)(\sin A-\sin B)=c(\sin C+\sin B)$,$\therefore(a+b)(a-b)=c(c+b)$,即$a^2=b^2+c^2+bc$,则$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$,又$0<A<\pi$,$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$.$\because AD$平分内角$A$,$\therefore\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{3}$.由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$,得$\frac{1}{2}bc\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\frac{\pi}{3}$,即$bc=2(b+c)$,即$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$,$\therefore 4b+c=2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(4b+c)=2\left(5+\frac{c}{b}+\frac{4b}{c}\right)\geqslant 2\times(5+2\times 2)=18$,当且仅当$c=2b$时等号成立,即$4b+c$的最小值为18.故选D.

2. D 【解析】方法一：在$\triangle ACD$和$\triangle BCA$中，有$\angle ACB=\angle DCA$，$\angle ABC=\angle DAC$，故$\triangle ACD\backsim\triangle BCA$. 设$CD=x$，则$BC=4x$，又$\frac{CD}{AC}=\frac{CA}{BC}$，所以$AC=2x$. 设$AD=y$，则由$\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{AC}=\frac{1}{2}$得$AB=2y$，又$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$，所以由余弦定理可得$\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{4y^2+y^2-9x^2}{4y^2}=-\frac{1}{2}$，整理得$\frac{y^2}{x^2}=\frac{9}{7}$，则$\cos B=\frac{4y^2+9x^2-y^2}{12xy}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{21}}{14}$，故$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

方法二：设$B=\alpha=\angle DAC$，则$C=\frac{\pi}{3}-2\alpha$. 在$\triangle ACD$和$\triangle BCA$中，有$BD=3DC$，由正弦定理有$\begin{cases}\frac{BD}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{AD}{\sin\alpha},\\ \frac{CD}{\sin\alpha}=\frac{AD}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)}\end{cases}$两式相除整理得$\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=2\sqrt{3}\sin^2\alpha$，则$3\sqrt{3}\cos 2\alpha-\sin 2\alpha=2\sqrt{3}$，所以$\frac{3\sqrt{3}\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=2\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}$，即$5\sqrt{3}\tan^2\alpha+2\tan\alpha-\sqrt{3}=0$，解得$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{5}$或$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为在$\triangle ABD$中，$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$，所以$B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，故$\tan\alpha=\tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}$，故选D.

3. 解：(1)由已知条件得$\sin 2B+\sin A\sin 2B=\cos A+\cos A\cos 2B$，则$\sin 2B=\cos A+\cos A\cos 2B-\sin A\sin 2B=\cos A+\cos(A+2B)=\cos[\pi-(B+C)]+\cos[\pi-(B+C)+2B]=-\cos(B+C)-\cos(B-C)=-2\cos B\cos C$，所以$2\sin B\cos B=-2\cos B\cos C$，所以$(\sin B+\cos C)\cos B=0$.

由题知$1+\cos 2B\neq 0$，所以$B\neq\frac{\pi}{2}$，所以$\cos B\neq 0$，

所以$\sin B=-\cos C=\frac{1}{2}$，可得$B=\frac{\pi}{6}$.

(2)由(1)知$\sin B=-\cos C>0$，则$B=C-\frac{\pi}{2}$，则$\sin A=\sin(B+C)=\sin\left(2C-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2C$.

由正弦定理得$\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\cos^2 2C+\cos^2 C}{\sin^2 C}=\frac{(1-2\sin^2 C)^2+(1-\sin^2 C)}{\sin^2 C}=\frac{2+4\sin^4 C-5\sin^2 C}{\sin^2 C}=\frac{2}{\sin^2 C}+4\sin^2 C-5\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{\sin^2 C}\cdot 4\sin^2 C}-5=4\sqrt{2}-5$，当且仅当$\sin^2 C=\frac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立，所以$\frac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值为$4\sqrt{2}-5$.

4. 解：(1)选条件①：由余弦定理得$\cos\angle DBC=\frac{DB^2+BC^2-CD^2}{2DB\cdot BC}=\frac{DB^2+9-4}{6DB}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，解得$BD=\sqrt{5}$.

选条件②：在$\triangle ABD$中，由余弦定理得$\cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{1+4-BD^2}{4}=\frac{5-BD^2}{4}$，在$\triangle BCD$中，由余弦定理得$\cos\angle BCD=\frac{CD^2+BC^2-BD^2}{2CD\cdot BC}=\frac{4+9-BD^2}{12}=\frac{13-BD^2}{12}$，因为$\angle DCB+\angle DAB=\pi$，所以$\cos\angle BAD+\cos\angle BCD=0$，

即$\frac{5-BD^2}{4}+\frac{13-BD^2}{12}=0$，可得$BD=\sqrt{7}$.

(2)选条件①：$BD=\sqrt{5}$，$\sin\angle DBC=\sqrt{1-\cos^2\angle DBC}=\frac{2}{3}$，

故$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot CB\sin\angle DBC=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times 3\times\frac{2}{3}=\sqrt{5}$.

在$\triangle ABD$中，$AB^2+AD^2=BD^2$，所以$AB\perp AD$，故$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$，

所以四边形$ABCD$的面积为$\sqrt{5}+1$.

选条件②：$BD=\sqrt{7}$，则$\cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=-\frac{1}{2}$，故$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$. 因为$\angle DCB+\angle DAB=\pi$，所以$\angle BCD=\frac{\pi}{3}$，则$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

故四边形$ABCD$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

第28讲　余弦定理、正弦定理应用举例

● 课前基础巩固

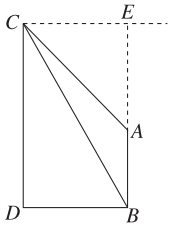
【知识聚焦】

1. 仰角　俯角

【对点演练】

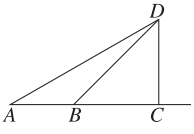
1. $\sqrt{3}$　【解析】在$\triangle ABC$中，易得$A=30°$，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，则$AB=\frac{BC\sin C}{\sin A}=\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$(km).

2. $10(3+\sqrt{3})$　【解析】如图，过点C作$CE\parallel DB$，与BA的延长线交于点E，则$\angle ACE=45°$，$\angle DBC=60°$. 设$CD=x$ m，则$AE=(x-20)$m. 因为$\tan 60°=\frac{CD}{BD}$，所以$CE=BD=\frac{CD}{\tan 60°}=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}x}{3}$(m). 在$\triangle AEC$中，$AE=CE$，故$x-20=\frac{\sqrt{3}x}{3}$，解得$x=10(3+\sqrt{3})$.



3. $\sqrt{6}-1$　【解析】由题意知$\angle ACB=80°+40°=120°$，设$BC=x$ km，则由余弦定理知$9=x^2+4-4x\cos 120°$，$\because x>0$，$\therefore x=\sqrt{6}-1$.

4. 109　【解析】如图，设CD为塔，由题知$AB=80$米. 设$CD=h$米，则$BC=h$米，则由已知得$(80+h)\times\tan 30°=h$，解得$h=40(\sqrt{3}+1)\approx 109$.



5. 200°　【解析】根据方位角的概念可得点A的方位角为200°.

● 课堂考点探究

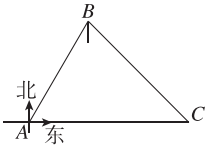
例1　【思路点拨】在$\triangle ACD$中，利用正弦定理求出AD，在$\triangle BCD$中，利用正弦定理求出BD，在$\triangle ABD$中，利用余弦定理求出AB.

B　【解析】在$\triangle ACD$中，$\angle CAD=180°-75°-45°-30°=30°$，$\angle ACD=75°+45°=120°$，由正弦定理得$\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，则$AD=\frac{CD\cdot\sin\angle ACD}{\sin\angle CAD}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=4\sqrt{3}$. 在$\triangle BCD$中，$\angle CBD=180°-45°-45°-30°=60°$，$\angle BCD=45°$，由正弦定理得$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，则$BD=$

$\frac{CD\cdot\sin\angle BCD}{\sin\angle CBD}=\frac{4\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$. 在$\triangle ABD$中,由余弦定理得$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB=48+\frac{32}{3}-2\times4\sqrt{3}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{80}{3}$,可得$AB=\frac{4\sqrt{15}}{3}$,则$A$,$B$间的距离为$\frac{4\sqrt{15}}{3}$ km. 故选B.

变式题 (1)D (2)$100(\sqrt{3}+1)$ **【解析】**(1)连接AC,在$\triangle ACB$中,$AB=60$米,$BC=60$米,$\angle ABC=60°$,所以$\triangle ABC$为等边三角形,则$AC=60$米,$\angle ACB=60°$,所以$\angle ACD=120°-60°=60°$. 在$\triangle CDA$中,$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos 60°=60^2+40^2-2\times60\times40\times\frac{1}{2}=2800$,所以$AD=20\sqrt{7}\approx53$(米).

(2)如图,设地震的位置在C处,由已知得$AB=200$ km,$A=60°$,$B=75°$,$C=45°$. 根据正弦定理可得$\frac{200}{\sin 45°}=\frac{AC}{\sin 75°}$,又$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,所以$AC=\frac{200\sin 75°}{\sin 45°}=\frac{200\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=100(\sqrt{3}+1)$(km),所以地震的位置在$A$地正东方向的$100(\sqrt{3}+1)$km处.

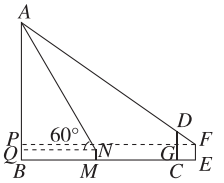


例2 **【思路点拨】**(1)根据题意可得$PM=\frac{MN}{\sin 15°}$,在$\triangle FPM$中利用正弦定理可求得$PF=\frac{\sqrt{3}MN}{1-\cos 30°}$,进而在Rt$\triangle PEF$中可求得$EF$. (2)在$\triangle ABC$中,由正弦定理可求得$AC=36\sqrt{2}$ m,进而在$\triangle APC$中可得结果.

(1)A (2)C **【解析】**(1)在Rt$\triangle PMN$中,$PM=\frac{MN}{\sin 15°}$,在$\triangle FPM$中,$\angle FMP=45°+15°=60°$,$\angle FPM=180°-60°-15°=105°$,则$\angle MFP=180°-105°-60°=15°$,由正弦定理得$\frac{MP}{\sin\angle MFP}=\frac{PF}{\sin\angle PMF}$,则$PF=\frac{\sin\angle PMF}{\sin\angle MFP}\cdot MP=\frac{\sin 60°}{\sin 15°}\cdot\frac{MN}{\sin 15°}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{MN}{\sin^2 15°}=\frac{\sqrt{3}MN}{1-\cos 30°}$. 在Rt$\triangle PEF$中,$EF=PF\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}MN}{1-\cos 30°}\cdot\sin 60°=\frac{40\sqrt{3}\times(2-\sqrt{3})}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=120$(m). 故选A.

(2)在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=180°-(\angle ABC+\angle ACB)=30°$,因为$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$,所以$AC=\frac{BC\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}=\frac{36\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=36\sqrt{2}$(m). 在$\triangle APC$中,$\angle PAC=90°$,$\angle ACP=45°$,即$\triangle APC$为等腰直角三角形,所以$AP=AC=36\sqrt{2}\approx50.8$(m). 故选C.

变式题 B **【解析】**如图,过点N作$NQ\perp AB$于点Q,过点F作$FP\perp AB$于点P,交CD于点G,则四边形$BMNQ$,$BCGP$,$CEFG$,$BEFP$都是矩形,所以$BQ=MN=1$ m,$BM=QN$,$BP=CG=EF=1.5$ m,$FG=CE=2$ m,所以$DG=CD-CG=2.5-1.5=1$(m). 在Rt$\triangle AQN$中,$QN=\frac{AQ}{\tan\angle ANQ}=\frac{AB-1}{\tan 60°}=\frac{AB-1}{\sqrt{3}}$,所以$FP=BM+MC+CE=\frac{AB-1}{\sqrt{3}}+94$,由已知得$\triangle DFG\backsim\triangle AFP$,所以$\frac{FG}{DG}=\frac{FP}{AP}$,即$\frac{2}{1}=\frac{\frac{AB-1}{\sqrt{3}}+94}{AB-1.5}$,所以$AB=\frac{581+95\sqrt{3}}{11}\approx\frac{581+95\times1.732}{11}\approx67.8$(m). 故选B.



例3 **【思路点拨】**设所需时间为t小时,用t表示出AB和CB,在$\triangle ABC$中应用余弦定理可求出t,再用正弦定理可求出$\angle CAB$,进而可得方位角.

解:如图所示,设所需时间为t小时,

则$AB=10\sqrt{3}t$海里,$CB=10t$海里,在$\triangle ABC$中,

由余弦定理得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 120°$,

即$(10\sqrt{3}t)^2=10^2+(10t)^2-2\times10\times10t\cos 120°$,

整理得$2t^2-t-1=0$,可得$t=1$,

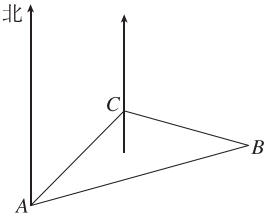
所以舰艇需1小时追上渔船.

$AB=10\sqrt{3}$海里,$CB=10$海里,

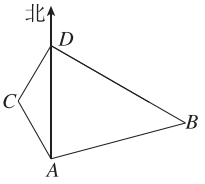
在$\triangle ABC$中,由正弦定理得$\frac{CB}{\sin\angle CAB}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$,

所以$\sin\angle CAB=\frac{CB\sin\angle ACB}{AB}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{10\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$,

所以$\angle CAB=30°$,所以舰艇航行的方位角为75°.



变式题 (1)AC (2)D **【解析】**(1)如图,由题意可知$\angle ADB=60°$,$\angle BAD=75°$,$\angle CAD=30°$,$AB=12\sqrt{6}$,$AC=8\sqrt{3}$,所以$B=180°-60°-75°=45°$. 在$\triangle ABD$中,由正弦定理得$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,所以$AD=\frac{12\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24$,故A正确;在$\triangle ACD$中,由余弦定理得$CD=\sqrt{AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD}$,即$CD=\sqrt{(8\sqrt{3})^2+24^2-2\times8\sqrt{3}\times24\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=8\sqrt{3}$,故B错误;由B项解析知$CD=AC$,所以$\angle CDA=\angle CAD=30°$,所以灯塔$C$在$D$的西偏南60°方向上,故C正确;由$\angle ADB=60°$,得$D$在灯塔$B$的北偏西60°方向上,故D错误. 故选AC.



(2)在$\triangle ADP$中,由正弦定理可得$AP=\frac{AD\sin 135°}{\sin 30°}=25\sqrt{2}$,在Rt$\triangle ABP$中,易知$AB=25\sqrt{2}\cos(\theta+15°)$,$PB=25\sqrt{2}\sin(\theta+15°)$,则$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{25\sqrt{2}\sin(\theta+15°)-10}{25\sqrt{2}\cos(\theta+15°)}$,整理可得$\cos\theta=\frac{5\sqrt{2}}{2}\sin 15°=\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{3}-5}{4}$. 故选D.

15.793858

第 29 讲　平面向量的概念及其线性运算

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 大小　方向　大小　$|a|$　$|\overrightarrow{AB}|$　$\mathbf{0}$　1 个单位长度　1
长度　方向　$a=b$　相同或相反　$a/\!/b$　共线
2. 相反向量　向量

【对点演练】

1. $\overrightarrow{MQ}$　**【解析】** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MQ}$.
2. $\frac{1}{3}$　**【解析】** 由题意知，存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}=\lambda\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}\right)$，则 $\begin{cases}t=-\frac{1}{2}\lambda,\\ \frac{3}{2}\lambda=-1,\end{cases}$ 解得 $t=\frac{1}{3}$.
3. $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　**【解析】** $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.
4. 充分不必要　**【解析】** $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Rightarrow|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，充分性成立，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，必要性不成立，所以“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”是“$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$”的充分不必要条件.
5. 平行四边形　**【解析】** 在平面四边形 $ABCD$ 中，因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以 $AB=DC$，且 $AB/\!/DC$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.
6. $[3,7]$　**【解析】** 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向共线时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=7$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向共线时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=3$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，$3<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<7$. 综上，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的取值范围为 $[3,7]$.

● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】** 根据平面向量的基本概念，对给出的说法进行分析，判断正误即可.

AC　**【解析】** 对于 A，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 的长度相等，方向相反，故 A 正确；对于 B，当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，且 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 为零向量时，不满足条件，故 B 错误；对于 C，两个有共同起点且相等的向量，其终点必相同，故 C 正确；对于 D，两个有公共终点的向量不一定是共线向量，故 D 错误. 故选 AC.

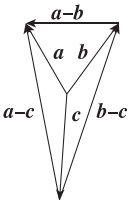
变式题　(1)BD　(2)A　**【解析】** (1)零向量是有方向的，其方向是任意的，故 A 错误；若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是零向量，则它们必相等，故 B 正确；若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都为单位向量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 长度相等，但方向不一定相同，故 C 错误；由向量相等的定义知 D 正确. 故选 BD.

(2)$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 等价于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，当 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，故选 A.

例 2　**【思路点拨】** (1)利用平行四边形法则与三角形法则判断即可. (2)根据充分性、必要性的定义，结合向量减法的几何意义判断条件间的推出关系，即可得到答案.

(1)C　(2)A　**【解析】** (1)∵ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$，∴ $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{DB}|$，∴ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形. 故选 C.

(2)如图，由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant1$，$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant2$，得 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant3$，充分性成立；当 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\leqslant3$ 时，不一定有 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant1$，$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant2$，必要性不成立. 综上，“$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant1$，$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant2$”是“$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\leqslant3$”的充分不必要条件. 故选 A.



例 3　**【思路点拨】** (1)结合已知条件的各线段的关系及向量减法的三角形法则求解. (2)根据平行四边形对角线平分及向量加减法求解.

(1)B　(2)A　**【解析】** (1)因为点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$，所以 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$，所以 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$，所以 $\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.

(2)因为 M 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点，所以 $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}$，所以 $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$. 故选 A.

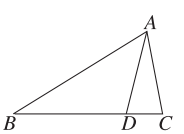
例 4　**【思路点拨】** (1)由 O 是 $\triangle ABC$ 的重心可得 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，结合已知条件可得 λ 的值. (2)利用平面向量的线性运算可将 $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CE}-2\overrightarrow{CA}$ 转化为 $5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$，即可得到 x 与 y 的值，进而求解.

(1)C　(2)D　**【解析】** (1)由题知 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\lambda(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}+(2-\lambda)\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$. ∵ O 是 $\triangle ABC$ 的重心，∴ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，∴ $(2-\lambda)\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，又 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 不共线，∴ $\lambda=1$. 故选 C.

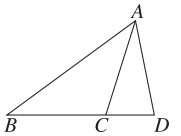
(2)因为 $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CE}-2\overrightarrow{CA}$，边 BC 的中点为 D，所以 $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=3(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BC})+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BE}-3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC}$，所以 $\frac{5}{2}\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE}+2\overrightarrow{AC}$，所以 $\frac{5}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=3\overrightarrow{BE}+2\overrightarrow{AC}$，即 $5\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{AB}=6\overrightarrow{BE}+4\overrightarrow{AC}$，即 $5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$，因为 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BE}$，所以 $x=5$，$y=6$，所以 $2x-y=4$. 故选 D.

【应用演练】

1. BD　**【解析】** 对于 A，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量且不共线时，不等式不成立，故 A 错误；对于 B，易知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，故 B 正确；对于 C，若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，故 C 错误；对于 D，易知 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，故 D 正确. 故选 BD.
2. B　**【解析】** 由题知 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\right]=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$. 故选 B.
3. ABD　**【解析】** 因为四边形 $ABCD$ 为梯形，其中 $AB/\!/CD$，$AB=2CD$，M,N 分别为 AB,CD 的中点，所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，故 A 正确；因为 CM 为 $\triangle ABC$ 的中线，所以 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，即 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，故 B 正确；$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，故 D 正确；$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，故 C 错误. 故选 ABD.
4. BC　**【解析】** 当点 D 在线段 BC 上时，如图①，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$，此时 $\frac{m}{n}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$. 当点 D 在线段 BC 的延长线上时，如图②，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$，此时 $\frac{m}{n}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}$. 故选 BC.



①



②

5. $\frac{20}{3}$　**【解析】** 由题知 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=-m\overrightarrow{OC}$，则 $\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}=-\frac{m}{5}\overrightarrow{OC}$，设 $-\frac{m}{5}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$，则 $\overrightarrow{OD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$，

因为$\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$，所以$A,B,D$三点共线，则$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OD}$反向共线，所以$m>0$，所以$\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OC}|}=\frac{m}{5}$，所以$\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{m}{m+5}$，因为$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{CD}|}$，所以$\frac{m}{m+5}=\frac{4}{7}$，解得$m=\frac{20}{3}$.

6. 2 **【解析】** 因为四边形$ABCD$是边长为1的正方形，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，所以$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=2\overrightarrow{AB}$，又$|\overrightarrow{AB}|=1$，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|2\overrightarrow{AB}|=2$.

例5 **【思路点拨】**(1)利用共线向量基本定理即可得到答案.(2)根据给定条件，求出$\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC}$，再利用共线向量基本定理逐项判断即可.

(1)B (2)B **【解析】**(1)∵$\lambda\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$与$2\boldsymbol{e}_1-5\boldsymbol{e}_2$平行，非零向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$不共线，∴存在实数$k$，使得$\lambda\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=k(2\boldsymbol{e}_1-5\boldsymbol{e}_2)=2k\boldsymbol{e}_1-5k\boldsymbol{e}_2$，∴$\begin{cases}\lambda=2k,\\3=-5k,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\frac{3}{5},\\\lambda=-\frac{6}{5}.\end{cases}$故选B.

(2)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为不共线的非零向量，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}+13\boldsymbol{b}$.因为$\frac{1}{-2}\neq\frac{5}{8}$，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$不共线，所以$A,B,C$三点不共线，故A不正确；因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BD}$共线，所以$A,B,D$三点共线，故B正确；因为$\frac{-2}{3}\neq\frac{8}{-3}$，所以$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{CD}$不共线，所以$B,C,D$三点不共线，故C不正确；因为$\frac{-1}{3}\neq\frac{13}{-3}$，所以$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{CD}$不共线，所以$A,C,D$三点不共线，故D不正确.故选B.

变式题 (1)A (2)$\frac{1}{4}$ **【解析】**(1)因为$k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$与$\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$共线且方向相反，所以有$k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=m(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)$，$m<0$，因为$\boldsymbol{e}_1$与$\boldsymbol{e}_2$是不共线的非零向量，所以$\begin{cases}k=m,\\1=km,\\m<0,\end{cases}$解得$k=m=-1$.故选A.

(2)因为$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，所以$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，又$C,P,D$三点共线，所以$m+\frac{3}{4}=1$，解得$m=\frac{1}{4}$.

第30讲　平面向量基本定理及坐标表示

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)不共线　$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$　(2)不共线
2. (1)(x_1+x_2,y_1+y_2)　(x_1-x_2,y_1-y_2)　$(\lambda x_1,\lambda y_1)$
   (2)(x_2-x_1,y_2-y_1)　$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
3. $x_1y_2-x_2y_1=0$

【对点演练】

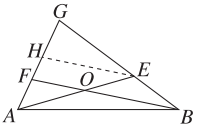
1. $(9,7)$ **【解析】** 依题意得$\overrightarrow{AB}=(2,1)$，$\overrightarrow{CD}=(5,5)$，所以$2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2(2,1)+(5,5)=(9,7)$.
2. $(1,5)$ **【解析】** 设$D(x,y)$，因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以$(3-(-1),-1-(-2))=(4,1)=(5-x,6-y)$，即$\begin{cases}4=5-x,\\1=6-y,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=5,\end{cases}$即$D(1,5)$.
3. $\frac{1}{3}$ **【解析】** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，又$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以$x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{6}$，所以$x+y=\frac{1}{3}$.
4. 2 **【解析】** 这三个向量中，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$不平行，所以可以构成基的是$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$，$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\}$，所以能构成2个基.
5. 2 **【解析】** 因为$\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,m)$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以$1\times m-(-2)\times(-1)=0$，解得$m=2$.
6. $\left(-\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$或$(1,0)$ **【解析】** 由点P在直线AB上，且$|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{PB}|$，可得$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$或$\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{PB}$.当$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$时，设$P(a,b)$，则$(a+3,b-4)=2(-1-a,2-b)$，解得$a=-\frac{5}{3}$，$b=\frac{8}{3}$，此时点$P$的坐标为$\left(-\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$.当$\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{PB}$时，设$P(m,n)$，则$(m+3,n-4)=-2(-1-m,2-n)$，解得$m=1$，$n=0$，此时点$P$的坐标为$(1,0)$.综上，点$P$的坐标为$\left(-\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$或$(1,0)$.

● 课堂考点探究

例1 **【思路点拨】**(1)将$\overrightarrow{AG}$用$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$表示出来，得到$x,y$的值，即可求解.(2)过点$E$作直线$EH\parallel BF$交$AG$于点$H$，结合$\overrightarrow{BE}=\frac{3}{8}\overrightarrow{BG}$和$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$可求出$\frac{AO}{AE}=\frac{4}{7}$，再用$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BG}$表示出$\overrightarrow{AO}$即可得出答案.

(1)A (2)C **【解析】**(1)设AC与BD相交于点O，则O为AC,BD的中点，因为G为$\triangle ABC$的重心，所以$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$，所以$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，又$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，所以$x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，所以$x+2y=\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.故选A.

(2)如图，过点E作直线$EH\parallel BF$交AG于点H，因为$\overrightarrow{BE}=\frac{3}{8}\overrightarrow{BG}$，所以$\frac{FH}{HG}=\frac{BE}{EG}=\frac{3}{5}$.设$AF=1$，因为$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$，



所以$FG=2$，所以$FH=2\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$.因为$EH\parallel BF$，所以$\frac{AO}{AE}=\frac{AF}{AH}=\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=\frac{4}{7}$，所以$\overrightarrow{AO}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AE}=\frac{4}{7}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\frac{4}{7}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{BG}\right)=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{14}\overrightarrow{BG}$.故选C.

变式题 (1)D (2)D **【解析】**(1)因为$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，所以$\overrightarrow{CP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，又$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AB}$$(m,n\in\mathbf{R})$，所以$m=\frac{1}{4}$，$n=\frac{1}{2}$，所以$m+n=\frac{3}{4}$.故选D.

(2)易知$\triangle APB\backsim\triangle CPD$，所以$\frac{AB}{CD}=\frac{AP}{PC}=\frac{PB}{PD}=\frac{2}{1}=2$，即$AP=2PC$，$PB=2PD$，则$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PC}$，故A中结论正确；因为四边形$ABCD$是等腰梯形，所以$AP=PB$，所以$|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{PD}|$，故B中结论正确；$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，故C中结论正确；$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\times\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，故D中结论错误.故选D.

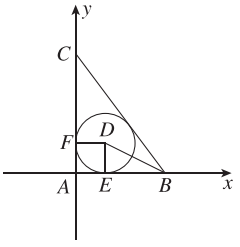
例2 **【思路点拨】**(1)代入各点坐标即可求解.(2)以A为坐标原点，分别以AB,AC所在直线为x轴、y轴建立平面直角坐标系，求得$\triangle ABC$内切圆的半径$r=2$，设$\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，用坐标表示$\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$，再利用平面向量基本定理求得$m,n$的值即可.

(1)B (2)A **【解析】**(1)因为$A(-1,1)$，$B(2,3)$，$C(-6,$

15793536316

5),所以$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}[(3,2)+(-5,4)]=\frac{1}{2}(-2,6)=(-1,3)$. 故选 B.

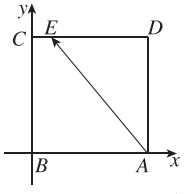
(2)如图所示,以 A 为坐标原点,分别以 AB,AC 所在直线为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系. 由已知可得 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$,过点 D 作 $DE\perp x$ 轴,$DF\perp y$ 轴,垂足分别为 E,F,则四边形 $AEDF$ 为正方形,$\therefore\triangle ABC$ 的内切圆的半径 $r=\frac{6+8-10}{2}=2$,$\therefore D(2,2)$,$B(6,0)$,



$C(0,8)$. 设 $\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}(m,n\in\mathbf{R})$,则 $(-4,2)=m(6,0)+n(0,8)$,$\therefore -4=6m$,$2=8n$,解得 $m=-\frac{2}{3}$,$n=\frac{1}{4}$,$\therefore\overrightarrow{BD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. 故选 A.

变式题 (1)D (2)B **【解析】** (1)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,1)-(-2,4)=(4,-3)$,所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$. 故选 D.

(2)如图,以 B 为坐标原点,AB,BC 所在直线分别为 x 轴、y 轴,建立平面直角坐标系,设 $AB=1$,则 $B(0,0)$,$A(1,0)$,$C(0,1)$,$D(1,1)$. 当点 E 在 BC 上时,设 $E(0,m)$,$m\in[0,1]$,则 $(-1,m)=\lambda(-1,0)+\mu(-1,1)$,即 $\begin{cases}-\lambda-\mu=-1,\\ m=\mu,\end{cases}$此时 $\lambda+\mu=1$;当点 E 在 CD(不包括端点)上时,设 $E(t,1)$,$t\in(0,1)$,则 $(t-1,1)=\lambda(-1,0)+\mu(-1,1)$,即 $\begin{cases}-\lambda-\mu=t-1,\\ \mu=1,\end{cases}$解得 $\begin{cases}\lambda=-t,\\ \mu=1,\end{cases}$此时 $\lambda+\mu=1-t\in(0,1)$;当点 E 在 AD 上时,设 $E(1,u)$,$u\in[0,1]$,则 $(0,u)=\lambda(-1,0)+\mu(-1,1)$,即 $\begin{cases}-\lambda-\mu=0,\\ \mu=u,\end{cases}$此时 $\lambda+\mu=0$. 综上,$\lambda+\mu$ 的取值范围是 $[0,1]$. 故选 B.



例 3 **【思路点拨】** (1)首先求出 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标,再根据向量共线的坐标表示得到方程,即可求解. (2)设出点 D 的坐标,求出 $\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BC}$ 的坐标,利用向量共线构造方程求解.

(1)A (2)A **【解析】** (1)$\because\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,-2)$,$\therefore 2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,2)$,又 $\boldsymbol{c}=(m,-1)$,$\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,$\therefore 2m+4=0$,解得 $m=-2$. 故选 A.

(2)设 $D(x,y)$,则 $\overrightarrow{AD}=(x,y-2)$,$\overrightarrow{BC}=(4,3)$,因为 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$,所以 $\begin{cases}4=2x,\\ 3=2(y-2),\end{cases}$解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=\frac{7}{2},\end{cases}$所以顶点 D 的坐标为 $\left(2,\frac{7}{2}\right)$. 故选 A.

变式题 (1)C (2)3 **【解析】** (1)$\because\boldsymbol{m}=(c-\sqrt{6},a-b)$,$\boldsymbol{n}=(a-b,c+\sqrt{6})$,且 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$,$\therefore(a-b)^2=(c-\sqrt{6})(c+\sqrt{6})$,即 $a^2+b^2-c^2=2ab-6$,$\therefore\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2ab-6}{2ab}=\frac{1}{2}$,解得 $ab=6$,$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

(2)$\because\overrightarrow{OA}=(-1,k)$,$\overrightarrow{OB}=(1,2)$,$\overrightarrow{OC}=(k+2,0)$,$\therefore\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,2-k)$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(k+1,-2)$. $\because A$,B,C 三点共线,$\therefore\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$,$\therefore\frac{k+1}{2}=\frac{-2}{2-k}$,又 $k>0$,$\therefore k=3$.

第 31 讲　平面向量的数量积

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (2)非零向量　$\angle AOB$　$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$　$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$　0
(3)$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$　$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$
2. ①$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$　②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　③$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$　$-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$　$|\boldsymbol{a}|^2$　$\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$　④$\leqslant$
3. ①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$　②$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$　$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$　③$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
4. $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$　$x_1x_2+y_1y_2$　$x_1x_2+y_1y_2=0$　$\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

【对点演练】

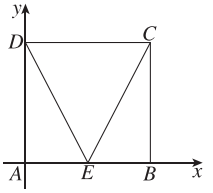
1. 5　$\frac{\sqrt{5}}{5}$　**【解析】** 因为 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-3,4)$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3\times1+2\times4=5$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{5}{5\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.
2. 120°　**【解析】** 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,因为 $|\boldsymbol{a}|=6$,$|\boldsymbol{b}|=8$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-24$,所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-24}{6\times8}=-\frac{1}{2}$,又 $\theta\in[0°,180°]$,所以 $\theta=120°$.
3. 1　**【解析】** $\because C=90°$,$CA=CB=1$,$\therefore AB=\sqrt{2}$,$A=45°$,$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos A=1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$.
4. $\sqrt{7}$　**【解析】** 因为 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=1$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4+2\times2\times1\times\cos\frac{\pi}{3}+1}=\sqrt{7}$.
5. 1　**【解析】** $\because|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2$,且 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$,$\therefore 9=1-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\times3$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$.
6. $-3\sqrt{2}$　**【解析】** 向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$ 方向上的投影数量为 $|\boldsymbol{a}|\cdot\cos135°=6\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-3\sqrt{2}$.
7. 菱形　**【解析】** $\because$ 平面四边形 $ABCD$ 满足 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{0}$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,又 $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AC}=0$,即 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,$\therefore$ 该平行四边形的对角线互相垂直,$\therefore$ 该四边形一定是菱形.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】** (1)思路一:以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\}$ 为基表示 $\overrightarrow{EC}$,$\overrightarrow{ED}$,再结合数量积的运算律运算求解;思路二:建系,利用平面向量的坐标运算求解;思路三:利用余弦定理求出 $\cos\angle DEC$,进而根据数量积的定义求解. (2)思路一:由已知可得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=0$,展开化简后可得结果;思路二:由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 变形可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{7}{2}$,$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}$,相加可得结果.

(1)B　(2)$-\frac{9}{2}$　**【解析】** (1)方法一:由题知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=2$,$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2=-1+4=3$. 故选 B.

方法二:如图,以 A 为原点,AB,AD 所在直线分别为 x,y 轴,建立平面直角坐标系,则 $E(1,0)$,$C(2,2)$,$D(0,2)$,则 $\overrightarrow{EC}=(1,2)$,$\overrightarrow{ED}=(-1,2)$,所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=(1,2)\cdot(-1,2)=-1+4=3$. 故选 B.



方法三:由题意可得,$ED=EC=\sqrt{5}$,$CD=2$,在 $\triangle CDE$ 中,由余弦定理可得 $\cos\angle DEC=\frac{DE^2+CE^2-DC^2}{2DE\cdot CE}=\frac{5+5-4}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$,所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=|\overrightarrow{EC}||\overrightarrow{ED}|\cos\angle DEC=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{5}=3$. 故选 B.

(2)方法一:由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}{2}=-\frac{9}{2}$.

方法二:由题知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}^2$,可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$,同理可得 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{7}{2}$,$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot$

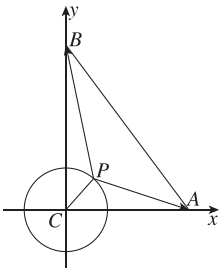
高考总复习

$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{9}{2}$.

变式题 (1)B (2)A (3)D **【解析】**(1)因为$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=10$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$,$|\boldsymbol{b}|=2$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,所以$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=20-4-2=14$. 故选 B.

(2)由题意可得,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,则$\overrightarrow{AE}^2=\overrightarrow{AD}^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2=4$①,$\overrightarrow{AF}^2=\overrightarrow{AB}^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AD}^2=12$②,由①−②得$\frac{8}{9}\overrightarrow{AD}^2-\frac{8}{9}\overrightarrow{AB}^2=-8$,即$\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2=9$,所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}^2=-9$. 故选 A.

(3)方法一:以 C 为坐标原点,CA,CB 所在直线分别为 x,y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系,则 $A(3,0)$,$B(0,4)$. 设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$,$\theta\in[0,2\pi)$,则$\overrightarrow{PA}=(3-\cos\theta,-\sin\theta)$,$\overrightarrow{PB}=(-\cos\theta,4-\sin\theta)$,$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(3-\cos\theta)(-\cos\theta)+(-\sin\theta)(4-\sin\theta)=-3\cos\theta-4\sin\theta+1=-5\sin(\theta+\varphi)+1\in[-4,6]$(其中$\tan\varphi=\frac{3}{4}$). 故选 D.



方法二:由题易知$\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CB}\rangle=\pm\sin\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CA}\rangle$,且$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1+3\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CA}\rangle+4\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CB}\rangle+0=1+3\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CA}\rangle\pm4\sin\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CA}\rangle=1+5\sin(\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CA}\rangle\pm\varphi)$,其中$\tan\varphi=\frac{3}{4}$,$\therefore-4\leqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant6$. 故选 D.

例 2 **【思路点拨】**(1)根据$\boldsymbol{a}\perp(4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$得出$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2$,结合$|\boldsymbol{b}|=4$及向量模的计算公式求解即可. (2)根据题意结合向量数量积的运算求解.

(1)A (2)$\sqrt{3}$ **【解析】**(1)因为非零向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\perp(4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$,所以$\boldsymbol{a}\cdot(4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0$,即$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2$,又$|\boldsymbol{b}|=4$,所以$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2}=8$. 故选 A.

(2)由$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$可得$\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3$①,由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,可得$3\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即$\boldsymbol{a}^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$②,联立①②得$\boldsymbol{b}^2=3$,即$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

例 3 **【思路点拨】**(1)先根据向量减法得向量$\boldsymbol{b}$的坐标,再根据向量夹角余弦值的坐标公式计算即可得到答案. (2)根据题意,将式子两边同时平方,然后相减即可得到$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=4$,然后结合向量夹角公式即可得到$\cos\theta\geqslant\frac{1}{2}$,从而得到结果.

(1)C (2)AB **【解析】**(1)$\because\boldsymbol{a}=(4,3)$,$\therefore2\boldsymbol{a}=(8,6)$,又$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,18)$,$\therefore\boldsymbol{b}=(-5,12)$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times(-5)+3\times12=16$,又$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$,$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{16}{5\times13}=\frac{16}{65}$. 故选 C.

(2)因为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$,所以$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$,因为$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,所以$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,所以$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$,即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,所以$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=4$. 因为$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2\geqslant2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$(当且仅当$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$时等号成立),所以$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\leqslant2$,设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\geqslant\frac{1}{2}$,所以$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角可以为$\frac{\pi}{6}$,$\frac{2\pi}{7}$. 故选 AB.

例 4 **【思路点拨】**(1)思路一:根据$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的坐标得到$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,再根据向量垂直的坐标表示即可得到答案;思路二:根据向量的坐标运算求出$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$,再根据向量垂直的坐标表示即可得到答案. (2)根据向量垂直得出数量积为 0,结合数量积的运算可得答案.

(1)D (2)6 **【解析】**(1)方法一:因为$\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,所以$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,又$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$,所以$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\lambda\mu\boldsymbol{b}^2=0$,即$2+2\lambda\mu=0$,所以$\lambda\mu=-1$,故选 D.

方法二:因为$\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,所以$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,1-\lambda)$,$\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(1+\mu,1-\mu)$,由$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$得$(1+\lambda)(1+\mu)+(1-\lambda)(1-\mu)=0$,即$2+2\lambda\mu=0$,所以$\lambda\mu=-1$,故选 D.

(2)设$|\boldsymbol{a}|=t$,由已知可得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=t$,因为$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$垂直,所以$\boldsymbol{b}\cdot\left(\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}\right)=t-6=0$,解得$t=6$,所以$|\boldsymbol{a}|=6$.

【应用演练】

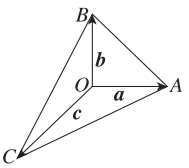
1. D **【解析】**方法一:因为向量$\boldsymbol{a}=(-2,1)$,$\boldsymbol{b}=(m,2)$,所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2+m,3)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2-m,-1)$,又因为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,所以$\sqrt{(-2+m)^2+3^2}=\sqrt{(-2-m)^2+(-1)^2}$,解得$m=1$. 故选 D.
方法二:由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,即$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,得$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,故$-2m+2=0$,解得$m=1$. 故选 D.

2. C **【解析】**因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2=8$,$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|=2$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$,所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{2}$,又$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$,所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$. 故选 C.

3. B **【解析】**由题意得$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$\because(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,$\therefore(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,即$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2=1$,$\therefore$向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$方向上的投影数量为$\boldsymbol{b}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=1$. 故选 B.

4. C **【解析】**$|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{t^2\boldsymbol{a}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{t^2+2t\times1\times2\times\frac{1}{2}+4}=\sqrt{(t+1)^2+3}$,则当$t=-1$时,$|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$取得最小值$\sqrt{3}$. 故选 C.

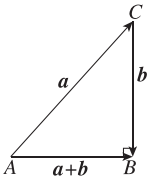
5. D **【解析】**因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$,平方得$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}^2$,即$1+1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 如图,设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CB}$,$\angle BOC=\angle AOC=\frac{3\pi}{4}$,



$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$,由余弦定理得$|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{5}$,$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$,所以在$\triangle ACB$中,由余弦定理得$\cos\angle ACB=\frac{5+5-2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$,即$\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\frac{4}{5}$. 故选 D.

6. $\frac{3\pi}{4}$ **【解析】**方法一:由$\boldsymbol{a}=(1,1)$,得$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,由$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$,得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=0$,即$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+1=0$,解得$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,因为$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$,所以$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{3\pi}{4}$.

方法二:由$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$,得$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,由$\boldsymbol{a}=(1,1)$,得$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,且$|\boldsymbol{b}|=1$,令$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CB}$,则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$,则可得到如图所示的Rt$\triangle ABC$,故$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$.



例 5 **【思路点拨】**(1)由$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$可得$(\sin C+\sin B)(c-b)+(\sin B-\sin A)a=0$,利用正弦定理统一成边的形式化简后,再利用余弦定理可求得角 C 的大小;(2)由$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$,可求得$b=4$,由$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$,可得$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$,平方化简可得结果.

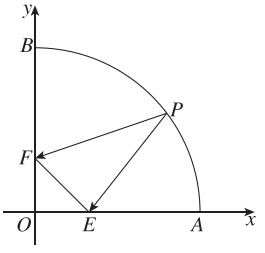
解:(1)因为$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,向量$\boldsymbol{m}=(\sin C+\sin B,\sin B-\sin A)$,$\boldsymbol{n}=(c-b,a)$,所以$(\sin C+\sin B)(c-b)+(\sin B-\sin A)a=0$,由正弦定理得$(c+b)(c-b)+(b-a)a=0$,即

$a^2+b^2-c^2=ab$，由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times b\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，解得 $b=4$，因为 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，

所以 $|\overrightarrow{CD}|^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right)^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{CA}^2+2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{CB}^2=\frac{1}{9}\times16+2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times2\times4\times\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\times4=\frac{16}{3}$，所以 $CD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

变式题 (1)A (2)ABC **[解析]** (1)如图，以 O 为坐标原点，OA，OB 所在直线分别为 x，y 轴建立平面直角坐标系，则 $A(2,0)$，$B(0,2)$，$E\left(\frac{2}{3},0\right)$，$F\left(0,\frac{2}{3}\right)$. 设 $P(x,y)$，$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，易知 $x^2+y^2=4$，所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=\left(\frac{2}{3}-x,-y\right)\cdot\left(-x,\frac{2}{3}-y\right)=x^2-\frac{2}{3}x+y^2-\frac{2}{3}y=4-\frac{2}{3}(x+y)$，因为 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4$，所以 $(x+y)^2=4+2xy$，又 $x^2+y^2\geqslant2xy$，即 $4\geqslant2xy$，所以 $0\leqslant xy\leqslant2$，当且仅当 $x=y=\sqrt{2}$ 时等号成立，所以 $(x+y)^2\leqslant8$，所以 $x+y\leqslant2\sqrt{2}$，所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最小值为 $4-\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 故选 A.



(2)因为点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，$C\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$，所以 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta}=1$，所以 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，故 A 正确；因为 $\overrightarrow{AC}=\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\alpha,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\alpha\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\beta,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\beta\right)$，所以 $\overrightarrow{AC}^2=\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\alpha\right)^2+\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\alpha\right)^2=\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos^2\alpha+\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\alpha-2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\alpha\right)=2-2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)=2-2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$，$\overrightarrow{BC}^2=\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\beta\right)^2+\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\beta\right)^2=\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos^2\beta+\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\beta-2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\beta\right)=2-2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)=2-2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2-\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$，所以 $\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{BC}^2$，所以 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$，故 B 正确；$\overrightarrow{OC}=\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\alpha=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，故 C 正确；$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=\cos(\alpha-\beta)=2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1$，$2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，故 D 错误. 故选 ABC.

第 32 讲　平面向量的综合问题

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

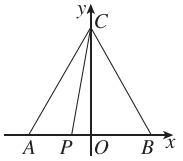
1. 向量　向量问题　向量运算

【对点演练】

1. 5 **[解析]** $\because\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\therefore AC\perp BD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=5$.

2. $|\boldsymbol{v}_1|+|\boldsymbol{v}_2|$ **[解析]** 顺风行驶的速度的大小为 $|\boldsymbol{v}_1|+|\boldsymbol{v}_2|$.

3. $\left[-\frac{1}{4},2\right]$ **[解析]** 取线段 AB 的中点 O，连接 OC，则 $OC\perp AB$，以 O 为坐标原点，OB，OC 所在直线分别为 x，y 轴建立如图所示的平面直角坐标系. 设 $P(a,0)$，则 $-1\leqslant a\leqslant1$，$B(1,0)$，$C(0,\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{PB}=(1-a,0)$，$\overrightarrow{PC}=(-a,\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=a(a-1)=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\in\left[-\frac{1}{4},2\right]$.



4. 重 **[解析]** 由原等式得 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，即 $\overrightarrow{AP}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，根据平行四边形法则知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$（$D$ 为 BC 的中点），所以点 P 的轨迹一定过 $\triangle ABC$ 的重心.

5. 外心 **[解析]** 设 D 为 BC 的中点，可得 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}$，$\because\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$，$\therefore2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=2\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$，$\because\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$，移项得 $\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=0$，即 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PD}=0$，$\therefore\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{PD}$，$\therefore$ 点 P 是 $\triangle ABC$ 的外心.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)由三角形“四心”的性质即可判断出答案.

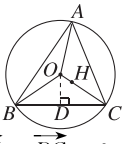
(2)利用正弦定理将 $\sin A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin C\cdot\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$ 化为 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$ 后，再变形为 $a+b+c)\overrightarrow{OC}=-ab\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}+\frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}\right)$，进而得到结论.

(1)B (2)C **[解析]** (1)$\because\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{0}$，$\therefore\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}$，设 AB 的中点为 D，则 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MD}$，$\therefore C$，$M$，$D$ 三点共线，即 M 为 $\triangle ABC$ 的中线 CD 上的点，且 $MC=2MD$，$\therefore M$ 为 $\triangle ABC$ 的重心. $\because|\overrightarrow{NA}|=|\overrightarrow{NB}|=|\overrightarrow{NC}|$，$\therefore NA=NB=NC$，$\therefore N$ 为 $\triangle ABC$ 的外心. $\because\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$，$\therefore\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})=0$，即 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$\therefore PB\perp AC$. 同理可得，$PA\perp BC$，$PC\perp AB$，$\therefore P$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 故选 B.

(2)由题及正弦定理得 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，可得 $c\overrightarrow{OC}=-a\overrightarrow{OA}-b\overrightarrow{OB}=-a(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})-b(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})$，所以 $(a+b+c)\overrightarrow{OC}=-a\overrightarrow{CA}-b\overrightarrow{CB}=-ab\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}+\frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}\right)$，所以点 O 在 C 的平分线上. 同理可得，O 也在 A，B 的平分线上. 故点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心.

变式题 (1)C (2)1 **[解析]** (1)设 AB 的中点为 D，连接 OD，因为点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $OD\perp AB$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+0=\frac{1}{2}\times2^2=2$.

(2)如图所示，$\because\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AO}$，$\therefore\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AO}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，$\therefore\overrightarrow{AH}=(m-1)\overrightarrow{OA}+m(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，取 BC 的中点 D，连接 OD，则 $OD\perp BC$，$\therefore\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. $\because AH\perp BC$，$\therefore\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\because\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(m-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+2m\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\therefore0=(m-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+0$，$\because\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 不恒为 0，$\therefore m-1=0$，解得 $m=1$.



例 2 **[思路点拨]** (1)以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\}$ 为基，求 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$，利用函数性质求最小值. (2)在 $\triangle ABC$ 中，根据已知条件与余弦定理可得到 $BC=3AC$，进而求得 $EC=2AC$，$AE=\frac{3}{2}AC$，再利用余弦定理可得 $\cos\angle AEC=\frac{7}{8}$，即可求得答案.

(1)B (2)A **[解析]** (1)在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，

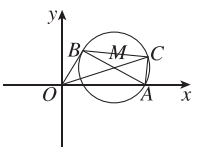
$\angle BAD=60°$，则 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos\angle BAD=2\times2\times\frac{1}{2}=2$. 因为 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+\frac{1-x}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+\frac{-2-x}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(x\overrightarrow{AB}+\frac{-2-x}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AB}^2+\frac{-2-x}{3}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=4x-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x=\frac{10x-4}{3}$，又 $x\in[0,1]$，所以当 $x=0$ 时，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ 取得最小值 $-\frac{4}{3}$. 故选 B.

(2)在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$，所以 $(\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0$，所以 $(\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC})\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=0$，整理得 $|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-8|\overrightarrow{AC}|^2=0$，即 $|\overrightarrow{AB}|^2-2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC-8|\overrightarrow{AC}|^2=0$，由余弦定理得 $AB^2-2AC\cdot AB\cdot\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AC\cdot AB}-8AC^2=0$，整理可得 $BC=3AC$，又 $BD=2CD$，BD，CD 的中点分别为 E，F，所以 $EC=\frac{2}{3}BC=2AC$，$AE=EF=\frac{3}{2}AC$. 在 $\triangle AEC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle AEC=\frac{AE^2+EC^2-AC^2}{2AE\cdot EC}=\frac{\frac{9}{4}AC^2+4AC^2-AC^2}{2\times\frac{3}{2}AC\times2AC}=\frac{7}{8}$，因为 $\cos\angle AEC=1-2\sin^2\frac{\angle AEC}{2}=\frac{7}{8}$，且 $0<\frac{\angle AEC}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\frac{\angle AEC}{2}=\frac{1}{4}$，所以 $\cos\angle EAF=\cos\frac{\pi-\angle AEC}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\angle AEC}{2}\right)=\sin\frac{\angle AEC}{2}=\frac{1}{4}$. 故选 A.

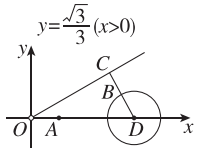
变式题 D **【解析】** 取 BC 的中点 D，连接 OD，则 $OD\perp BC$，所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO})=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)=\frac{1}{2}(b^2-c^2)=\frac{1}{2}[b^2-(2b-b^2)]=b^2-b=\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，因为 $c^2=2b-b^2>0$，即 $b(b-2)<0$，所以 $0<b<2$，所以 $-\frac{1}{4}\leqslant\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AO}<2$. 故选 D.

例 3 **【思路点拨】** 将向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的起点平移到坐标原点 O，设向量 $2\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的终点分别为 A，B，C，将 $(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$ 化为 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，得点 C 在以 AB 为直径的圆上，利用圆的知识可求出结果.

D **【解析】** 将向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的起点平移到坐标原点 O，设向量 $2\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的终点分别为 A，B，C，则 $\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BC}$，由 $(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，得 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，则点 C 在以 AB 为直径的圆上. 因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，且夹角为 $\frac{\pi}{3}$，所以不妨设 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $A(2,0)$，$B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$（如图），所以以线段 AB 为直径的圆的圆心 $M\left(\frac{5}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $|MO|=\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，所以 $|\boldsymbol{c}|=|OC|\leqslant|OM|+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.



变式题 A **【解析】** 依题意可设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=(x,y)$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，则 $4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4-x,-y)$，又 $|4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，所以 $\sqrt{(4-x)^2+(-y)^2}=1$，即 $(x-4)^2+y^2=1$，则点 B 在以 $D(4,0)$ 为圆心，1 为半径的圆上运动（如图）. 因为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\pi}{6}$，所以点 C 在曲线 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x(x>0)$ 上运动，根据对称性不妨令点 C 在曲线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x(x>0)$ 上，则 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 表示圆 D 上的点 B 与曲线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x(x>0)$ 上的点 C 之间的距离，因为圆心 D 到曲线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x(x>0)$ 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=2$，所以 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 的最小值为 $d-1=1$. 故选 A.



第 33 讲　复数

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)虚数单位　实部　虚部　$b=0$　$b\neq0$　$a=0$ 且 $b\neq0$
(2)$a=c$ 且 $b=d$　(3)$a=c$ 且 $b=-d$
(4)$|z|$　$|a+b\mathrm{i}|$　$\sqrt{a^2+b^2}$
2. (1)$Z(a,b)$
3. ①$(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$　②$(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$　③$(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$　④$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$

【对点演练】

1. -1　**【解析】** 由题意知 $\begin{cases}m^2-1=0,\\m-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=-1$.
2. $-3-4\mathrm{i}$　**【解析】** $\because\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$，$\therefore\overrightarrow{CA}$ 在复平面内对应的复数为 $-1-3\mathrm{i}-(2+\mathrm{i})=-3-4\mathrm{i}$.
3. $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　$\frac{\sqrt{26}}{2}$　**【解析】** $\because\frac{2+3\mathrm{i}}{z}=1+\mathrm{i}$，$\therefore z=\frac{2+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，$\therefore|z|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$.
4. $-\frac{3}{5}$　**【解析】** $\frac{2}{1+3\mathrm{i}}=\frac{2(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}=\frac{2-6\mathrm{i}}{10}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$，则复数 $\frac{2}{1+3\mathrm{i}}$ 的虚部为 $-\frac{3}{5}$.
5. 四　一　**【解析】** $z=2\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})=2-2\mathrm{i}$，则 z 在复平面内对应的点在第四象限. $\overline{z}=2+2\mathrm{i}$，则 z 的共轭复数在复平面内对应的点在第一象限.
6. $-1+\mathrm{i}$　**【解析】** 由 $(z-1)\cdot\mathrm{i}^{2025}=1-2\mathrm{i}$，得 $(z-1)\mathrm{i}=1-2\mathrm{i}$，则 $z-1=\frac{1-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-2-\mathrm{i}$，则 $z=-1-\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=-1+\mathrm{i}$.
7. -3　**【解析】** 由题意得，$z=\frac{1+a\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=\frac{(1+a\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}=\frac{3+a}{10}+\frac{3a-1}{10}\mathrm{i}$，因为复数 z 为纯虚数，所以 $\begin{cases}3+a=0,\\3a-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=-3$.
8. 2π　**【解析】** 设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，由 $1\leqslant|z-1+\mathrm{i}|\leqslant\sqrt{3}$ 可得 $1\leqslant(a-1)^2+(b+1)^2\leqslant3$，即复数 z 在复平面内对应的点构成的图形是以 $(1,-1)$ 为圆心，分别以 1，$\sqrt{3}$ 为半径的圆所夹的圆环，其面积为 $3\pi-\pi=2\pi$.

● 课堂考点探究

探究点一

1. B　**【解析】** 由题意知，$a+3\mathrm{i}=-1+b\mathrm{i}$，则 $a=-1$，$b=3$，故选 B.
2. D　**【解析】** 设 $z=b\mathrm{i}$，$b\in\mathbf{R}$，$b\neq0$，则 $(z+2)^2+8\mathrm{i}=(b\mathrm{i}+2)^2+8\mathrm{i}=4+4b\mathrm{i}+b^2\mathrm{i}^2+8\mathrm{i}=4-b^2+(4b+8)\mathrm{i}$ 为纯虚数，所以 $\begin{cases}4-b^2=0,\\4b+8\neq0,\end{cases}$ 解得 $b=2$，所以 $z=2\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=-2\mathrm{i}$. 故选 D.
3. A　**【解析】** 因为 $|4-3\mathrm{i}|=5$，所以 $z(1+2\mathrm{i})=5$，所以 $z=$

$\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=1-2i$,故复数 z 的虚部为 -2. 故选 A.

4. BD **【解析】** 由 $(-1+i)\cdot z=1+5i$,得 $z=\frac{1+5i}{-1+i}=\frac{(1+5i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{4-6i}{2}=2-3i$. z 的虚部为 -3,故 A 错误;z 的模为 $\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$,故 B 正确;$z$ 的共轭复数为 $2+3i$,故 C 错误;z 在复平面内对应的点为 $(2,-3)$,位于第四象限,故 D 正确. 故选 BD.

探究点二

1. D **【解析】** 由题知 $z=-1+\sqrt{3}i$,则 $\bar{z}=-1-\sqrt{3}i$. 故选 D.
2. A **【解析】** 因为 $(1+3i)(3-i)=3-i+9i-3i^2=6+8i$,所以 $(1+3i)(3-i)$ 在复平面内对应的点为 $(6,8)$,位于第一象限,故选 A.
3. $1+\sqrt{5}$ **【解析】** 设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,$\because|z+1-2i|=1$,$\therefore|a+1+(b-2)i|=1$,即 $(a+1)^2+(b-2)^2=1$,则复数 z 在复平面内对应的点的轨迹是以 $A(-1,2)$ 为圆心,以 1 为半径的圆. $\because|z|$ 表示复数 z 在复平面内对应的点到坐标原点 O 的距离,$\therefore|z|$ 的最大值为 $|OA|+r=\sqrt{(-1)^2+2^2}+1=1+\sqrt{5}$.
4. $2\sqrt{3}$ **【解析】** 在复平面内,设 z_1,z_2 对应的向量分别为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$,且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$. $\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2$,$\therefore 4+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=16$,可得 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$,即 $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$.

探究点三

1. D **【解析】** $(2+2i)(1-2i)=2-4i+2i-4i^2=6-2i$,故选 D.
2. A **【解析】** 因为 $z=\frac{1-i}{2+2i}=\frac{(1-i)^2}{2(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{4}=-\frac{1}{2}i$,所以 $\bar{z}=\frac{1}{2}i$,所以 $z-\bar{z}=-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i=-i$. 故选 A.
3. C **【解析】** $\frac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5(1-i)}{5}=1-i$. 故选 C.
4. BCD **【解析】** 若 $z=i$,则 $z^2=-1\neq|z|^2=1$,A 错误;$\frac{z^2}{|z|^2}=\frac{z^2}{z\cdot\bar{z}}=\frac{z}{\bar{z}}$,B 正确;设 $z=a+bi,w=c+di,a,b,c,d\in\mathbf{R}$,且 a,b 不同时为 0,c,d 不同时为 0,则 $z-w=(a-c)+(b-d)i$,$\therefore\overline{z-w}=(a-c)-(b-d)i$,又 $\bar{z}-\bar{w}=a-bi-c+di=(a-c)-(b-d)i$,$\therefore\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$,C 正确;$\because\left|\frac{z}{w}\right|=\left|\frac{a+bi}{c+di}\right|=\left|\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\right|=\frac{\sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}}{c^2+d^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$,$\frac{|z|}{|w|}=\frac{|a+bi|}{|c+di|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$,$\therefore\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$,D 正确. 故选 BCD.
5. $-\frac{3}{5}$ **【解析】** 因为 $2+i$ 是关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$ 的一个根,所以 $2-i$ 是该方程的另一个根,所以 $\begin{cases}\frac{1}{a}=(2+i)(2-i),\\-\frac{b}{a}=(2+i)+(2-i),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{5},\\b=-\frac{4}{5},\end{cases}$ 所以 $a+b=-\frac{3}{5}$.

第六单元　数列

第 34 讲　数列的概念与简单表示法

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 一定次序　每一个数　n　$a_1+a_2+\cdots+a_n$
2. 右侧　$f(n)$　3. 有限　无限　$>$　$<$　$=$

【对点演练】

1. $\frac{1}{n(n+2)}$ **【解析】** $\because a_1=\frac{1}{1\times(1+2)}=\frac{1}{3}$,$a_2=\frac{1}{2\times(2+2)}=\frac{1}{8}$,$a_3=\frac{1}{3\times(3+2)}=\frac{1}{15}$,$\cdots$,$\therefore a_n=\frac{1}{n(n+2)}$,$n\in\mathbf{N}^*$.
2. $(-\infty,3)$ **【解析】** 由题意得 $a_{n+1}>a_n$,即 $(n+1)^2-\lambda(n+1)+1>n^2-\lambda n+1$,化简得 $\lambda<2n+1$,$\because n\in\mathbf{N}^*$,$\therefore$ 当 $n=1$ 时,$2n+1$ 取得最小值 3,$\therefore\lambda<3$.
3. $\frac{1}{2}$　$\frac{2027}{2}$ **【解析】** 因为 $a_1=2$,$a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n}=1-\frac{1}{a_n}$,所以 $a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,$a_3=1-2=-1$,$a_4=1+1=2$,$\cdots$,所以数列 $\{a_n\}$ 是周期数列且周期为 3,所以 $a_{2024}=a_{674\times3+2}=a_2=\frac{1}{2}$,$S_{2024}=674(a_1+a_2+a_3)+2+\frac{1}{2}=674\times\frac{3}{2}+2+\frac{1}{2}=\frac{2027}{2}$.
4. 15 **【解析】** 因为 $1=3^{7\times0}$,$3^7=3^{7\times1}$,$3^{14}=3^{7\times2}$,$3^{21}=3^{7\times3}$,所以该数列的一个通项公式为 $a_n=3^{7(n-1)}$. 由 $3^{7(n-1)}=3^{98}$,解得 $n=15$,所以 3^{98} 是这个数列的第 15 项.
5. 0　1 或 2 **【解析】** $a_n=n^2-3n+2=\left(n-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,由 $n\in\mathbf{N}^*$ 知,当 $n=1$ 或 $n=2$ 时,a_n 最小,则 $\{a_n\}$ 的最小项为 $a_1=a_2=0$,即第 1 项或第 2 项最小.
6. $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\2^n,n\geqslant2\end{cases}$　$a_n=2^n$ **【解析】** 当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-\lambda)-(2^n-\lambda)=2^n$(*);当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=4-\lambda$. 当 $\lambda=1$ 时,$a_1=3$ 不满足(*)式,此时数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\2^n,n\geqslant2.\end{cases}$ 当 $\lambda=2$ 时,$a_1=2$ 满足(*)式,此时数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】** (1)先确定各项的正负,再找数字规律. (2)依次验证前 4 项即可.

(1)C　(2)ABD **【解析】** (1)观察可得第 n 项的正负由 $(-1)^n$ 确定,且 $|a_n|=\frac{n(n+1)}{2}$,$\therefore a_n=(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}$,故选 C.

(2)令 $n=1,2,3,4$,分别代入各选项进行验证,易知 C 选项中 $a_3=-2$,不合题意,A,B,D 均符合题意. 故选 ABD.

变式题　(1)D　(2)C **【解析】** (1)观察各项,依次可写成 $\frac{3}{1\times3}$,$-\frac{5}{2\times4}$,$\frac{7}{3\times5}$,$-\frac{9}{4\times6}$,$\cdots$,易知选项 D 符合题意. 故选 D.

(2)根据题意,数列 $9,99,999,9999,\cdots$ 的一个通项公式为 $b_n=10^n-1$,则数列 $0.9,0.99,0.999,0.9999,\cdots$ 的一个通项公式为 $c_n=\frac{1}{10^n}\times(10^n-1)=1-\frac{1}{10^n}$,则数列 $0.3,0.33,0.333,0.3333,\cdots$ 的一个通项公式是 $a_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$. 故选 C.

例 2 **【思路点拨】** (1)由题意可得 $\{S_n-n\}$ 是以 2 为首项,2 为公比的等比数列,即可求出 S_n,再由 S_n 与 a_n 的关系求出 $\{a_n\}$ 的通项公式. (2)根据题目给出的递推公式进行升次作差即可求解.

(1)$a_n=\begin{cases}3,n=1,\\2^{n-1}+1,n\geqslant2\end{cases}$　(2)$a_n=\begin{cases}16,n=1,\\12^n,n\geqslant2\end{cases}$

【解析】 (1)$\because S_{n+1}-2S_n=1-n$,$\therefore S_{n+1}-(n+1)=2(S_n-n)$,又 $S_1-1=2\neq0$,$\therefore\frac{S_{n+1}-(n+1)}{S_n-n}=2$,$\therefore\{S_n-n\}$ 是以 2 为首项,2 为公比的等比数列,$\therefore S_n-n=2\cdot2^{n-1}=2^n$,即 $S_n=n+2^n$. 当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n+2^n-(n-1+2^{n-1})=2^{n-1}+1$,又 $a_1=S_1=3$ 不满足上式,$\therefore a_n=\begin{cases}3,n=1,\\2^{n-1}+1,n\geqslant2.\end{cases}$

(2)$\because a_1+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{3^{n-1}}=4^{n+1}$①,$\therefore a_1=4^2$,$a_1+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{3^{n-1}}+\frac{a_{n+1}}{3^n}=4^{n+2}$②,②−①得 $\frac{a_{n+1}}{3^n}=4^{n+2}-4^{n+1}=3\times4^{n+1}$,即 $a_{n+1}=3^{n+1}\times4^{n+1}=12^{n+1}$,则当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=12^n$,当 $n=1$ 时,$a_1=16$ 不适合上式,$\therefore a_n=\begin{cases}16,n=1,\\12^n,n\geqslant2.\end{cases}$

变式题　(1)C　(2)-2^{n-1} **【解析】** (1)当 $n=1$ 时,$a_2+2S_1=2+1$,则 $a_2=1$. 当 $n\geqslant2$ 时,由 $a_{n+1}+2S_n=2n+1$ 得 $a_n+2S_{n-1}=2n-1$,两式相减可得 $a_{n+1}-a_n+2a_n=2(n\geqslant2)$,即

$a_n+a_{n+1}=2(n\geqslant 2)$. 所以 $a_n=1(n\in\mathbf{N}^*)$, 可得 $S_n=n$, 所以 $S_{2023}=2023$. 故选 C.

(2)当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=2a_1+1$, $\therefore a_1=-1$. 当 $n\geqslant 2$ 时, $S_n=2a_n+1$①, $S_{n-1}=2a_{n-1}+1$②, ①－②得 $S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}(n\geqslant 2)$, 即 $a_n=2a_n-2a_{n-1}(n\geqslant 2)$, 即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$. $\therefore\{a_n\}$ 是首项 $a_1=-1$, 公比 $q=2$ 的等比数列, $\therefore a_n=a_1\cdot q^{n-1}=-2^{n-1}$.

例 3 **【思路点拨】** (1)先得到 $a_n=\dfrac{1}{n+\dfrac{6}{n}}$, 再由对勾函数的性质可得 $y=\dfrac{1}{x+\dfrac{6}{x}}$ 的单调性, 从而可得 $\{a_n\}$ 的最大项. (2)根据数列为递增数列列方程组求解即可. (3)根据题中递推公式可得数列 $\{a_n\}$ 具有周期性, 周期为 4, 进而求解即可.

(1)B (2)D (3)C **【解析】** (1)由题意得 $a_n=\dfrac{n}{n^2+6}=\dfrac{1}{n+\dfrac{6}{n}}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 因为 $y=\dfrac{1}{x+\dfrac{6}{x}}$ 在 $(0,\sqrt{6})$ 上单调递增, 在 $(\sqrt{6},+\infty)$ 上单调递减, 且 $a_2=\dfrac{1}{5}$, $a_3=\dfrac{1}{5}$, 所以 $\{a_n\}$ 的最大项为 $a_2=a_3=\dfrac{1}{5}$. 故选 B.

(2)由题意可得 $\begin{cases}3-t>0,\\ t>1,\\ 7(3-t)-3<t^2,\end{cases}$ 解得 $2<t<3$, 故选 D.

(3) $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, 0\leqslant a_n<\dfrac{1}{2},\\ 2a_n-1, \dfrac{1}{2}\leqslant a_n<1,\end{cases}$ 因为 $a_1=\dfrac{2}{5}$, 所以 $a_2=2a_1=\dfrac{4}{5}$, $a_3=2a_2-1=\dfrac{3}{5}$, $a_4=2a_3-1=\dfrac{1}{5}$, $a_5=2a_4=\dfrac{2}{5}$, $a_6=2a_5=\dfrac{4}{5}$, …, 所以数列 $\{a_n\}$ 具有周期性, 周期为 4, 所以 $a_{2023}=a_{505\times 4+3}=a_3=\dfrac{3}{5}$. 故选 C.

变式题 (1)ACD (2)－6 **【解析】** (1)对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_n>0$, 则 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+1>1$, 即对于任意的 $n\geqslant 2$, 都有 $a_n>1$, 故 A 正确. $a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n$ 且 $a_n>0$, 若 $\{a_n\}$ 为常数列, 则 $a_n=2$, 故 B 错误. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=a_{n+1}-1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$, 当 $1<a_{n+1}<2$ 时, $0<\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<1$, 则 $0<a_n<a_{n+1}<2$, 此时 $a_1\in(0,2)$, 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列; 当 $a_{n+1}>2$ 时, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>1$, 则 $a_n>a_{n+1}>2$, 此时 $a_1>2$, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列. 所以当 $0<a_1<2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 当 $a_1>2$ 时, $a_{n+1}>2$ 且数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, 即当 $n\geqslant 2$ 时, $2<a_n<a_1$, 故 C, D 正确. 故选 ACD.

(2)因为 $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$, 所以 $a_2=\dfrac{1+a_1}{1-a_1}=-3$, $a_3=\dfrac{1+a_2}{1-a_2}=-\dfrac{1}{2}$, $a_4=\dfrac{1+a_3}{1-a_3}=\dfrac{1}{3}$, $a_5=\dfrac{1+a_4}{1-a_4}=2=a_1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的周期为 4, 又因为 $T_4=a_1a_2a_3a_4=2\times(-3)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{3}=1$, 所以 $T_{10}=(a_1a_2a_3a_4)\cdot(a_5a_6a_7a_8)\cdot(a_9a_{10})=(a_1a_2a_3a_4)\cdot(a_1a_2a_3a_4)\cdot(a_1a_2)=1\times 1\times 2\times(-3)=-6$.

例 4 **【思路点拨】** 根据给定条件, 利用累加法求出通项公式即可计算作答.

16 n^2 **【解析】** 依题意, 当 $n\geqslant 2$ 时, $a_n-a_{n-1}=2n-1$, 又 $a_1=1$, 所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2(n\geqslant 2)$, 又 $a_1=1$ 满足上式, 所以 $a_n=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$, 故 $a_4=16$.

例 5 **【思路点拨】** 由已知可得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{4n}$, 然后利用累乘法可求出 a_n.

$\dfrac{n}{4^n}$ **【解析】** 由 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{4n}a_n$, 得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{4n}$, 当 $n\geqslant 2$ 时, $a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{1}\right)\times\left(\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{2}\right)\times\cdots\times\left(\dfrac{1}{4}\times\dfrac{n}{n-1}\right)=\dfrac{n}{4^n}$, 又 $a_1=\dfrac{1}{4}$ 也满足上式, 故 $a_n=\dfrac{n}{4^n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

例 6 **【思路点拨】** 由递推公式可得数列 $\{a_n-3\}$ 为等比数列, 由等比数列的通项公式可求得 a_n-3, 由此可得 a_n.

$-2^{n-1}+3$ **【解析】** 由 $a_{n+1}=2a_n-3$ 得 $a_{n+1}-3=2(a_n-3)$, 又 $a_1-3=-1$, $\therefore$ 数列 $\{a_n-3\}$ 是以 -1 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore a_n-3=(-1)\times 2^{n-1}$, 则 $a_n=-2^{n-1}+3$.

例 7 **【思路点拨】** 由 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$ 两边取倒数, 即可得到数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列, 从而求出 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的通项公式, 即可得解.

$\dfrac{1}{3n-1}$ **【解析】** 由 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$ 两边取倒数可得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+3$, 即 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=3$, 又 $\dfrac{1}{a_1}=2$, 所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列, 且首项为 2, 公差为 3, 所以 $\dfrac{1}{a_n}=3n-1$, 所以 $a_n=\dfrac{1}{3n-1}$.

【应用演练】

1. B **【解析】** 因为 $a_{n+1}-a_n=3n-20$, 所以 $a_2-a_1=-17$, $a_3-a_2=-14$, …, $a_{30}-a_{29}=67$, 所以 $a_{30}-a_1=\dfrac{(-17+67)\times 29}{2}=725$, 故 $a_{30}=a_1+725=723$, 故选 B.

2. AB **【解析】** $\because a_{n+1}=2a_n+1$, $\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$, 又 $a_1+1=2$, $\therefore$ 数列 $\{a_n+1\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 故 B 正确; $a_n+1=2^n$, $\therefore a_n=2^n-1$, 故 C 错误; $a_3=2^3-1=7$, 故 A 正确; $S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$, 故 D 错误. 故选 AB.

3. B **【解析】** 当 $n\geqslant 2$ 时, 由 $n\sqrt{a_n}=(n-1)\sqrt{a_{n-1}}$, 得 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{(n-1)^2}{n^2}$, 则 $a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\dfrac{(2-1)^2}{2^2}\times\dfrac{(3-1)^2}{3^2}\times\cdots\times\dfrac{(n-1)^2}{n^2}=\dfrac{1}{n^2}(n\geqslant 2)$, 显然 $a_1=\dfrac{1}{1^2}=1$ 满足上式, 所以 $a_n=\dfrac{1}{n^2}(n\in\mathbf{N}^*)$. 由 $a_nb_n=\sin\dfrac{2n\pi}{3}$, 得 $b_n=n^2\sin\dfrac{2n\pi}{3}$, 故选 B.

4. $\dfrac{2}{3^{n-1}+1}$ **【解析】** 由 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3-a_n}$, 得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3-a_n}{a_n}=\dfrac{3}{a_n}-1$, 即 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{2}=3\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{2}\right)$, 故数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{2}\right\}$ 为等比数列, 则 $\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{2}\right)3^{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$, 所以 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$, 得 $a_n=\dfrac{2}{3^{n-1}+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

第 35 讲　等差数列及其前 n 项和

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $a_{n+1}-a_n=d$　$\dfrac{a+b}{2}$　$a_n=a_1+(n-1)d$　$a_n=a_m+(n-m)d(n,m\in\mathbf{N}^*)$　$\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$　$na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$

2. (1)$(n-m)d$　(2)$a_k+a_l=a_m+a_n$　(3)md

3. (1)$dn+a_1-d$　一次函数　孤立

(2)$\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$　二次函数　孤立

【对点演练】

1. -1 **【解析】** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, $\because S_5=5a_3=10$, $\therefore a_3=a_2+d=2$, 又 $\because a_2=3$, $\therefore d=-1$.

2. 13 **【解析】** 由 $a_m=a_1+(m-1)d$, 得 $-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}+(m-1)\times$

$\left(-\frac{1}{6}\right)$,解得 $m=13$.

3. 168 **【解析】** $\because a_7+a_8=a_4+a_{11}$,$\therefore a_{11}=8$,$\therefore S_{21}=\frac{21(a_1+a_{21})}{2}=21a_{11}=168$.

4. 20 **【解析】** 设物体经过 t 秒降落到地面.物体在降落过程中,每一秒降落的距离依次构成首项为 4.9,公差为 9.8 的等差数列,所以 $4.9t+\frac{1}{2}t(t-1)\times 9.8=1960$,即 $4.9t^2=1960$,可得 $t=20$.

5. 5 或 6 **【解析】** 由 $|a_3|=|a_9|$,得 $|a_1+2d|=|a_1+8d|$,解得 $a_1=-5d$ 或 $d=0$(舍去),则 $a_1+5d=a_6=0$,又 $d<0$,$\therefore a_5>0$,故使前 n 项和 S_n 取最大值的正整数 n 的值是 5 或 6.

6. $\left[-\frac{14}{3},-4\right)$ **【解析】** 由题意知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\begin{cases}a_8<0,\\a_7\geqslant 0,\end{cases}$即 $\begin{cases}28+7d<0,\\28+6d\geqslant 0,\end{cases}$所以 $\begin{cases}d<-4,\\d\geqslant -\frac{14}{3},\end{cases}$即 $-\frac{14}{3}\leqslant d<-4$.

7. -10 100 **【解析】** 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则 $S_{20}=a_1+a_2+\cdots+a_{20}=\frac{20\times[9+(10-20)]}{2}=-10$.由 $a_n=0$ 得 $n=10$,所以当 $1\leqslant n<10$ 时,$a_n>0$,当 $n>10$ 时,$a_n<0$,所以 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{20}|=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})-(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20})=S_{10}-(S_{20}-S_{10})=2S_{10}-S_{20}=2\times\frac{10\times(9+0)}{2}-(-10)=100$.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】**(1)利用等差数列的通项公式及前 n 项和公式列方程组求出首项和公差,然后再求 S_8 即可.

(1)B (2)C **【解析】**(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,由已知得 $\begin{cases}a_2+a_9=a_1+d+a_1+8d=29,\\S_5=5a_1+10d=35,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=3,\end{cases}$$\therefore S_8=8a_1+28d=8+28\times 3=92$.故选 B.

(2)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,由 $a_3+a_7=6$,$a_{12}=17$,得 $\begin{cases}a_1+2d+a_1+6d=6,\\a_1+11d=17,\end{cases}$$\therefore\begin{cases}a_1=-5,\\d=2,\end{cases}$$\therefore S_{16}=16\times(-5)+\frac{16\times 15}{2}\times 2=160$,故选 C.

变式题 1 (1)AB (2)2 **【解析】**(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,因为 $a_1+a_7=a_5$,所以 $a_1+a_1+6d=a_1+4d$,化简得 $a_1=-2d$,即 $d=-\frac{1}{2}a_1$,所以 $a_n=a_1+(n-1)d=\frac{3-n}{2}a_1$,则 $a_3=\frac{3-3}{2}a_1=0$,故 A 正确;$S_5=\frac{(a_1+a_5)}{2}\times 5=5a_3=0$,故 B 正确;$a_4=-\frac{1}{2}a_1<0$,则 $S_4=S_3+a_4<S_3$,故 C,D 错误.故选 AB.

(2)由已知得 $2\left(3a_1+\frac{3\times 2}{2}d\right)=3\left(2a_1+\frac{2\times 1}{2}d\right)+6$,解得 $d=2$.

变式题 2 **解:**(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,

则由题可得 $\begin{cases}a_2=a_1+d=11,\\S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=40,\end{cases}$即 $\begin{cases}a_1+d=11,\\2a_1+9d=8,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a_1=13,\\d=-2,\end{cases}$所以 $a_n=13-2(n-1)=15-2n$.

(2)由(1)可知 $S_n=\frac{n(13+15-2n)}{2}=14n-n^2$.

令 $a_n=15-2n>0$,解得 $n<\frac{15}{2}$,

所以当 $n\leqslant 7$,且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_n>0$,此时 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=14n-n^2$;

当 $n\geqslant 8$,且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_n<0$,此时 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(a_8+\cdots+a_n)=S_7-(S_n-S_7)=2S_7-S_n=2(14\times 7-7^2)-(14n-n^2)=n^2-14n+98$.

综上所述,$T_n=\begin{cases}14n-n^2,n\leqslant 7,\\n^2-14n+98,n\geqslant 8,\end{cases}n\in\mathbf{N}^*$.

例 2 **【思路点拨】**(1)思路一:利用充分条件、必要条件的定义及等差数列的定义和前 n 项和公式,即可作答;思路二:利用充分条件、必要条件的定义及等差数列的通项公式和前 n 项和公式,即可作答.(2)(i)利用 a_n 与 S_n 的关系变形给定的递推公式,构造常数列求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,再利用等差数列的定义即可证明;(ii)利用(i)的结论,结合裂项相消法求和即可.

(1)C **【解析】** 方法一:若 $\{a_n\}$ 为等差数列,设其公差为 d,则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,所以 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$,所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$,因此 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列,则甲是乙的充分条件.反之,若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列,则 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{nS_{n+1}-(n+1)S_n}{n(n+1)}=\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}$ 为常数,设 $\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}=t$,则 $S_n=na_{n+1}-t\cdot n(n+1)$,所以 $S_{n-1}=(n-1)a_n-t\cdot n(n-1)(n\geqslant 2)$,两式相减得 $a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n-2tn(n\geqslant 2)$,即 $a_{n+1}-a_n=2t(n\geqslant 2)$,当 $n=1$ 时 $S_1=a_1=a_2-2t$,满足上式,因此 $\{a_n\}$ 为等差数列,则甲是乙的必要条件.所以甲是乙的充要条件,故选 C.

方法二:若 $\{a_n\}$ 为等差数列,则设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,可得 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,则 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{(n-1)}{2}d$,所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为首项为 a_1,公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列,即甲是乙的充分条件.反之,若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列,则可设 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 D,故 $\frac{S_n}{n}=S_1+(n-1)D$,即 $S_n=nS_1+n(n-1)D=na_1+n(n-1)D$,利用公式 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2,\end{cases}$可得 $a_n=a_1+2(n-1)D$,所以 $a_{n+1}-a_n=2D$,即 $\{a_n\}$ 为公差为 $2D$ 的等差数列,所以甲是乙的必要条件.综上,甲是乙的充要条件.故选 C.

(2)**解:**(i)证明:在数列 $\{a_n\}$ 中,$3S_n=(n+2)a_n$,当 $n\geqslant 2$ 时,$3S_{n-1}=(n+1)a_{n-1}$,两式相减得 $3a_n=(n+2)a_n-(n+1)a_{n-1}(n\geqslant 2)$,即 $(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}(n\geqslant 2)$,则 $\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_{n-1}}{n-1}(n\geqslant 2)$,于是 $\frac{a_n}{(n+1)n}=\frac{a_{n-1}}{n(n-1)}(n\geqslant 2)$,因此数列 $\left\{\frac{a_n}{(n+1)n}\right\}$ 是常数列,则 $\frac{a_n}{(n+1)n}=\frac{a_1}{2\times 1}=\frac{1}{2}$,

从而 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,即 $\frac{a_n}{n}=\frac{n+1}{2}$,则 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$,

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 1 为首项,$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

(ii)由(i)知,$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,所以 $T_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{2n}{n+1}$.

变式题 **解:**(1)证明:由已知可得 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=S_n(n\geqslant 2)$,因为 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$,所以 $\frac{2b_{n-1}}{b_n}+\frac{1}{b_n}=2(n\geqslant 2)$,即 $2b_{n-1}+1=2b_n(n\geqslant 2)$,

所以 $b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}(n\geqslant 2)$,又 $\frac{2}{S_1}+\frac{1}{b_1}=2$,所以 $b_1=\frac{3}{2}$,

故 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项,$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

(2)由(1)知 $b_n=\frac{3}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n+2}{2}$,则 $\frac{2}{S_n}+\frac{2}{n+2}=2$,得 $S_n=\frac{n+2}{n+1}$.当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=\frac{3}{2}$;

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$.

故 $a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1,\\-\frac{1}{n(n+1)},n\geqslant 2.\end{cases}$

例 3 **【思路点拨】**(1)思路一:根据题意直接求出等差数列 $\{a_n\}$

的公差和首项，再根据前 n 项和公式即可求解；思路二：根据等差数列项的性质求出等差数列$\{a_n\}$的公差，再根据前 n 项和的性质即可求解.(2)根据等差数列的前 n 项和公式及等差数列项的性质计算出$a_{1012}>0$，$a_{1013}<0$，且$|a_{1012}|<|a_{1013}|$，从而得到公差小于 0，当 $n=1012$ 时，S_n 取得最大值，得到 A，C 均错误，B 正确，利用 $S_{1013}=S_{1010}+3a_{1012}>S_{1010}$ 得到 D 错误.

(1)C　(2)B　**【解析】**(1)方法一：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.依题意可得，$a_2+a_6=a_1+d+a_1+5d=10$，即 $a_1+3d=5$①，又 $a_4a_8=(a_1+3d)(a_1+7d)=45$，所以 $a_1+7d=9$②.由①②可得 $d=1$，$a_1=2$，所以 $S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}\times d=5\times2+10=20$.故选 C.

方法二：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.因为 $a_2+a_6=2a_4=10$，$a_4a_8=45$，所以 $a_4=5$，$a_8=9$，则 $d=\frac{a_8-a_4}{8-4}=1$，所以 $a_3=a_4-d=5-1=4$，所以 $S_5=5a_3=20$.故选 C.

(2)∵$S_{2023}>0$，$S_{2024}<0$，∴$\frac{2023(a_1+a_{2023})}{2}=\frac{2023\times2a_{1012}}{2}=2023a_{1012}>0$，$\frac{2024(a_1+a_{2024})}{2}=\frac{2024\times(a_{1012}+a_{1013})}{2}=1012(a_{1012}+a_{1013})<0$，∴$a_{1012}>0$，$a_{1012}+a_{1013}<0$，∴$a_{1013}<0$，且$|a_{1012}|<|a_{1013}|$，B 正确；∵$\{a_n\}$的公差 $d=a_{1013}-a_{1012}<0$，∴等差数列$\{a_n\}$是递减数列，A 错误；当 $n=1012$ 时，S_n 取得最大值，C 错误；$S_{1013}=S_{1010}+a_{1011}+a_{1012}+a_{1013}=S_{1010}+3a_{1012}>S_{1010}$，D 错误.故选 B.

变式题　(1)B　(2)8　**【解析】**(1)由 $S_9=54$，得 $9a_5=54$，解得 $a_5=6$.由 $S_8-S_5=30$，得 $a_6+a_7+a_8=3a_7=30$，解得 $a_7=10$，故$\{a_n\}$的公差 $d=\frac{a_7-a_5}{2}=2$，所以 $S_{11}=11a_6=11\times(a_5+d)=11\times8=88$.故选 B.

(2)因为 $S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=8(a_1+a_{16})=8(a_8+a_9)>0$，所以 $a_8+a_9>0$，又 $a_7+a_9=2a_8<0$，即 $a_8<0$，所以 $a_9>0$，则$\{a_n\}$的公差 $d=a_9-a_8>0$，所以$\{a_n\}$为递增的等差数列，且 $a_1<a_2<\cdots<a_8<0<a_9<\cdots$，所以$(S_n)_{\min}=S_8$，即当 S_n 取最小值时，n 的值为 8.

例 4　**【思路点拨】**(1)根据等差数列前 n 项和的性质可得 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列，从而列方程可求出结果.(2)根据等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=an^2+bn(a,b\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*)$，及$\frac{S_n}{T_n}=\frac{n}{2n+3}$拼凑对应的形式，进而用 S_n，T_n 表达 a_n，b_n 求解即可.

(1)A　(2)A　**【解析】**(1)由题意得 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6，即 3，S_6-3，$18-S_6$ 成等差数列，所以 $2\times(S_6-3)=3+(18-S_6)$，所以 $S_6=9$，故选 A.

(2)$(2n+3)S_n=nT_n$，即$\frac{S_n}{T_n}=\frac{n}{2n+3}$，又 S_n 和 T_n 均为关于 n 的常数项为 0 的二次函数，所以设 $T_n=a(2n+3)n(a\in\mathbf{R},a\neq0,n\in\mathbf{N}^*)$，则 $S_n=an^2$，故 $\frac{a_5}{b_6}=\frac{S_5-S_4}{T_6-T_5}=\frac{a(5^2-4^2)}{a[6\times(2\times6+3)-5\times(2\times5+3)]}=\frac{9a}{25a}=\frac{9}{25}$.故选 A.

变式题　(1)B　(2)-2024　**【解析】**(1)设等差数列$\{a_n\}$共有 $2n+1$ 项，则 $S_{奇}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}$，$S_{偶}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$，该数列的中间项为 a_{n+1}，由等差数列前 n 项和的性质知 $S_{奇}-S_{偶}=a_{n+1}$，所以 $a_{n+1}=S_{奇}-S_{偶}=319-290=29$.

(2)∵数列$\{a_n\}$为等差数列，∴数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，设其公差为 d，则$\frac{S_{10}}{10}-\frac{S_8}{8}=2d=2$，∴$d=1$，又$\frac{S_1}{1}=a_1=-2024$，∴$\frac{S_{2024}}{2024}=-2024+2023=-1$，∴$S_{2024}=-2024$.

第 36 讲　等比数列及其前 n 项和

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. q　$a_n=a_1q^{n-1}$　$a_n=a_mq^{n-m}(n,m\in\mathbf{N}^*)$　na_1　$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$　$\frac{a_1-a_nq}{1-q}$

2. (1)$a_m\cdot q^{n-m}$　(2)$a_p\cdot a_q$　a_k^2

【对点演练】

1. $3\cdot2^{n-1}$ 或 $2\cdot3^{n-1}$　**【解析】**设数列$\{a_n\}$的公比为 q，由题意得$\begin{cases}a_1q=6,\\6a_1+a_1q^2=30,\end{cases}$解得$\begin{cases}q=2,\\a_1=3\end{cases}$或$\begin{cases}q=3,\\a_1=2,\end{cases}$故 $a_n=3\cdot2^{n-1}$ 或 $a_n=2\cdot3^{n-1}$.

2. 2　-2　**【解析】**依题意得 $q\neq1$，因为$\begin{cases}8a_2+a_5=0,\\S_5=22,\end{cases}$即$\begin{cases}8a_1q+a_1q^4=0,\\\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=22,\end{cases}$所以$\begin{cases}a_1=2,\\q=-2.\end{cases}$

3. 3　**【解析】**∵a_1，a_{13} 是方程 $x^2-13x+9=0$ 的两根，∴$a_1+a_{13}=13$，$a_1\cdot a_{13}=9$，∴$a_1>0$，$a_{13}>0$，$a_1\cdot a_{13}=a_2\cdot a_{12}=a_7^2=9$，又数列$\{a_n\}$为等比数列，等比数列奇数项的符号相同，∴$a_7=3$，∴$\frac{a_2a_{12}}{a_7}=\frac{9}{3}=3$.

4. 1，3，9 或 9，3，1　**【解析】**设这个等比数列为$\frac{a}{q}$，a，aq，则$\begin{cases}a+\frac{a}{q}+aq=13,\\a\cdot\frac{a}{q}\cdot aq=27,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\q=\frac{1}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a=3,\\q=3,\end{cases}$∴这个等比数列为 1，3，9 或 9，3，1.

5. 4　**【解析】**设数列$\{a_n\}$的公比为 q，∵$a_5^2=a_3a_7=2\times8=16$，∴$a_5=\pm4$，又∵$a_5=a_3q^2>0$，∴$a_5=4$.

6. $-\frac{1}{2}$　**【解析】**若 $q=1$，则$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{10a_1}{5a_1}=2\neq\frac{31}{32}$，所以 $q\neq1$.当 $q\neq1$ 时，由$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，得$\frac{(-1)(1-q^{10})}{1-q}\cdot\frac{1-q}{(-1)(1-q^5)}=\frac{31}{32}$，即 $1+q^5=\frac{31}{32}$，即 $q^5=-\frac{1}{32}$，所以 $q=-\frac{1}{2}$.

7. 28　**【解析】**因为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，所以 S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$ 成等比数列.因为 $S_5=4$，$S_{10}=12$，所以 $S_{10}-S_5=8$，$S_{15}-S_{10}=16$，故 $S_{15}=12+16=28$.

● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】**(1)根据题意列出关于公比 q 的方程，求出 q，注意 $q=1$ 时的情况，即可求出 S_4.(2)根据题意，由等比数列的通项公式列出关于首项和公比的方程组，再计算可得答案.

(1)C　(2)D　**【解析】**(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$，当 $q=1$ 时，$S_5=5$，$5S_3-4=11$，$S_5\neq5S_3-4$，不合题意；当 $q\neq1$ 时，由 $S_5=5S_3-4$，得$\frac{1-q^5}{1-q}=5\cdot\frac{1-q^3}{1-q}-4$，即 $1-q^5=5-5q^3-4+4q$，即 $q^5-5q^3+4q=0$，即 $q^4-5q^2+4=0$，即$(q^2-1)(q^2-4)=0$，解得 $q=\pm1$(舍去)或 $q=-2$(舍去)或 $q=2$，因此 $S_4=\frac{1-q^4}{1-q}=15$.故选 C.

(2)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq0)$，由题意得$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=168,\\a_2-a_5=42,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1(1+q+q^2)=168,\\a_1q(1-q^3)=42,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1(1+q+q^2)=168,\\a_1q(1-q)(1+q+q^2)=42,\end{cases}$解得$\begin{cases}q=\frac{1}{2},\\a_1=96,\end{cases}$所以 $a_6=96\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=3$.故选 D.

变式题　(1)B　(2)C　(3)C　**【解析】**(1)由 $a_2a_5=\frac{1}{32}$，可得 $a_1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$，解得 $a_1^2=1$，又 $a_n>0$，所以 $a_1=1$，所以 $a_6=a_1q^5=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$.故选 B.

(2)方法一：设数列$\{a_n\}$的公比为 q，由题意可得，当 $n=1$ 时，$a_2=2a_1+2$，即 $a_1q=2a_1+2$①，当 $n=2$ 时，$a_3=2(a_1+a_2)+2$，即 $a_1q^2=2(a_1+a_1q)+2$②，联立①②可得 $a_1=2$，$q=3$，则 $a_4=a_1q^3=54$.故选 C.

方法二：由题意，$\{a_n\}$为等比数列，且 $a_{n+1}=2S_n+2$①，∴$a_n=2S_{n-1}+2(n\geqslant2)$②，①－②得 $a_{n+1}-a_n=2a_n(n\geqslant2)$，即 $a_{n+1}=3a_n(n\geqslant2)$，故数列$\{a_n\}$是公比为 3 的等比数列.又

∵$a_2=2(a_1+1)=3a_1$，∴$a_1=2$，故$a_4=2\times3^3=54$.

(3)设第n层浮雕数为a_n，数列$\{a_n\}$的公比为q，则第2层浮雕数为a_2，第5层浮雕数为a_5，∴$a_2=6$，$a_5=48$，∵各层浮雕数成等比数列，∴$48=6\times q^3$，∴$q=2$，∴第7层浮雕数为$a_7=a_5\cdot q^2=48\times4=192$，故选C.

例2 **【思路点拨】**(1)根据$a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant2\end{cases}$得到$a_n-1=2(a_{n-1}-1)(n\geqslant2)$，从而判断出数列$\{a_n-1\}$是等比数列；(2)在(1)的基础上得到$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^{n-1}+1}<\frac{1}{2^{n-1}}$，再利用等比数列求和公式得到证明.

证明：(1)因为$S_n=2a_n+n-3$，所以$S_{n-1}=2a_{n-1}+(n-1)-3(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，所以$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}+1(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，所以$a_n=2a_{n-1}-1(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，所以$a_n-1=2(a_{n-1}-1)(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$. 由$a_1=S_1=2a_1-2$，可得$a_1=2$，则$a_1-1=1$，所以数列$\{a_n-1\}$是首项为1，公比为2的等比数列.

(2)由(1)可知$a_n=2^{n-1}+1$，则$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^{n-1}+1}<\frac{1}{2^{n-1}}$，所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$，又因为$\frac{1}{2^{n-1}}>0$恒成立，所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

变式题 **解：**(1)证明：因为$a_{n+1}=a_n+2b_n$，$b_{n+1}=2a_n+b_n$，所以$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$，$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$，又由$a_1=3$，$b_1=2$得$a_1-b_1=1$，$a_1+b_1=5$，所以数列$\{a_n+b_n\}$是首项为5，公比为3的等比数列，数列$\{a_n-b_n\}$是首项为1，公比为$-1$的等比数列.

(2)由(1)得$a_n+b_n=5\times3^{n-1}$，$a_n-b_n=(-1)^{n-1}$，所以$a_n=\frac{5\times3^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}$，$b_n=\frac{5\times3^{n-1}-(-1)^{n-1}}{2}$，所以$a_nb_n=\frac{5\times3^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}\times\frac{5\times3^{n-1}-(-1)^{n-1}}{2}=\frac{25\times3^{2n-2}-1}{4}$，所以$S_n=\frac{25}{4}\times\frac{1-9^n}{1-9}-\frac{n}{4}=\frac{25\times(9^n-1)-8n}{32}$.

例3 **【思路点拨】**(1)利用等比数列项的性质，结合对数的运算性质即可得解.(2)根据等比数列项的性质求解即可.

(1)C (2)D **【解析】**(1)因为$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$a_2a_5a_8=2^{12}$，所以$a_5^3=2^{12}=(2^4)^3$，则$a_5=2^4$，所以$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9=\log_2a_1+\log_2a_2+\log_2a_3+\cdots+\log_2a_9=\log_2(a_1a_2a_3\cdots a_9)=\log_2a_5^9=\log_2(2^4)^9=\log_22^{36}=36$. 故选C.

(2)由$a_2a_3a_4=4$，$a_5a_6a_7=16$可得$a_3^3=4$，$a_6^3=16$，又$a_6^2=a_3a_9$，故$a_6^6=a_3^3a_9^3$，则$16^2=4a_9^3$，解得$a_9^3=64$，所以$a_8a_9a_{10}=a_9^3=64$. 故选D.

变式题 9 **【解析】**由$T_{12}=T_6$得$\frac{T_{12}}{T_6}=1$，即$a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}=(a_9a_{10})^3=1$，故$a_9a_{10}=1$，因为$a_1a_{18}=a_9a_{10}$，所以$a_1a_{18}=1$，由$0<a_1<1$，得$a_{18}>1$，所以等比数列$\{a_n\}$是递增数列，故$0<a_9<1<a_{10}$，则$T_n$取最小值时，$n=9$.

例4 **【思路点拨】**(1)思路一：根据等比数列的前n项和公式求出公比，再根据S_4，S_8的关系即可解出；思路二：根据等比数列前n项和的性质求解.(2)根据等比数列前n项和的性质，可得S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$仍成等比数列，又由题意得到$\frac{S_8-S_4}{S_4}=3$，即可求解.

(1)C (2)A **【解析】**(1)方法一：由题易知公比$q\neq1$且$q\neq0$，∵$S_6=21S_2$，∴$1-q^6=21(1-q^2)$，∴$q^4+q^2-20=0$，∴$q^2=4$，则$\frac{S_8}{S_4}=1+q^4=17$，∴$S_8=17\times(-5)=-85$. 故选C.

方法二：由等比数列的性质可得S_2，S_4-S_2，S_6-S_4，S_8-S_6成等比数列，因此$(S_4-S_2)^2=S_2(S_6-S_4)$，将$S_4=-5$，$S_6=21S_2$代入上式，解得$S_2=-1$或$S_2=\frac{5}{4}$. 当$S_2=\frac{5}{4}$时，$S_4=S_2(1+q^2)>0$，不满足题意，∴$S_2=-1$，则$S_6=-21$，由等比数列的性质可知$(S_6-S_4)^2=(S_4-S_2)(S_8-S_6)$，得$S_8=-85$. 故选C.

(2)设$S_4=x(x\neq0)$，则$S_8=4x$，因为$\{a_n\}$为等比数列，所以S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$，$S_{16}-S_{12}$仍成等比数列. 易知$\frac{S_8-S_4}{S_4}=\frac{4x-x}{x}=3$，所以$S_{12}-S_8=3(S_8-S_4)=9x$，$S_{16}-S_{12}=3(S_{12}-S_8)=27x$，可得$S_{12}=13x$，$S_{16}=40x$，故$\frac{S_{16}}{S_4+S_8}=\frac{40x}{x+4x}=8$. 故选A.

变式题 (1)A (2)B **【解析】**(1)方法一：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q. 若$q=1$，则$S_4=4a_1$，$S_2=2a_1$，即$S_4=2S_2$，与已知矛盾，故$q\neq1$. 设$S_6=m$，则由已知得$S_2=\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}=4$①，$S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=6$②，$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=m$③，由②÷①，③÷①分别得$1+q^2=\frac{3}{2}$，$1+q^2+q^4=\frac{m}{4}$，解得$m=7$.

方法二：根据等比数列前n项和的性质知，S_2，S_4-S_2，S_6-S_4也成等比数列，即有$(6-4)^2=4\times(S_6-6)$，解得$S_6=7$.

(2)设数列$\{a_n\}$的公比为q，若$q=1$，则$\frac{S_{2m}}{S_m}=2$，与题中条件矛盾，故$q\neq1$. ∵$\frac{S_{2m}}{S_m}=\frac{\frac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^m)}{1-q}}=q^m+1=9$，∴$q^m=8$，∴$\frac{a_{2m}}{a_m}=\frac{a_1q^{2m-1}}{a_1q^{m-1}}=q^m=8=\frac{5m+1}{m-1}$，∴$m=3$，则$q^3=8$，∴$q=2$.

第37讲 数列求和

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 若干个等差或等比或可求和

2. (1)同一个常数 (2)并项法

3. 两项之差 4. 积

【对点演练】

1. $n^2+1-\frac{1}{2^n}$ **【解析】**$S_n=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2+1-\frac{1}{2^n}$.

2. $\frac{2n}{n+1}$ **【解析】**由题得$a_n=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以$\{a_n\}$的前$n$项和为$2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

3. $\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$ **【解析】**设$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，则$\frac{1}{2}S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，两式相减得$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-\frac{1}{2^n}-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^{n+1}}$，所以$S_n=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.

4. $\begin{cases}1-n,n\text{ 为奇数},\\n,n\text{ 为偶数}\end{cases}$ **【解析】**$S_n=2\times[0+1-2+3-4+\cdots+(-1)^n(n-1)]=\begin{cases}1-n,n\text{ 为奇数},\\n,n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

5. $\frac{2024}{2025}$ **【解析】**设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，当n为奇数时，

$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$，当 n 为偶数时，$a_n=-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$，

$\therefore S_{2024}=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\cdots+\left(\frac{1}{2023}+\frac{1}{2024}\right)-\left(\frac{1}{2024}+\frac{1}{2025}\right)=1-\frac{1}{2025}=\frac{2024}{2025}$.

6. $n\cdot 3^{n+1}$ **[解析]** 令 $T_n=3\times3^1+5\times3^2+\cdots+(2n+1)\cdot3^n$，则 $3T_n=3\times3^2+5\times3^3+\cdots+(2n+1)\cdot3^{n+1}$，两式相减得 $-2T_n=9+2\times\frac{9-3^{n+1}}{1-3}-(2n+1)\cdot3^{n+1}=-2n\cdot3^{n+1}$，

$\therefore T_n=n\cdot3^{n+1}$.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由 $S_4=32$，$T_3=16$ 得关于 a_1，d 的两个方程，求解方程即可作答；(2)利用(1)的结论求出 S_n，再将 n 分奇、偶数两种情况结合分组求和法求出 T_n，并与 S_n 作差比较作答.

解：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d，$\because T_3=b_1+b_2+b_3=a_1-6+2a_2+a_3-6=4a_2-12=16$，$\therefore a_2=a_1+d=7$，

又 $S_4=4a_1+\frac{4\times3}{2}d=32$，即 $a_1+\frac{3}{2}d=8$，$\therefore a_1=5$，$d=2$，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2n+3$.

(2)证明：由(1)可得 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2+4n$.

当 n 为偶数时，$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)=(a_1-6+a_3-6+\cdots+a_{n-1}-6)+(2a_2+2a_4+\cdots+2a_n)=(5+9+\cdots+2n+1-3n)+2\times(7+11+\cdots+2n+3)=\frac{(5+2n+1)\cdot\frac{n}{2}}{2}-3n+2\times\frac{(7+2n+3)\cdot\frac{n}{2}}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$，当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n-(n^2+4n)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n-1)>0$，即 $T_n>S_n$；当 n 为奇数时，$T_n=T_{n-1}+b_n=\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{7}{2}(n-1)+2n+3-6=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5(n\geqslant3)$，当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5-(n^2+4n)=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n-5=\frac{1}{2}(n^2-3n-10)=\frac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$，即 $T_n>S_n$.

综上，当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

变式题 1 **解：**(1)证明：由 $a_{n+1}+2a_n=2^{n+2}$ 可得 $a_{n+1}-2^{n+1}=2^{n+1}-2a_n=-2(a_n-2^n)$，又 $a_1-2^1=1\neq0$，

所以$\{a_n-2^n\}$是以-2为公比，1为首项的等比数列.

(2)由(1)可得 $a_n-2^n=(-2)^{n-1}$，即 $a_n=2^n+(-2)^{n-1}$.

当 n 为奇数时，$b_n=a_n=2^n+(-2)^{n-1}=3\times2^{n-1}$；当 n 为偶数时，$b_n=\log_2a_n=\log_2[2^n+(-2)^{n-1}]=\log_22^{n-1}=n-1$.

所以 $T_{10}=(b_1+b_3+b_5+b_7+b_9)+(b_2+b_4+b_6+b_8+b_{10})=(3+3\times2^2+3\times2^4+3\times2^6+3\times2^8)+(1+3+5+7+9)=\frac{3\times(1-4^5)}{1-4}+\frac{(1+9)\times5}{2}=1048$.

变式题 2 **解：**(1)当 $n=1$ 时，$2S_2=S_1+2$，$\because a_1=1$，$\therefore a_2=\frac{1}{2}$，可得$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$. 当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n+1}=S_n+2$，$2S_n=S_{n-1}+2$，两式相减得 $2a_{n+1}=a_n(n\geqslant2)$，即 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(n\geqslant2)$.

故数列$\{a_n\}$是首项为 1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，则 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

(2)由(1)知，$b_n=2^{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}$，故 $T_n=(1+2+\cdots+2^{n-1})+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2^n-2^{1-n}+1$.

例 2 **[思路点拨]** (1)根据 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant2\end{cases}$即可求解；(2)根据错位相减法即可求解.

解：(1)因为 $2S_n=na_n$，所以当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1$，即 $a_1=0$.

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$，所以 $2(S_n-S_{n-1})=na_n-(n-1)a_{n-1}=2a_n$，化简得 $(n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}$，所以当 $n\geqslant3$ 时，$\frac{a_n}{n-1}=\frac{a_{n-1}}{n-2}=\cdots=\frac{a_3}{2}=\frac{a_2}{1}=1$，即 $a_n=n-1$.

当 $n=1$，2 时，上式均成立，所以 $a_n=n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)因为$\frac{a_{n+1}}{2^n}=\frac{n}{2^n}$，所以 $T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$\frac{1}{2}T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，两式相减得 $\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{n}{2}\right)$，即 $T_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n(2+n)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

变式题 **解：**(1)证明：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，因为 a_1，$3a_3$，a_2 成等差数列，所以 $6a_3=a_1+a_2$，$q\neq1$，

所以 $6a_1q^2=a_1+a_1q$，即 $6q^2=1+q$，

又$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，所以 $q>0$，可得 $q=\frac{1}{2}$.

因为 $S_4=\frac{15}{8}$，所以$\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{15}{8}$，得 $a_1=1$，所以 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则 $S_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以$\frac{S_{n+1}-2}{S_n-2}=\frac{1}{2}$，又 $S_1-2=-1$，所以数列$\{S_n-2\}$是首项为-1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

(2)由(1)得，$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right]=-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $-T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$①，$-\frac{1}{2}T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$②，

①－②得 $-\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-(2+n)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，整理得 $T_n=(n+2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-4$.

例 3 **[思路点拨]** (1)由 a_n 与 S_n 的关系结合题意可得$\{S_n^2\}$为等差数列，即可求解；(2)把$\frac{1}{S_n+S_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2(n+1)}}$化为$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$后，由裂项相消法求解.

解：(1)由 $a_1=\sqrt{2}$，得 $S_1^2=2$，由 $a_{n+1}\cdot(S_{n+1}+S_n)=2$，可得 $(S_{n+1}-S_n)(S_{n+1}+S_n)=2$，可得 $S_{n+1}^2-S_n^2=2$，即数列$\{S_n^2\}$是首项为 2，公差为 2 的等差数列，

可得 $S_n^2=2+2(n-1)=2n$. 由 $a_n>0$，可得 $S_n=\sqrt{2n}$.

(2)$\frac{1}{S_n+S_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2(n+1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，则$\frac{1}{S_1+S_2}+\frac{1}{S_2+S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n+S_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}-1)$.

变式题 **解**:(1)因为等差数列$\{a_n\}$中,公差$d=2$,$S_9=99$,所以$S_9=9a_1+\frac{9\times8}{2}\times2=99$,解得$a_1=3$,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3+2(n-1)=2n+1$.

(2)因为$b_n=\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{1}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1})$,所以$T_n=\frac{1}{2}\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\frac{1}{2}\times(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1})=\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}}{2}$.

例4 **【思路点拨】**(1)利用等差数列的通项公式求得$\frac{S_n}{a_n}$,进而得到S_n,利用S_n与a_n的关系得到$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}(n\geqslant2)$,利用累乘法求得$a_n$,注意检验对于$n=1$是否成立;(2)由(1)的结论,利用裂项相消法得到$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$,进而得证.

解:(1)因为$S_1=a_1=1$,所以$\frac{S_1}{a_1}=1$,

所以数列$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是首项为1,公差为$\frac{1}{3}$的等差数列,所以$\frac{S_n}{a_n}=1+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n+2}{3}$,所以$S_n=\frac{n+2}{3}a_n$.

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{3}a_n-\frac{n+1}{3}a_{n-1}$,

所以$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$,即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$,

则$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_2}{a_1}\times a_1=\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\cdots\times\frac{4}{2}\times\frac{3}{1}\times1=\frac{n(n+1)}{2}$,又$a_1=1$满足上式,

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2)证明:$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\times\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=2\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}<2$.

变式题 **解**:(1)设$\{a_n\}$的公比为q,由题意,可得$\begin{cases}a_1q^2=b_1+2d,\\a_1+a_1q+a_1q^2=b_1+4d,\\a_1=b_1=2,\\d\neq0,\end{cases}$可得$\begin{cases}q=2,\\d=3,\end{cases}$

所以$a_n=2^n$,所以$S_n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

(2)证明:由(1)得$b_n=2+3(n-1)=3n-1$,

所以$\frac{2n+1}{n^2(b_n+4)^2}=\frac{2n+1}{n^2(3n+3)^2}=\frac{2n+1}{9n^2(n+1)^2}=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$,所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{9}\times\left\{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]\right\}=\frac{1}{9}\times\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$,

因为$1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$,所以$T_n<\frac{1}{9}$,得证.

第38讲　数列的综合问题

● 课前基础巩固

【对点演练】

1. 72 **【解析】**因为等差数列$\{a_n\}$的公差为2,a_1,a_2,a_4成等比数列,所以$a_2^2=a_1a_4$,则$(a_1+2)^2=a_1(a_1+6)$,解得$a_1=2$,所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n$,故$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n(n+1)$,所以$S_8=8\times9=72$.
2. 6 **【解析】**∵$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列,且$a_2a_4=a_3$,∴$a_3^2=a_3$,∴$a_3=1$.又$q>1$,∴$a_1<a_2<1$,$a_n>1(n\geqslant4,n\in\mathbf{N}^*)$,∴$T_n>T_{n-1}(n\geqslant4,n\in\mathbf{N}^*)$,则$T_1<1$,$T_2=a_1a_2<1$,$T_3=a_1a_2a_3=a_1a_2=T_2<1$,$T_4=a_1a_2a_3a_4=a_1<1$,$T_5=a_1a_2a_3a_4a_5=a_3^5=1$,$T_6=T_5\cdot a_6=a_6>1$,故所求$n$的最小值为6.
3. $10\times1.003\ 5^n$,$n\in\mathbf{N}^*$ **【解析】**由题意得,$a_1=10(1+0.35\%)=10\times1.003\ 5$,$a_2=10(1+0.35\%)^2=10\times1.003\ 5^2$,$a_3=10(1+0.35\%)^3=10\times1.003\ 5^3$,则易知$a_n=10(1+0.35\%)^n=10\times1.003\ 5^n$.
4. $\frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ **【解析】**由题意得$a(1+r)^n=x+x(1+r)+\cdots+x(1+r)^{n-1}$,∴$a(1+r)^n=\frac{x[1-(1+r)^n]}{1-(1+r)}$,∴$x=\frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$.
5. 4 **【解析】**设原有污垢为a,清洗次数为$n(n\in\mathbf{N}^*)$,则清洗n次每次存留的污垢a_n构成以$\frac{1}{4}a$为首项,$\frac{1}{4}$为公比的等比数列,所以$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot a$.令$\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot a<1\%\cdot a$,则$n>\log_4100=\log_210$,得$n\geqslant4$,所以至少要清洗4次才能使存留的污垢在1%以下.

● 课堂考点探究

例1 **【思路点拨】**(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,等比数列$\{b_n\}$的公比为q,由条件结合等差数列的通项公式和等比数列的通项公式列方程组求出d,q,再由通项公式求解;(2)利用分组求和法求和.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,等比数列$\{b_n\}$的公比为q,且$q>0$,由题意得$\begin{cases}2+d=2\times2-1,\\2q^2=2(2+d)+2,\end{cases}$可得$\begin{cases}d=1,\\q=2,\end{cases}$

所以$a_n=2+(n-1)\times1=n+1$,$b_n=2\times2^{n-1}=2^n$.

(2)由题意知,当$n=2^k$,$k\in\mathbf{N}^*$时,$c_n=c_{2^k}=b_k=2^k$,当$2^k<n<2^{k+1}$,$k\in\mathbf{N}^*$时,$c_n=a_n=n+1$,令$2^k\leqslant64$,则$k\leqslant6$,$k\in\mathbf{N}^*$,所以$S_{64}=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{64}=(c_{2^1}+c_{2^2}+c_{2^3}+c_{2^4}+c_{2^5}+c_{2^6})+c_1+c_3+(c_5+c_6+c_7)+(c_9+c_{10}+\cdots+c_{15})+(c_{17}+c_{18}+\cdots+c_{31})+(c_{33}+c_{34}+\cdots+c_{63})=(b_1+b_2+\cdots+b_6)+(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^6})-(a_{2^1}+a_{2^2}+\cdots+a_{2^6})=(2^1+2^2+\cdots+2^6)+(2+3+\cdots+65)-(2^1+1+2^2+1+\cdots+2^6+1)=\frac{(2+65)\times64}{2}-6=2138$.

变式题 **解**:(1)因为$a_n=2n+1$,所以$a_1=3$,$a_2=5$,故$b_2=2$,$b_3=4$,所以等比数列$\{b_n\}$的公比$q=\frac{b_3}{b_2}=2$,故$b_1=1$,所以$b_n=2^{n-1}$,即等比数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^{n-1}$.

(2)由已知得$S_m=\frac{(3+2m+1)m}{2}=m(m+2)$,由(1)可知$T_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$,因为$T_n=S_m(4<n\leqslant10)$,所以$2^n-1=m(m+2)$,则$(2^{\frac{n}{2}}-1)(2^{\frac{n}{2}}+1)=m(m+2)$,可得$m=2^{\frac{n}{2}}-1$,因为$m$为正整数,$4<n\leqslant10$,所以$n=6,8,10$,则当$n=6$时,$m=2^3-1=7$,当$n=8$时,$m=2^4-1=15$,当$n=10$时,$m=2^5-1=31$,故满足条件的所有数对为$(6,7)$,$(8,15)$,$(10,31)$.

例2 **【思路点拨】**(1)由$a_{n+1}=S_n+1$,得$a_n=S_{n-1}+1(n\geqslant2)$,两式相减可得等比数列$\{a_n\}$的公比为2,再列方程即可求得$a_1$,进而可得$\{a_n\}$的通项公式;(2)由$a_n=2^{n-1}$及$b_n$的表达式可求得$b_n=n+1$,则可得到关于$n$的不等式,结合函数思想解不等式即可.

解:(1)因为$a_{n+1}=S_n+1$,所以当$n\geqslant2$时,$a_n=S_{n-1}+1$,两式相减得$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant2)$,即$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$.因为数列$\{a_n\}$是等比数列,所以公比为2.

当$n=1$时,$a_2=a_1+1$,则$2a_1=a_1+1$,所以$a_1=1$,则$a_2=a_1+1=2$,满足$a_2=2a_1$,所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$.

(2)由(1)得$a_{2^n}=2^{2^n-1}$,所以$\log_2a_{2^n}=2^n-1$,所以$b_n=\log_2a_{2^{n+1}}-(\log_2a_2+\log_2a_{2^2}+\cdots+\log_2a_{2^n})=2^{n+1}-1-(2^1-1+2^2-1+\cdots+2^n-1)=2^{n+1}+n-1-\frac{2(1-2^n)}{1-2}=n+$

1. 由 $a_n-b_n<2023$ 得 $2^{n-1}-(n+1)<2023$，即 $2^{n-1}-n<2024$. 令 $f(n)=2^{n-1}-n$，则 $f(n+1)-f(n)=2^n-(n+1)-(2^{n-1}-n)=2^{n-1}-1$，
所以当 $n\geqslant 2$ 时，$f(n+1)-f(n)>0$，又 $f(2)=f(1)=0$，$f(11)=2^{10}-11=1013<2024$，$f(12)=2^{11}-12=2036>2024$，所以满足条件的最大正整数 n 的值为 11.

变式题 1 **解**：(1)因为 $a_{n+1}=S_n+n$，所以 $a_n=S_{n-1}+n-1(n\geqslant 2)$，两式相减可得 $a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}+1=a_n+1(n\geqslant 2)$，即 $a_{n+1}=2a_n+1(n\geqslant 2)$，则 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)(n\geqslant 2)$，
由 $a_1=2$，可得 $a_2=S_1+1=a_1+1=3$，
所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n+1=(a_2+1)\cdot 2^{n-2}=4\times 2^{n-2}=2^n$，即 $a_n=2^n-1$，因为 $a_1=2$ 不满足上式，
所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2^n-1,n\geqslant 2.\end{cases}$

(2)(i)设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d(d>0)$，因为 a_1+b_1，a_2+b_2，$a_3+\frac{1}{2}b_3$ 成等比数列，且 $a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=7$，

所以 $(a_2+b_2)^2=(a_1+b_1)\left(a_3+\frac{1}{2}b_3\right)$，即 $(3+2+d)^2=4(7+1+d)$，整理得 $d^2+6d-7=0$，解得 $d=1$ 或 $d=-7$，因为 $d>0$，所以 $d=1$，又因为 $b_1=2$，所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2+(n-1)\times 1=n+1$.

(ii)证明：由(i)知，$b_n=n+1$，

可得 $T_n=\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}+\cdots+\frac{1}{b_n^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}$.

当 $n=1$ 时，$T_1=\frac{1}{4}<\frac{3}{4}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{4}$.

综上可得，对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $T_n<\frac{3}{4}$.

变式题 2 **解**：(1)设 $a_{1,1}=t$，第一行从左到右所成等差数列的公差为 d，
则 $a_{1,3}=t+2d=5$①，$a_{2,2}=(a_{1,1}+d)q=(t+d)q=-6$②.
由 $a_{4,2}^2=a_{7,5}$，得 $(a_{1,2}q^3)^2=a_{1,5}q^6$，则 $(t+d)^2q^6=(t+4d)q^6$，即 $(t+d)^2=t+4d$③. 由①③及 $t>0$，可得 $t=1$，$d=2$，代入②得 $q=-2$，则 $a_{1,n}=a_{1,1}+(n-1)d=2n-1$，所以 $a_{n,n}=a_{1,n}q^{n-1}=(2n-1)\cdot(-2)^{n-1}$，
即 $b_n=(2n-1)\cdot(-2)^{n-1}$.

(2)由(1)知，$a_{n,1}=a_{1,1}q^{n-1}=(-2)^{n-1}$，$S_n=\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=\frac{1-(-2)^n}{3}$，则 $a_{n,1}<\lambda S_n$ 等价于 $(-2)^{n-1}<\lambda\cdot\frac{1-(-2)^n}{3}$.

当 n 为奇数时，不等式等价于 $\lambda>\frac{\frac{3}{2}\cdot 2^n}{2^n+1}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{3}{2}}{2^n+1}$ 恒成立，因为 $\frac{3}{2}-\frac{\frac{3}{2}}{2^n+1}<\frac{3}{2}$ 恒成立，所以 $\lambda\geqslant\frac{3}{2}$；

当 n 为偶数时，不等式等价于 $\lambda<\frac{\frac{3}{2}\cdot 2^n}{2^n-1}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{3}{2}}{2^n-1}$ 恒成立，因为 $\frac{3}{2}+\frac{\frac{3}{2}}{2^n-1}>\frac{3}{2}$ 恒成立，所以 $\lambda\leqslant\frac{3}{2}$.

因此 $\lambda=\frac{3}{2}$，所以存在 $\lambda=\frac{3}{2}$，使得 $a_{n,1}<\lambda S_n$ 恒成立.

例 3 **[思路点拨]** 求出 $f(x)$ 的导数，结合题意得到数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列. 利用辅助角公式对 $g(x)$ 化简，构造新函数，利用导数判断新函数的单调性，并结合题意求解即可.

C **[解析]** 因为 $f'(x)=x^2-a_{n+1}\cos x+(a_n+2)$ 有唯一的零点，$f'(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，所以 $f'(0)=0$，可得 $a_{n+1}-a_n=2$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列.

$g(x)=12x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\pi x-\frac{1}{2}\cos\pi x=12x+\sin\pi\left(x-\frac{1}{6}\right)=12\left(x-\frac{1}{6}\right)+\sin\pi\left(x-\frac{1}{6}\right)+2$，令 $h(t)=12t+\sin\pi t$，则 $h(t)$ 为奇函数，因为 $h'(t)=12+\pi\cos\pi t>0$，所以 $h(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 由题意得 $[g(a_1)-2]+[g(a_2)-2]+\cdots+[g(a_9)-2]=0$，则 $h\left(a_1-\frac{1}{6}\right)+h\left(a_2-\frac{1}{6}\right)+\cdots+h\left(a_9-\frac{1}{6}\right)=0$，因为数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，所以 $a_1<a_2<\cdots<a_9$，则 $a_1-\frac{1}{6}<a_2-\frac{1}{6}<\cdots<a_9-\frac{1}{6}$. 假设 $\left(a_1-\frac{1}{6}\right)+\left(a_9-\frac{1}{6}\right)>0$，因为 $h(t)=12t+\sin\pi t$ 是奇函数且 $h(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$a_1-\frac{1}{6}>-\left(a_9-\frac{1}{6}\right)$，所以 $h\left(a_1-\frac{1}{6}\right)>h\left[-\left(a_9-\frac{1}{6}\right)\right]=-h\left(a_9-\frac{1}{6}\right)$，则 $h\left(a_1-\frac{1}{6}\right)+h\left(a_9-\frac{1}{6}\right)>0$，因为 $\left(a_1-\frac{1}{6}\right)+\left(a_9-\frac{1}{6}\right)=\left(a_2-\frac{1}{6}\right)+\left(a_8-\frac{1}{6}\right)=\left(a_3-\frac{1}{6}\right)+\left(a_7-\frac{1}{6}\right)=\left(a_4-\frac{1}{6}\right)+\left(a_6-\frac{1}{6}\right)=2\left(a_5-\frac{1}{6}\right)$，所以 $h\left(a_1-\frac{1}{6}\right)+h\left(a_2-\frac{1}{6}\right)+\cdots+h\left(a_9-\frac{1}{6}\right)>0$，与已知矛盾，故假设不成立. 假设 $\left(a_1-\frac{1}{6}\right)+\left(a_9-\frac{1}{6}\right)<0$，同理可得 $h\left(a_1-\frac{1}{6}\right)+h\left(a_2-\frac{1}{6}\right)+\cdots+h\left(a_9-\frac{1}{6}\right)<0$，与已知矛盾，故假设不成立. 综上可得，$\left(a_1-\frac{1}{6}\right)+\left(a_9-\frac{1}{6}\right)=0$，所以 $a_1+a_9=\frac{1}{3}$，所以 $a_5=\frac{1}{6}$. 故选 C.

变式题 BCD **[解析]** 对于 A，由 $f(x)=x^2-1$ 得 $f'(x)=2x$，所以 $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-1}{2x_n}=\frac{x_n^2+1}{2x_n}$，故 A 错误. 对于 B，由 $x_1=3$ 得 $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-1}{2x_n}=\frac{x_n^2+1}{2x_n}>0$，$x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n^2-1}{2x_n}=\frac{1-x_n^2}{2x_n}=\frac{(1+x_n)(1-x_n)}{2x_n}$. 假设存在 $n\geqslant 2$，使得 $x_n\leqslant 1$，则 $\frac{x_{n-1}^2+1}{2x_{n-1}}\leqslant 1$，整理得 $(x_{n-1}-1)^2\leqslant 0$，则 $x_{n-1}=1$，经过有限次推导，可得 $x_1=1$，这与 $x_1=3$ 矛盾，故假设不成立，可得 $x_n>1$，所以 $x_{n+1}-x_n=\frac{(1+x_n)(1-x_n)}{2x_n}<0$，所以 $x_{n+1}<x_n$，数列 $\{x_n\}$ 是递减数列，故 B 正确. 对于 C，由 B 知 $x_n>1$，数列 $\{x_n\}$ 是递减数列，又 $x_1=3$，所以 $1<x_n\leqslant 3$，故 C 正确. 对于 D，$x_{n+1}-1=\frac{(x_n-1)^2}{2x_n}$，$x_{n+1}+1=\frac{(x_n+1)^2}{2x_n}$，所以 $\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1}=\left(\frac{x_n-1}{x_n+1}\right)^2$，所以 $\ln\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1}=2\ln\frac{x_n-1}{x_n+1}$. 令 $a_n=\ln\frac{x_n-1}{x_n+1}$，则 $a_{n+1}=2a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，又 $x_1=3$，$a_1=\ln\frac{3-1}{3+1}=-\ln 2$，所以 $a_n=(-\ln 2)\times 2^{n-1}$，即 $\ln\frac{x_n-1}{x_n+1}=(-\ln 2)\times 2^{n-1}$，所以 $\frac{x_n+1}{x_n-1}=2^{2^{n-1}}$，可得 $x_n=\frac{2^{2^{n-1}}+1}{2^{2^{n-1}}-1}=1+\frac{2}{2^{2^{n-1}}-1}$. 因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $2^{2^{n-1}}-1\geqslant 1$，则 $|x_n-1|=\frac{2}{2^{2^{n-1}}-1}$，由 $|x_n-1|<\frac{1}{2^{2023}}$，得 $2^{2024}+1<2^{2^{n-1}}$，可得 $n\geqslant 12(n\in\mathbf{N}^*)$，所以不等式的解有无限个，故 D 正确. 故选 BCD.

例 4 **[思路点拨]** (1)等额本金还贷方式中，每月的还贷额构成一个等差数列，对数列求和可得所求利息；(2)利用等比数列求和公式，求得王先生每月还货额，再与题目所给数据比较，得出结论.

解：(1)由题可知，等额本金还贷方式中，每月的还贷额构成一

个等差数列$\{a_n\}$，设S_n表示数列$\{a_n\}$的前n项和，则$a_1=13\ 600$，$a_{120}=10\ 030$，故$S_{120}=\frac{13\ 600+10\ 030}{2}\times 120=1\ 417\ 800$，故王先生该笔贷款的总利息为$1\ 417\ 800-1\ 200\ 000=217\ 800$(元).

(2)设王先生每月还贷额为x元，则有$x+x(1+0.003)^1+x(1+0.003)^2+\cdots+x(1+0.003)^{119}=1\ 200\ 000\times(1+0.003)^{120}$，即$x\times\frac{1-1.003^{120}}{1-1.003}=1\ 200\ 000\times(1+0.003)^{120}$，故$x=\frac{1\ 200\ 000\times(1+0.003)^{120}\times 0.003}{1.003^{120}-1}\approx 11\ 914$.

因为$11\ 914<25\ 000\times\frac{1}{2}=12\ 500$，所以王先生该笔贷款能够获批.

变式题 (1)2036 (2)59 **【解析】**(1)设该牧场从2022年起每年年初的计划存栏数依次为$c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n,\cdots$，其中$n\in\mathbf{N}^*$，由题意得$c_1=1200$，并且$c_{n+1}=1.2c_n-100$.设$c_{n+1}-x=1.2(c_n-x)$，则$c_{n+1}=1.2c_n-0.2x$，则$0.2x=100$，可得$x=500$，所以$c_{n+1}-500=1.2(c_n-500)$，即数列$\{c_n-500\}$是首项为$c_1-500=700$，公比为1.2的等比数列，则$c_n-500=700\times 1.2^{n-1}$，则$c_n=500+700\times 1.2^{n-1}$.令$c_n=500+700\times 1.2^{n-1}>8900$，则$1.2^{n-1}>12$，可得$n-1>\frac{\lg 12}{\lg 12-1}$，即$n-1>\frac{2\lg 2+\lg 3}{2\lg 2+\lg 3-1}\approx 13.642\ 2$，所以$n>14.642\ 2$，因此$n\geqslant 15$，因为$2022+15-1=2036$，所以预计2036年年初牛的存栏量首次超过8900头.

(2)设每年应扣除的消费资金为x万元，经过n年投入的再生产资金为a_n万元，则$a_1=500\times(1+20\%)-x$，$a_2=a_1\times(1+20\%)-x=500\times(1+20\%)^2-(1+20\%)x-x$，$\cdots$，$a_5=500\times(1+20\%)^5-(1+20\%)^4x-(1+20\%)^3x-(1+20\%)^2x-(1+20\%)x-x$，由$a_5\geqslant 800$，得$\frac{1.2^5-1}{1.2-1}x\leqslant 1.2^5\times 500-800$，可得$x\leqslant 59$，故每年应扣除的消费资金至多为59万元.

第39讲　双数列问题

● 课堂考点探究

例1 **【思路点拨】**(1)由数列$\{a_n\}$的通项公式可求得a_2,a_4，从而可求得b_1,b_2，由题意可推出$b_n-b_{n-1}=3$，可得数列$\{b_n\}$是等差数列，从而可求得数列$\{b_n\}$的通项公式；(2)思路一：由数列$\{b_n\}$的通项公式可得数列$\{a_n\}$的奇数项与偶数项都为等差数列，分组求和即可；思路二：根据条件，转化为数列$\{b_n\}$的前n项和求解.

解：(1)因为$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n\text{为奇数},\\a_n+2,n\text{为偶数},\end{cases}$

所以$a_2=a_1+1=2$，$a_3=a_2+2=4$，$a_4=a_3+1=5$，

所以$b_1=a_2=2$，$b_2=a_4=5$，

$b_n-b_{n-1}=a_{2n}-a_{2n-2}=a_{2n}-a_{2n-1}+a_{2n-1}-a_{2n-2}=1+2=3$，

所以数列$\{b_n\}$是以$b_1=2$为首项，以3为公差的等差数列，

所以$b_n=2+3(n-1)=3n-1$.

(2)方法一：由(1)可得$a_{2n}=3n-1,n\in\mathbf{N}^*$，

则$a_{2n-1}=a_{2n-2}+2=3(n-1)-1+2=3n-2,n\geqslant 2$，

当$n=1$时，$a_1=1$也适合上式，所以$a_{2n-1}=3n-2,n\in\mathbf{N}^*$，

所以数列$\{a_n\}$的奇数项和偶数项都为等差数列，则$\{a_n\}$的前20项和为$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})=10+\frac{10\times 9}{2}\times 3+10\times 2+\frac{10\times 9}{2}\times 3=300$.

方法二：$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})=(a_1+a_2+2+a_4+2+\cdots+a_{18}+2)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10})=19+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10})=19+\frac{9\times(2+26)}{2}+\frac{10\times(2+29)}{2}=300$.

变式题1 **解：**(1)由题意知$a_2=a_1+1$，$a_3=2a_2=2a_1+2$，因为a_2是a_1,a_3的等比中项，所以$a_2^2=a_1a_3$，即$(a_1+1)^2=a_1(2a_1+2)$，显然$a_1\neq 0$且$a_1\neq -1$，故$a_1=1$.

(2)当n是奇数时，$a_n=2a_{n-1}=2(a_{n-2}+1)=2a_{n-2}+2,n\geqslant 3$，可得$a_n+2=2(a_{n-2}+2),n\geqslant 3$，又$a_1+2=3$，所以数列$a_1+2,a_3+2,\cdots,a_{2k-1}+2,\cdots,k\in\mathbf{N}^*$且$k\geqslant 2$是等比数列，

所以数列$\{a_n\}$的前20项的和$S_{20}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{19}+a_{20}=a_1+(a_1+1)+a_3+(a_3+1)+\cdots+a_{19}+(a_{19}+1)=2[(a_1+2)+(a_3+2)+\cdots+(a_{19}+2)]-30=2\times\frac{3\times(1-2^{10})}{1-2}-30=6108$.

变式题2 **解：**(1)由$a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，得$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，所以数列$\{a_n\}$为等差数列.

由$S_5=5\times\frac{a_1+a_5}{2}=5a_3=15$，得$a_3=3$，

所以公差$d=\frac{a_3-a_1}{3-1}=1$，所以$a_n=1+(n-1)\times 1=n$.

(2)当n为奇数时，$b_n=a_n=n$，当n为偶数时，$b_n=2^{b_{n-1}}=2^{n-1}$，所以$T_{2n}=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})=(1+3+\cdots+2n-1)+(2+2^3+\cdots+2^{2n-1})=n^2+\frac{2^{2n+1}-2}{3}$.

例2 **【思路点拨】**(1)当$n\geqslant 2$时，利用累加法可求得S_n^2的表达式，结合$S_n>0$可得出S_n的表达式，再检验$n=1$的情形，综合可得出S_n的表达式；(2)由$a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2\end{cases}$求出数列$\{a_n\}$的通项公式，列举出数列$\{b_n\}$的前20项，即可求得$T_{20}$的值.

解：(1)因为对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$S_{n+1}^2-S_n^2=8n$恒成立，

所以当$n\geqslant 2$时，$S_n^2=(S_n^2-S_{n-1}^2)+\cdots+(S_2^2-S_1^2)+S_1^2=8(n-1)+\cdots+8\times 1+1=8[1+2+3+\cdots+(n-1)]+1=8\times\frac{n(n-1)}{2}+1=(2n-1)^2$，因为$a_n>0$，所以$S_n>0$，故$S_n=2n-1(n\geqslant 2)$.因为$S_1=a_1=1$适合$S_n=2n-1$，所以$S_n=2n-1,n\in\mathbf{N}^*$.

(2)因为$S_n=2n-1,n\in\mathbf{N}^*$，所以当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n-1)-[2(n-1)-1]=2$，所以$a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2,n\geqslant 2,\end{cases}$所以数列$\{b_n\}$的前20项依次为1,1,2,1,2,2,1,2,2,2,1,2,2,2,2,1,2,2,2,2，所以$\{b_n\}$的前20项由6个1与14个2组成，所以$T_{20}=6\times 1+14\times 2=34$.

变式题 **解：**(1)由题意得$6a_3=8a_1+a_5$，所以$6q^2=8+q^4$，解得$q^2=4$或$q^2=2$(舍)，则$q=2$，又$a_1=2$，所以$a_n=2^n$.

(2)由$2n^2-(t+b_n)n+\frac{3}{2}b_n=0$，得$b_n=\frac{2n^2-tn}{n-\frac{3}{2}}$，所以$b_1=2t-4$，$b_2=16-4t$，$b_3=12-2t$，因为数列$\{b_n\}$为等差数列，所以$b_1+b_3=2b_2$，则$2t-4+12-2t=32-8t$，解得$t=3$，所以当$t=3$时，$b_n=2n$，由$b_{n+1}-b_n=2$(常数)知此时数列$\{b_n\}$为等差数列.

(3)因为$b_1=2$，所以在a_1与a_2之间插入2个2，因为$b_2=4$，所以在a_2与a_3之间插入4个2，因为$b_3=6$，所以在a_3与a_4之间插入6个2，$\cdots$，易知数列$\{c_n\}$的前100项由90个2，与$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_9,a_{10}$构成，所以$T_{100}=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+2\times 90=\frac{2\times(1-2^{10})}{1-2}+180=2226$.

例3 **【思路点拨】**(1)根据首项和公差即可写出$\{a_n\}$的通项公式，利用所给关系式构造对应的等式即可证明$\{b_n-n\}$为等比数列，进而可求$\{b_n\}$的通项公式；(2)利用通项公式找出公共项，再分组求和即可.

解：(1)由题意可得，$a_n=2+(n-1)\times 3=3n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.因为$b_1=4$，$b_{n+1}=3b_n-2n+1$，所以$b_{n+1}-(n+1)=3b_n-3n=3(b_n-n)$，$b_1-1=3$，故$\{b_n-n\}$是首项为3，公比为3的等比数列，所以$b_n-n=3^n$，即$b_n=3^n+n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由题意可得$3k-1=3^m+m,k,m\in\mathbf{N}^*$，令$m=3n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，则$3k-1=3^{3n-1}+3n-1=3(3^{3n-2}+n)-1$，此时满足条件，即当$m=2,5,8,\cdots,3n-1$时为公共项，所以$c_1+c_2+\cdots+c_n=b_2+b_5+\cdots+b_{3n-1}=3^2+3^5+\cdots+3^{3n-1}+(2+5+\cdots+3n-1)=\frac{9(27^n-1)}{26}+\frac{n(3n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

变式题 **解：**(1)因为$S_6-S_3=6$，所以$a_4+a_5+a_6=6$，所以$3a_5=6$，可得$a_5=2$，所以$d=\frac{a_5-a_3}{5-3}=\frac{1}{2}$，则$a_n=a_3+(n-3)d=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$，即数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$.

(2)因为数列$\{a_{m_n}\}$是首项为a_1，公比为4的等比数列，所以$a_{m_n}=4a_{m_{n-1}},n\geqslant 2$，$a_{m_1}=a_1$，可得$m_1=1$.

因为数列$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，所以$a_1+(m_n-1)d=4[a_1+(m_{n-1}-1)d]$，$n\geqslant 2$，化简得$m_n=\frac{3a_1}{d}+4m_{n-1}-3$，$n\geqslant 2$. 因为$a_2=a_1+d=4a_1$，所以$\frac{a_1}{d}=\frac{1}{3}$，即$m_n=4m_{n-1}-2$，$n\geqslant 2$，所以$m_n-\frac{2}{3}=4\left(m_{n-1}-\frac{2}{3}\right)$，$n\geqslant 2$. 因为$m_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，所以数列$\left\{m_n-\frac{2}{3}\right\}$是以$\frac{1}{3}$为首项，4为公比的等比数列，所以$m_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot 4^{n-1}$，则$m_n=\frac{1}{3}\cdot 4^{n-1}+\frac{2}{3}$，所以$T_n=m_1+m_2+\cdots+m_n=\frac{1}{3}(4^0+4^1+\cdots+4^{n-1})+\frac{2n}{3}=\frac{4^n-1+6n}{9}$.

例4 **[思路点拨]** (1)把已知两关系式相加、相减，可得数列$\{a_n+b_n\}$与$\{a_n-b_n\}$分别为等比与等差数列；(2)利用(1)中结论求出$\{a_n+b_n\}$与$\{a_n-b_n\}$的通项公式，进而求出$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式.

解：(1)证明：由题设得$4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$，即$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$. 又因为$a_1+b_1=1$，所以$\{a_n+b_n\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列. 由题设得$4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+8$，即$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$. 又因为$a_1-b_1=1$，所以$\{a_n-b_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列.

(2)由(1)知，$a_n+b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，$a_n-b_n=2n-1$，

所以$a_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)+(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2}$，

$b_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}$.

变式题 **解：**(1)由$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{a_n}=1$，$a_{n+1}=2b_n$，得$\frac{2}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$，整理得$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，因为$a_1=2$，所以$\frac{1}{a_1}-1=-\frac{1}{2}$，所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是以$-\frac{1}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，

所以$\frac{1}{a_n}-1=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2^n}$，所以$a_n=\frac{2^n}{2^n-1}$，所以$b_n=\frac{1}{2}a_{n+1}=\frac{2^n}{2^{n+1}-1}$.

(2)由(1)知$\frac{n}{b_n}=n\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=2n-\frac{n}{2^n}$，设$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，则$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$，两式相减得$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，从而$S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$，所以$T_n=\frac{n(2+2n)}{2}-S_n=n^2+n-2+\frac{n+2}{2^n}$.

第七单元 立体几何

第40讲 基本立体图形、简单几何体的表面积与体积

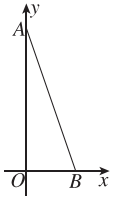
● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)平行 全等 平行 平行且相等 一点 一点
平行四边形 三角形 梯形
(2)垂直 一点 一点 矩形 等腰三角形 等腰梯形
圆 矩形 扇形 扇环
2. (1)45°或135° 90° (2)平行于坐标轴 不变 原来的一半
3. $2\pi rl$ πrl $\pi(r+r')l$
4. $S_{底}h$ $\frac{1}{3}S_{底}h$ $4\pi R^2$ $\frac{4}{3}\pi R^3$

【对点演练】

1. ④ **[解析]** 对于①，经过不共面的四点的球，即为由这四个点组成的四面体的外接球，有且仅有一个，故①中说法正确；对于②，平行六面体的每个面都是平行四边形，故②中说法正确；对于③，正棱柱的每条侧棱均与上下底面垂直，故③中说法正确；对于④，棱台的每条侧棱延长后交于一点，侧棱有可能与底面垂直，故④中说法错误.
2. $4+2\sqrt{2}$ **[解析]** 由题意可得$A'O'=\sqrt{B'O'^2+B'A'^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，由直观图可得原图，如图所示，可知$\angle AOB=90°$，$BO=B'O'=1$，$AO=2A'O'=2\sqrt{2}$，可得$AB=\sqrt{BO^2+AO^2}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$，所以原三角形$ABO$的周长为$BO+AO+AB=1+2\sqrt{2}+3=4+2\sqrt{2}$.

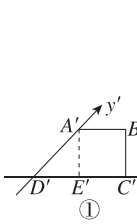


3. 14π **[解析]** 设该球的半径为R，易知长方体的体对角线为球的直径，则$2R=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$，故该球的表面积$S=4\pi R^2=\pi(2R)^2=14\pi$.
4. $6\sqrt{5}$ **[解析]** 设圆锥的母线长为l，底面圆的半径为r，因为圆锥的侧面展开图是圆心角为$\frac{4\pi}{3}$，半径为18的扇形，所以$l=18$，且$18\times\frac{4\pi}{3}=2\pi r$，解得$r=12$，故圆锥的高$h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{18^2-12^2}=6\sqrt{5}$.
5. 1∶47 **[解析]** 设长方体的过同一顶点的三条棱的长分别为a，b，c，则截出的棱锥的体积$V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}b\times\frac{1}{2}c=\frac{1}{48}abc$，剩下的几何体的体积$V_2=abc-\frac{1}{48}abc=\frac{47}{48}abc$，所以$V_1:V_2=1:47$.
6. $24\pi^2$ 或 $36\pi^2$ **[解析]** 设圆柱的底面半径为r. 若圆柱的母线长是6π，则$4\pi=2\pi r$，所以$r=2$，所以圆柱的体积为$\pi\times 2^2\times 6\pi=24\pi^2$. 若圆柱的母线长是$4\pi$，则$6\pi=2\pi r$，所以$r=3$，所以圆柱的体积为$\pi\times 3^2\times 4\pi=36\pi^2$. 故圆柱的体积是$24\pi^2$或$36\pi^2$.

● 课堂考点探究

例1 **[思路点拨]** 分析可知，原平面图形为一个直角梯形，根据斜二测画法的规则求出上底、下底、高，最后利用梯形的面积公式求解即可.

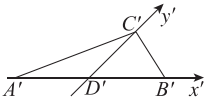
C **[解析]** 如图①，过点A'作$A'E'\perp C'D'$于点E'，因为$\angle A'D'C'=45°$，所以$A'D'=\sqrt{2}A'E'=\sqrt{2}B'C'=\sqrt{2}$，$C'D'=C'E'+D'E'=C'E'+A'E'=A'B'+B'C'=2$，则原平面图形中$AD=2\sqrt{2}$，$AB=A'B'=1$，$CD=C'D'=2$，作出原平面图形，如图②所示，则原平面图形的面积为$\frac{1}{2}(CD+AB)\times AD=3\sqrt{2}$，故选C.



②

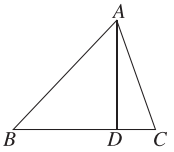
①

变式题 (1)D (2)AD **[解析]** (1)设$A'B'$的中点为D'，连接$C'D'$，如图所示，则$\triangle A'B'C'$的高$h=C'D'\sin 45°=\frac{1}{2}\times 2\times\sin 60°\times\sin 45°=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$A'B'=AB=2$，所以$\triangle A'B'C'$的面积$S=\frac{1}{2}A'B'\cdot h=\frac{1}{2}\times 2\times$



$\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. 故选 D.

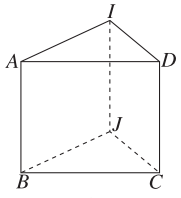
(2)由题意得,原三角形 ABC 的平面图如图所示,其中 $AD\perp BC$,$BD>DC$,$\therefore AB>AC>AD$,$\therefore$ 最长的是 AB,最短的是 AD,故选 AD.



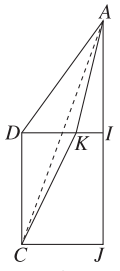
例 2 **[思路点拨]** (1)根据圆锥的侧面展开图的特点即可得到方程,求出结果. (2)作出图形,将原问题转化为平面上两点间的距离最短问题,进而得解.

(1)B (2)B **[解析]** (1)设圆锥的母线长为 l,则 $2\pi\times\sqrt{2}=\pi l$,解得 $l=2\sqrt{2}$. 故选 B.

(2)将展开图还原成立体图形得到三棱柱 ADI-BCJ,如图①. 由已知可得,$AI=4$,$DI=3$,$AD=5$,易知 $\triangle ADI$ 为直角三角形且 $\angle AID=90^\circ$. 将三棱柱的上底面 ADI 沿 DI 翻折至平面 $IDCJ$ 上,A,C 在 DI 两侧,连接 AC,如图②所示. 因为 $AJ=8$,$CJ=3$,所以 $AC=\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}$,则 $AK+CK$ 的最小值为 $\sqrt{73}$. 故选 B.



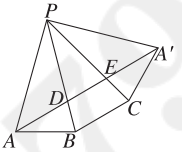
①



②

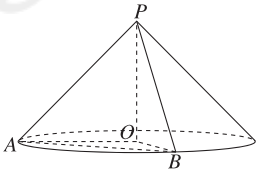
变式题 (1)D (2)$2\sqrt{2}$ **[解析]** (1)设圆锥的母线长为 l,底面半径为 r,则由题意得 $135^\circ=\frac{3\pi}{4}=\frac{2\pi r}{l}$,所以 $l=\frac{8}{3}r$,可得圆锥的表面积 $A=\pi r^2+\pi rl=\frac{11}{3}\pi r^2$,扇形的面积 $B=\frac{1}{2}\times 2\pi rl=\frac{8}{3}\pi r^2$,所以 $A:B=11:8$. 故选 D.

(2)由题意可得此三棱锥的侧面展开图如图所示,连接 AA',则 $\triangle AED$ 的周长为 $AD+DE+EA'$,因为两点之间线段最短,所以当 A,D,E,A' 在一条直线上时,截面三角形 AED 的周长最小,最小值为 AA' 的长. 因为 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA'=30^\circ$,所以 $\angle APA'=90^\circ$,因为 $PA=PA'=2$,所以 $AA'=\sqrt{PA^2+PA'^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$,所以截面三角形 AED 周长的最小值为 $2\sqrt{2}$.



例 3 **[思路点拨]** (1)根据题意画出图形,结合图形求出圆锥的母线长和底面半径,即可求出圆锥的侧面积. (2)设正六边形的边长为 a,根据正六边形的面积求出 a^2 的值,结合题意知原正四面体的棱长为 $3a$,即可计算出原正四面体的表面积.

(1)$\sqrt{2}\pi$ (2)12 **[解析]** (1)如图所示,因为三棱锥 O-PAB 为正三棱锥,所以 $PA=PB=AB=\sqrt{2}$,$OA=OB=OP$. 因为 $PO\perp AO$,$PO\perp OB$,所以由勾股定理得 $OA=OB=OP=1$,则圆锥的底面半径 $r=1$,母线长 $l=\sqrt{2}$,则该圆锥的侧面积为 $\pi rl=\sqrt{2}\pi$.



(2)设正六边形的边长为 a,根据题意得 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=2$,解得 $a^2=\frac{8}{6\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$,由题意可知原正四面体的棱长为 $3a$,故原正四面体的表面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3a)^2\times4=12$.

变式题 (1)C (2)D **[解析]** (1)设圆柱的高是 h,则由题意得 $\pi R^2h+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{11}{3}\pi R^3$,所以 $h+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}R=\frac{11}{3}R$,可得 $h=3R$,则酒杯内壁的面积为 $2\pi Rh+\frac{1}{2}\times4\pi R^2=2\pi R\cdot3R+\frac{1}{2}\times4\pi R^2=8\pi R^2$,故选 C.

(2)设圆台的母线长为 l,因为该圆台的侧面积为 $3\sqrt{5}\pi$,所以由圆台的侧面积公式可得 $\pi l(1+2)=3\pi l=3\sqrt{5}\pi$,所以 $l=\sqrt{5}$. 设截去的小圆锥的母线长为 l',则由三角形相似可得 $\frac{l'}{l'+\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$,解得 $l'=\sqrt{5}$,所以原圆锥的母线长为 $l'+l=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$,故选 D.

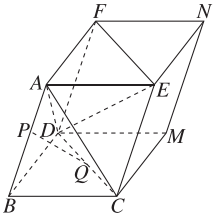
例 4 **[思路点拨]** (1)由展开图的相关数据求出上下底面的半径,进而求出圆台的母线、高,最后由圆台的体积公式求解. (2)思路一:由大正四棱锥的体积减去小正四棱锥的体积可解;思路二:分析得出正四棱台的高与上、下底面的边长,再代入体积公式计算即可. (3)将四面体补成平行六面体,再用等体积法求解.

(1)C (2)28 (3)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ **[解析]** (1)设圆台上底面的半径为 r_1,下底面的半径为 r_2,依题意得 $2\pi r_1=\frac{2\pi}{3}\times1$,且 $2\pi r_2=\frac{2\pi}{3}\times3$,解得 $r_1=\frac{1}{3}$,$r_2=1$. 因为圆台的母线长 $l=AD=3-1=2$,所以圆台的高 $h=\sqrt{l^2-(r_2-r_1)^2}=\sqrt{4-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,所以圆台的体积 $V=\frac{\pi}{3}h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)=\frac{\pi}{3}\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times1+1^2\right]=\frac{52\sqrt{2}\pi}{81}$. 故选 C.

(2)方法一:依题意可知,原正四棱锥的高为 6,故棱台的体积 $V=V_{大正四棱锥}-V_{小正四棱锥}=\frac{1}{3}\times4^2\times6-\frac{1}{3}\times2^2\times3=28$.

方法二:由题可知所得棱台的高为 3,上底面是边长为 2 的正方形,下底面是边长为 4 的正方形,由棱台的体积公式可得棱台的体积 $V=\frac{1}{3}\times(4^2+2^2+\sqrt{4^2\times2^2})\times3=28$.

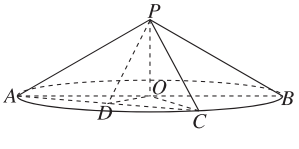
(3)如图所示,把四面体 $ABCD$ 补成一个平行六面体,连接 EF,DE,设 P,Q 分别在 AB,CD 上,且 PQ 为异面直线 AB 与 CD 的公垂线段,即 $PQ\perp AB$,$PQ\perp CD$,则 $PQ=3$. 在平行六面体中,可得 $AB/\!/CE$,所以 $PQ\perp CE$,又因为 $CD\cap CE=C$ 且 CD,$CE\subset$ 平面 $CDFE$,所以 $PQ\perp$ 平面 $CDFE$,易知 $AB/\!/$平面 $CDFE$,所以点 A 到平面 $CDFE$ 的距离 $d=3$. 因为 $AB/\!/CE$ 且直线 AB 与 CD 所成的角为 60°,所以 CE 与 CD 所成的角为 60°,又 $AB=CE=1$,$CD=2$,所以 $V_{A\text{-}BCD}=V_{D\text{-}AEF}=V_{A\text{-}CDE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}CD\times CE\sin60^\circ\times3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin60^\circ\times3=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即四面体 $ABCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



变式题 (1)D (2)B (3)AC **[解析]** (1)设弧 AD 所在圆的半径为 R,弧 BC 所在圆的半径为 r,$\because$ 弧 AD 的长度是弧 BC 长度的 3 倍,底面扇环所对的圆心角为 $\frac{\pi}{2}$,$\therefore\frac{\pi}{2}R=3\times\frac{\pi}{2}r$,即 $R=3r$,$\therefore CD=R-r=2r=2$,解得 $r=1$,则 $R=3$,$\therefore$ 该几何体的体积 $V=\left(\frac{1}{4}\pi R^2-\frac{1}{4}\pi r^2\right)\times AA_1=\left(\frac{9\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\times5=10\pi$. 故选 D.

(2)沙漏中的细沙对应的圆锥的底面半径为 $\frac{2}{3}\times3=2(\text{cm})$,高为 $6\times\frac{2}{3}=4(\text{cm})$,则细沙的体积为 $\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times4=\frac{16\pi}{3}(\text{cm}^3)$,所以该沙漏的一个沙时为 $\frac{\frac{16\pi}{3}}{0.02}\approx837(\text{s})$,故选 B.

(3)如图,取 AC 的中点 D,连接 OD,PD,PO,则 $OD\perp AC$,$PD\perp AC$,故 $\angle PDO$ 为二面角 P-AC-O 的平面角,得 $\angle PDO=$



45°. 因为$\angle APB=120°$，$PA=2$，所以$AB=2\sqrt{3}$，$PO=1$，故圆锥的体积$V=\frac{1}{3}\times\pi\times(\sqrt{3})^2\times1=\pi$，故A正确；$S_{圆锥侧}=\pi\times\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}\pi$，故B错误；由$\angle PDO=45°$，可得$DO=1$，故$AC=2\times\sqrt{3-1}=2\sqrt{2}$，故C正确；易知$PO\perp DO$，由$PO=1$，$DO=1$，得$PD=\sqrt{2}$，则$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，故D错误. 故选AC.

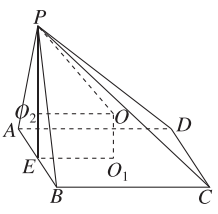
增分微课3　与球有关的切、接问题

例1 **【思路点拨】**(1)结合题意知，球心、底面外接圆圆心、棱台的顶点构成直角三角形，则可利用勾股定理求解，要注意讨论球心的位置. (2)由题意可得VA，AB，AC两两垂直且相等，则可将求三棱锥$V\text{-}ABC$外接球的半径转化为求以A为顶点，VA，AB，AC为共顶点的三条棱的正方体外接球的半径. 设三棱锥$V\text{-}ABC$内切球的半径为r，则可利用等体积法列方程求出r. (3)设正方形$ABCD$的边长为$2x$，过点P作$PE\perp AB$于E，则PE为四棱锥的高，且$PE=\sqrt{3}x$，即可根据四棱锥的体积列方程求出x. 设O_1，O_2分别为正方形$ABCD$，等边三角形PAB的中心，O为四棱锥外接球的球心，在矩形OO_2EO_1中求出相关的量，进而可求出外接球的半径及表面积.

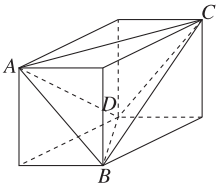
(1)A　(2)C　(3)C　**【解析】**(1)由题意，设球的球心为O，半径为R，正三棱台的上、下底面分别为$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2均为正三棱台的棱，则$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$都是等边三角形. 设$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$的外接圆圆心分别为O_1，O_2，连接O_1O_2，则$O_1O_2=1$. 连接O_1A_1，O_2A_2，∵等边三角形$A_1B_1C_1$和等边三角形$A_2B_2C_2$的边长分别为$3\sqrt{3}$，$4\sqrt{3}$，∴$O_1A_1=3$，$O_2A_2=4$. 连接OA_1，OA_2，若点O在线段O_1O_2上，则$R^2=O_1A_1^2+OO_1^2=O_2A_2^2+(1-OO_1)^2$，即$3^2+OO_1^2=4^2+(1-OO_1)^2$，可得$OO_1=4>O_1O_2$，矛盾，故点$O$在线段$O_1O_2$的延长线上. 由题意得$R^2=O_1A_1^2+(OO_2+1)^2=O_2A_2^2+OO_2^2$，可得$OO_2=3$，$R=5$，∴该球的表面积$S=4\pi R^2=100\pi$.

(2)因为$VA\perp$底面ABC，AB，$AC\subset$底面ABC，所以$VA\perp AB$，$VA\perp AC$，因为$\angle BAC=90°$，所以$AB\perp AC$，又$AB=AC=AV=2$，所以AB，AC，VA可看作棱长为2的正方体共顶点的三条棱，易知该正方体与三棱锥$V\text{-}ABC$有相同的外接球，所以该三棱锥外接球的半径$R=\frac{1}{2}\times\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{3}$. 设该三棱锥的内切球的半径为$r$，因为$\angle BAC=90°$，所以$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，因为$VA\perp AB$，$VA\perp AC$，$AB=AC=VA=2$，所以$VB=VC=\sqrt{VA^2+AB^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. 由三棱锥的体积公式可得$3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\cdot r+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2$，解得$r=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$，所以$r:R=\frac{3-\sqrt{3}}{3}:\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1):3$，故选C.

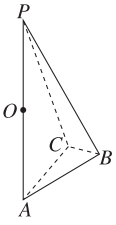
(3)如图，设正方形$ABCD$的边长为$2x$，在等边三角形PAB中，过点P作$PE\perp AB$于E，因为平面$PAB\perp$平面$ABCD$，平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，所以$PE\perp$平面$ABCD$. 因为$\triangle PAB$是等边三角形，所以$PE=\sqrt{3}x$，所以$V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{正方形ABCD}\cdot PE=\frac{1}{3}\times(2x)^2\times\sqrt{3}x=36\sqrt{3}$，解得$x=3$. 设四棱锥$P\text{-}ABCD$外接球的半径为$R$，$O_1$为正方形$ABCD$的中心，$O_2$为等边三角形$PAB$的中心，$O$为四棱锥$P\text{-}ABCD$外接球的球心，连接$O_2O$，$OO_1$，$EO_1$，$PO$，则易知四边形$OO_2EO_1$为矩形，则$OO_2=EO_1=\frac{1}{2}AD=3$，$PO_2=\frac{2}{3}PE=\frac{2}{3}\times3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，所以$R=OP=\sqrt{OO_2^2+PO_2^2}=\sqrt{9+12}=\sqrt{21}$，所以外接球的表面积$S=4\pi\times(\sqrt{21})^2=84\pi$. 故选C.



变式题　(1)B　(2)D　**【解析】**(1)由题意可知，四面体$A\text{-}BCD$可以看成一个长方体的一部分，如图所示，设该长方体共顶点的三条棱的长分别为x，y，z，则$x^2+y^2=7$，$x^2+z^2=29$，$y^2+z^2=28$，可得$x=2$，$y=\sqrt{3}$，$z=5$. 易知四面体$A\text{-}BCD$与长方体有相同的外接球，设外接球的半径为R，则$(2R)^2=(\sqrt{3})^2+5^2+2^2$，可得$R=2\sqrt{2}$，所以四面体$A\text{-}BCD$外接球的表面积$S=4\pi R^2=4\times\pi\times(2\sqrt{2})^2=32\pi$. 故选B.

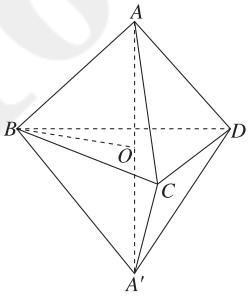


(2)如图，因为三棱锥$P\text{-}ABC$的所有顶点都在球O的球面上，PA为球O的直径，所以$PB\perp AB$，$PC\perp AC$. 因为$\angle ACB=90°$，即$AC\perp BC$，$PC\cap BC=C$，所以$AC\perp$平面PBC. 因为$PB\subset$平面PBC，所以$AC\perp PB$. 又$AB\perp PB$，$AC\cap AB=A$，所以$PB\perp$平面ABC. 在Rt$\triangle PAB$中，$PA=4$，$AB=2$，所以$PB=\sqrt{PA^2-AB^2}=2\sqrt{3}$，即点$P$到底面$ABC$的距离为$2\sqrt{3}$. 故选D.



例2 **【思路点拨】**根据正三棱锥的几何性质，确定六面体外接球球心的位置及半径与正三棱锥的底边长、高的关系，从而列方程求得半径，即可得六面体外接球的体积.

$\frac{16\sqrt{3}}{9}\pi$　**【解析】**如图所示，记两个全等的正三棱锥为三棱锥$A\text{-}BCD$和三棱锥$A'\text{-}BCD$，设点A在平面BCD上的射影为点O，连接AO，$A'O$，BO，则A'，O，A三点共线. 因为组合后的六面体存在外接球，所以O为外接球的球心. 设$AO=a$，则$BO=a$，外接球的半径也为a，因为O为$\triangle BCD$的中心，所以$\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{3}}=2a$，则$BC=\sqrt{3}a$，所以$V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot OA=\frac{1}{3}\times(\sqrt{3}a)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a=1$，可得$a^3=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以六面体外接球的体积$V=\frac{4}{3}\pi a^3=\frac{4}{3}\pi\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{16\sqrt{3}}{9}\pi$.



变式题　B　**【解析】**设球的半径为R，截面圆的半径为r，球心到截面圆的距离为d，∵$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32}{3}\pi$，∴$R=2$. 又两个圆锥的高之比为1∶3，∴$d=1$，$r=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$，∴这两个圆锥的体积之和为$\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times4=4\pi$.

例3 **【思路点拨】**求出该正三棱锥的表面积与体积，再利用等体积法列方程求解.

D　**【解析】**设该正三棱锥为$P\text{-}ABC$，内切球的半径为r，过点P作$PD\perp$平面ABC于点D，连接AD并延长，交BC于点E，连接PE. ∵$\triangle ABC$是正三角形，∴E是BC的中点，D为$\triangle ABC$的中心. ∵$AB=2\sqrt{3}$，∴$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$，$DE=1$，$PE=\sqrt{2}$，∴该正三棱锥的表面积$S_{表}=3\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+3\sqrt{3}=3\sqrt{6}+3\sqrt{3}$. 该正三棱锥的体积$V=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$，则$\frac{1}{3}S_{表}\cdot r=V$，即$\frac{1}{3}\times(3\sqrt{6}+3\sqrt{3})\cdot r=\sqrt{3}$，解得$r=\sqrt{2}-1$. 故选D.

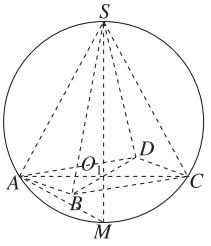
变式题　$\frac{4-\sqrt{6}}{5}$　**【解析】**因为BA，BC，BD两两垂直，$BA=1$，$BC=BD=2$，所以$AC=AD=\sqrt{5}$，$CD=2\sqrt{2}$. 取CD的中点E，连接AE，则$AE\perp CD$，所以$AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{3}$，则$\triangle ACD$的面积为$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$，所以四面体$ABCD$的表面积$S=\frac{1}{2}\times1\times2\times2+\frac{1}{2}\times2\times2+\sqrt{6}=4+\sqrt{6}$，易知四面

MXQE

体 $ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times2^2=\frac{2}{3}$. 设四面体 $ABCD$ 内切球的半径为 r，则 $V=\frac{1}{3}S\cdot r$，所以 $r=\frac{3V}{S}=\frac{2}{4+\sqrt{6}}=\frac{4-\sqrt{6}}{5}$.

例 4 **【思路点拨】**(1)设正四棱锥的高为 h，由 l 的取值范围得到 h 的取值范围，将体积表示成关于 h 的函数，则可利用导数法或基本不等式法求出体积的取值范围. (2)设出相应的量，得到球 O 的半径 R 的表达式，即可利用基本不等式求最小值，进而得到表面积的最小值.

(1)C　(2)$4\sqrt{3}\pi$　**【解析】**(1)方法一(导数法)：如图，连接 AC，BD 交于点 O_1，连接 SO_1. 设正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的高 $SO_1=h$，底面边长为 a，则 $AO_1=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，设正四棱锥外接球的半径为 R，则由 $\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi$，得 $R=3$. 延长 SO_1，交球面于点 M，连接 AM，则 SM 为球的直径，易知 $AO_1\perp SM$，在 $\mathrm{Rt}\triangle SAM$ 中，由射影定理知，$l^2=6h$，$\frac{1}{2}a^2=h(6-h)$，所以 $a^2=2h(6-h)$，$h=\frac{l^2}{6}\in\left[\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right]$，所以正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}a^2h=\frac{2}{3}h^2(6-h)=\frac{2}{3}(-h^3+6h^2)$. 记 $V(h)=\frac{2}{3}(-h^3+6h^2)$，$h\in\left[\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right]$，则 $V'(h)=2(-h^2+4h)$，$h\in\left[\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right]$，当 $h\in\left[\frac{3}{2},4\right)$ 时，$V'(h)>0$，$V(h)$ 单调递增，当 $h\in\left(4,\frac{9}{2}\right]$ 时，$V'(h)<0$，$V(h)$ 单调递减，所以 $V(h)_{\max}=V(4)=\frac{64}{3}$，$V(h)_{\min}=\min\left\{V\left(\frac{3}{2}\right),V\left(\frac{9}{2}\right)\right\}=\min\left\{\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right\}=\frac{27}{4}$，所以该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$.

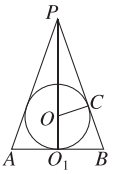


方法二(基本不等式法)：由方法一得 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}(12-2h)h\times h\leqslant\frac{1}{3}\times\left[\frac{(12-2h)+h+h}{3}\right]^3=\frac{64}{3}$(当且仅当 $h=4$ 时取等号)，当 $l=3$ 时，$h=\frac{3}{2}$，$a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，则 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2\times\frac{3}{2}=\frac{27}{4}$. 当 $l=3\sqrt{3}$ 时，$h=\frac{9}{2}$，$a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，正四棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2\times\frac{9}{2}=\frac{81}{4}$，$\frac{27}{4}<\frac{81}{4}<\frac{64}{3}$，故该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$.

(2)设正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的高为 h，$AC=BC=AB=a$，则 $3a\times h=9$，所以 $h=\frac{3}{a}$. 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r，则 $2r=\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}$，解得 $r=\frac{\sqrt{3}a}{3}$. 设球 O 的半径为 R，则 $R^2=r^2+\frac{h^2}{4}=\frac{a^2}{3}+\frac{9}{4a^2}\geqslant\sqrt{3}$，当且仅当 $a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，等号成立，所以球 O 的表面积的最小值为 $4\pi\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}\pi$.

变式题　(1)B　(2)C　**【解析】**(1)设矩形的两邻边长分别为 x，y，可得 $8=xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，当且仅当 $x=y=2\sqrt{2}$ 时，等号成立，则 $x+y\geqslant4\sqrt{2}$，所以当矩形 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形时，矩形的周长最小. 沿对角线 AC 把 $\triangle ACD$ 折起，得到三棱锥 $D\text{-}ABC$，易知三棱锥 $D\text{-}ABC$ 外接球的球心是 AC 的中点，半径为 AC 长的一半，此时外接球的半径 $R=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=2$，所以此时三棱锥 $D\text{-}ABC$ 外接球的表面积 $S=4\pi R^2=16\pi$，故选 B.

(2)设该圆锥内切球的球心为 O，圆锥底面圆的圆心为 O_1，底面半径为 R，高为 h，体积为 V，作出该几何体的轴截面，如图所示，圆 O 与 PB 切于点 C，连接 OC，PO_1，则 P，O，O_1 三点共线.



方法一：由等面积法可得 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times2R\cdot h=\frac{1}{2}\times(2R+2\sqrt{R^2+h^2})\times1$，化简得 $h=\frac{2R^2}{R^2-1}$，所以 $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h=\frac{2\pi}{3}\times\frac{R^4}{R^2-1}$，又 $\frac{R^4}{R^2-1}=\frac{(R^2-1)^2+2(R^2-1)+1}{R^2-1}=(R^2-1)+\frac{1}{R^2-1}+2\geqslant2\sqrt{(R^2-1)\cdot\frac{1}{R^2-1}}+2=4$，当且仅当 $R^2-1=\frac{1}{R^2-1}$，即 $R=\sqrt{2}$ 时取等号，所以 $V\geqslant\frac{2\pi}{3}\times4=\frac{8\pi}{3}$.

方法二：易知 $\triangle POC\backsim\triangle PBO_1$，所以 $\frac{R}{h}=\frac{1}{\sqrt{(h-1)^2-1^2}}$，所以 $R^2=\frac{h}{h-2}$，则 $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h=\frac{\pi}{3}\times\frac{h^2}{h-2}=\frac{\pi}{3}\times\left[(h-2)+\frac{4}{h-2}+4\right]\geqslant\frac{8\pi}{3}$，当且仅当 $h-2=\frac{4}{h-2}$，即 $h=4$ 时取等号. 故选 C.

第 41 讲　空间点、直线、平面之间的位置关系

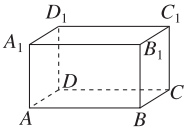
● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 不在一条直线上　两个点　平行
2. 直线外　相交　平行
3. (1)相交　平行　任何　(2)相等或互补
4. 1　0　无数　0　无数

【对点演练】

1. ④　**【解析】**对于①，共线的三点不能确定一个平面，故①错误；对于②，若两个平面有一个公共点，则这两个平面有一条经过该点的公共直线，该交线上有无数个公共点，故②错误；对于③，三条平行直线可能共面，也可能有一条直线在另外两条平行直线确定的平面外，故③错误；对于④，当三条直线两两相交且三个交点不重合时，三条直线共面，当三条直线两两相交于一个点时，这三条直线可能在同一个平面内，也可能不共面，此时其中任意两条直线都可以确定一个平面，共可确定 3 个平面，故④正确. 故填④.
2. 直线 CD　**【解析】**由题意知，$D\in l$，$l\subset\beta$，所以 $D\in\beta$，又因为 $D\in AB$，所以 $D\in$ 平面 ABC，所以点 D 在平面 ABC 与平面 β 的交线上. 又因为 $C\in$ 平面 ABC，$C\in\beta$，所以点 C 在平面 β 与平面 ABC 的交线上，所以平面 $ABC\cap$ 平面 $\beta=CD$.
3. ④　**【解析】**依题意，$m\cap\alpha=A$，$n\subset\alpha$，$\therefore m$ 与 n 可能异面、相交(垂直是相交的特例)，m 与 n 一定不平行. 故填④.
4. 异面或平行　**【解析】**如果两条直线 a 和 b 没有公共点，那么 a 与 b 的位置关系是异面或平行.
5. 平行或相交或异面　**【解析】**如图所示，当 $a=AA_1$，$l=BC$，$b=D_1C_1$ 时，直线 a，b 异面；当 $a=AA_1$，$l=BC$，$b=DD_1$ 时，直线 a，b 平行；当 $a=AA_1$，$l=BC$，$b=A_1B_1$ 时，直线 a，b 相交. 故 a 与 b 的位置关系是平行或相交或异面.

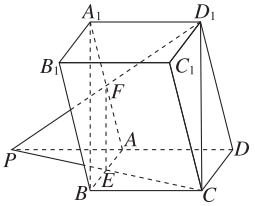


● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】**(1)连接 EF，CD_1，A_1B，可证得 $EF/\!/A_1B/\!/CD_1$，从而得到 E，C，D_1，F 四点共面；(2)设 CE，D_1F 交于点 P，再证明直线 DA 经过点 P 即可.

证明：(1)如图，连接 EF，CD_1，A_1B. 由平行六面体的性质得 $A_1B/\!/D_1C$，$\because E$，F 分别是 AB，AA_1 的中点，$\therefore EF/\!/BA_1$，又 $A_1B/\!/D_1C$，$\therefore EF/\!/CD_1$，$\therefore E$，C，D_1，F 四点共面.

(2)$\because EF/\!/CD_1$，$EF<CD_1$，



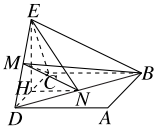
$\therefore CE$ 与 D_1F 必相交，延长 CE，D_1F，设交点为 P，如图所示. 由 $P\in CE$，$CE\subset$平面 $ABCD$，得 $P\in$平面 $ABCD$. 同理可得 $P\in$平面 ADD_1A_1. 延长 DA，$\because$平面 $ABCD\cap$平面 $ADD_1A_1=DA$，$\therefore P\in$直线 DA，$\therefore CE$，D_1F，DA 三线共点.

变式题 **证明**：(1)连接 B_1D_1，易知 EF 是 $\triangle D_1B_1C_1$ 的中位线，$\therefore EF/\!/B_1D_1$. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$B_1D_1/\!/BD$，$\therefore EF/\!/BD$，$\therefore EF$，BD 可以确定一个平面，即 D，B，F，E 四点共面.

(2)在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，设平面 A_1ACC_1 为 α，平面 DBE 为 β. $\because Q\in A_1C_1$，$\therefore Q\in\alpha$. 又 $Q\in EF$，$\therefore Q\in\beta$，则 Q 是 α 与 β 的公共点，同理，P 是 α 与 β 的公共点，连接 PQ，$\therefore\alpha\cap\beta=PQ$. 又 $A_1C\cap\beta=R$，$\therefore R\in A_1C$，$\therefore R\in\alpha$，又 $R\in\beta$，$\therefore R\in PQ$，故 P，Q，R 三点共线.

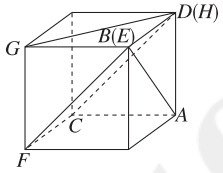
例 2 **【思路点拨】**(1)由中位线可得四边形 $MNBE$ 为梯形，进而得到 BM，EN 相交，在直角三角形中，利用勾股定理计算可得 $BM\neq EN$. (2)作辅助线，由三角形中的比例关系可得 $\frac{ME}{ED_1}=\frac{MF}{BF}$，进而可得 $EF/\!/BD_1$.

(1)B　(2)D　**【解析】**(1)连接 BD，则 N 为 BD 的中点，连接 MN，CM，BE. 如图所示，在 $\triangle EDB$ 中，M，N 分别是 ED，BD 的中点，所以 $MN/\!/BE$，$MN=\frac{1}{2}BE$，则四边形 $MNBE$ 是梯形，BM，EN 是梯形的两条对角线，所以直线 BM，EN 相交. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，由题意可得 $\triangle BCM$ 为直角三角形，则 $BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}a$. 记 CD 的中点为 H，连接 EH，HN，则 $\triangle EHN$ 为直角三角形，则 $EN=\sqrt{EH^2+NH^2}=a$，故 $BM\neq EN$. 综上所述，$BM\neq EN$，且直线 BM，EN 是相交直线.

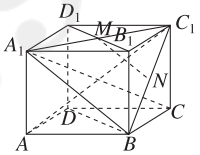


(2)连接 D_1E 并延长，与 AD 交于点 M，因为 $A_1E=2ED$，所以 M 为 AD 的中点. 连接 BF 并延长，交 AD 于点 N，因为 $CF=2FA$，所以 N 为 AD 的中点，所以 M，N 重合. 因为 $\frac{ME}{ED_1}=\frac{1}{2}$，$\frac{MF}{BF}=\frac{AF}{FC}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{ME}{ED_1}=\frac{MF}{BF}$，所以 $EF/\!/BD_1$. 故选 D.

变式题　(1)B　(2)C　**【解析】**(1)作出正方体如图所示，由图可知，AB 与 EF 相交，AB 与 CD 异面，GH 与 CD 相交，EF 与 CD 平行. 故选 B.

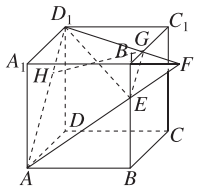


(2)如图，连接 A_1C_1，BC_1，因为 M，N 分别是长方形 $A_1B_1C_1D_1$ 与长方形 BCC_1B_1 的中心，所以 M，N 分别是 A_1C_1，BC_1 的中点，所以直线 MN 与直线 A_1B 平行，所以 A 错误；连接 BD，B_1D_1，因为直线 MN 不在平面 BB_1D_1D 内，且直线 MN 经过平面 BB_1D_1D 内一点 M，点 M 不在直线 DD_1 上，所以直线 MN 与直线 DD_1 是异面直线，所以 B 错误；因为直线 MN 不在平面 ABC_1 内，且直线 MN 经过平面 ABC_1 内一点 N，点 N 不在直线 AC_1 上，所以直线 MN 与直线 AC_1 是异面直线，所以 C 正确；因为直线 MN 不在平面 A_1C_1C 内，且直线 MN 经过平面 A_1CC_1 内一点 M，点 M 不在直线 A_1C 上，所以直线 MN 与直线 A_1C 是异面直线，所以 D 错误. 故选 C.



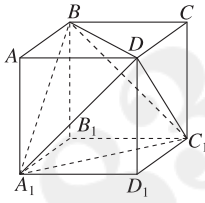
例 3 **【思路点拨】**将所给平面 AED_1 延展，可以利用平行或者延长线段的方法，得出截面与其他平面的交线，运用基本事实作出截面，根据截面的几何特征求其面积即可.

C　**【解析】**延长 AE，A_1B_1，交于点 F，连接 D_1F，交 B_1C_1 于点 G，连接 EG，如图所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $ADD_1A_1/\!/$平面 BCC_1B_1，$\because$平面 $AFD_1\cap$平面 $ADD_1A_1=AD_1$，平面 $AFD_1\cap$平面 $BCC_1B_1=EG$，$\therefore AD_1/\!/GE$，$\therefore$四边形 $AEGD_1$ 为平面 AED_1 截正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面图形. 又 $\because D_1G=AE=\sqrt{13}$，$\therefore$四边形 $AEGD_1$ 是等腰梯形，过 G 作 $GH\perp AD_1$，垂足为 H，$\because AD_1=3\sqrt{2}$，$GE=\sqrt{2}$，$\therefore D_1H=\sqrt{2}$，$\therefore GH=\sqrt{D_1G^2-D_1H^2}=\sqrt{11}$，$\therefore$四边形 $AEGD_1$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot(AD_1+EG)\cdot GH=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+3\sqrt{2})\times\sqrt{11}=2\sqrt{22}$. 故选 C.

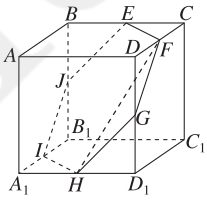


例 4 **【思路点拨】**根据正方体、球体、四面体、圆柱体的结构特征逐项计算分析.

ABD　**【解析】**对于 A，正方体内切球的直径为 1 m，故 A 正确；对于 B，如图①，在正方体中作出正四面体 A_1BDC_1，该正四面体的棱长为 $BA_1=\sqrt{2}$ m，而 $\sqrt{2}>1.4$，故 B 正确；对于 C，圆柱体的底面直径为 0.01 m，可以忽略不计，正方体的体对角线的长为 $\sqrt{3}$ m，而 $1.8>\sqrt{3}$，故 C 不正确；对于 D，圆柱体的高为 0.01 m，可忽略不计，如图②，取 E，F，G，H，I，J 分别为所在棱的中点，并顺次连接，所得六边形 $EFGHIJ$ 为正六边形，其边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m，连接 FH，易知 FH 为正六边形 $EFGHIJ$ 的内切圆直径，因为 $\angle GFH=\angle GHF=30°$，所以 $FH=\sqrt{3}FG=\sqrt{3}GH=\frac{\sqrt{6}}{2}$ m，而 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{6}{4}>1.2^2=1.44$，故 D 正确. 故选 ABD.



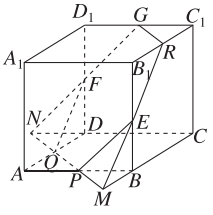
①



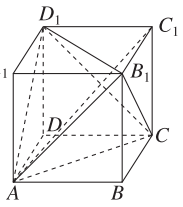
②

【应用演练】

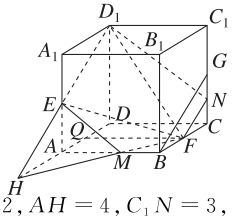
1. D　**【解析】**如图所示，连接 QP 并延长，与 CB 的延长线交于 M，且 QP 的反向延长线与 CD 的延长线交于 N，连接 MR，交 BB_1 于 E，连接 PE，则 PQ，PE，RE 为截面与正方体的交线，作 $RG/\!/PQ$，交 C_1D_1 于点 G，连接 NG，交 DD_1 于点 F，连接 QF，则 RG，QF，FG 为截面与正方体的交线，$\therefore$截面为六边形 $PQFGRE$.



2. A　**【解析】**如图，将棱长为 1 的正四面体 B_1ACD_1 放入正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，且正方体的棱长为 $1\times\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，连接 AC_1，则 $AC_1=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以正方体外接球的半径 $R=\frac{1}{2}AC_1=\frac{\sqrt{6}}{4}$，所以正方体外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$，因为正四面体的外接球即为正方体的外接球，所以正四面体的外接球的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$.

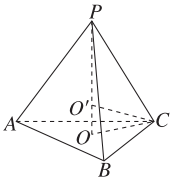


3. D　**【解析】**取 CC_1 的中点 G，连接 BG，则 $D_1E/\!/BG$，取 CG 的中点 N，连接 FN，D_1N，则 $FN/\!/BG$，所以 $FN/\!/D_1E$，则直线 $FN\subset$平面 D_1EF. 延长 D_1E，DA，交于 H，连接 FH，交 AB 于点 M，连接 ME，则平面 D_1EF 截正方体所得的截面图形为五边形 D_1EMFN，由条件可得 $A_1E=AE=2$，$AH=4$，$C_1N=3$，$CN=1$，$D_1E=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，$D_1N=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$FN=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，取 AD 的中点 Q，连接 QF，则 $AM/\!/FQ$，所以 $\frac{AM}{FQ}=\frac{AH}{HQ}$，所以 $AM=\frac{AH}{HQ}\times FQ=\frac{4}{6}\times4=\frac{8}{3}$，则 $MB=\frac{4}{3}$，所以 $ME=\sqrt{AE^2+AM^2}=\sqrt{4+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{10}{3}$，$MF=$



$\sqrt{MB^2+BF^2}=\sqrt{4+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$，所以五边形 D_1EMFN 的周长为 $D_1E+EM+MF+FN+ND_1=2\sqrt{5}+\frac{10}{3}+\frac{2\sqrt{13}}{3}+\sqrt{5}+5=\frac{2\sqrt{13}+9\sqrt{5}+25}{3}$. 故选 D.

4. C **【解析】** 根据题意，当正四面体在正方体的内切球内时，正四面体可以在正方体内任意转动，故当该正四面体内接于球时，其棱长最长. 正方体的棱长为 6，则其内切球的半径为 3，如图，记内接于球的正四面体为 P-ABC，设其棱长为 a，O 为底面 ABC 的中心，四面体外接球的球心为 O'，连接 PO，OC，$O'C$，则 O' 在 OP 上，$PO\perp$ 底面 ABC，所以 $CO=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$PO=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$O'P=O'C=3$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OO'C$ 中，$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-3\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=9$，可得 $a=2\sqrt{6}$，故 m 的最大值为 $2\sqrt{6}$. 故选 C.



第 42 讲　平行关系

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 没有公共点　一条直线与此平面内的一条直线　交线平行
2. 相交直线　同一条直线　平行　交线

【对点演练】

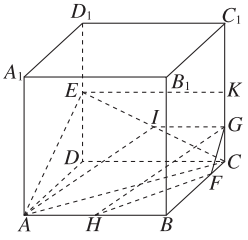
1. 1 **【解析】** 过点 P 与直线 a 作平面 β，设 $\beta\cap\alpha=b$，则 $a/\!/b$，由作图的过程可知满足条件的直线 b 只有 1 条.
2. ④ **【解析】** 因为 $a/\!/$平面 α，所以直线 a 与平面 α 无交点，因此直线 a 和平面 α 内的任意一条直线都不相交.
3. $\frac{5}{2}$ **【解析】** 因为 $\alpha/\!/\beta$，$\triangle PAB$ 所在的平面与 α，β 分别交于 CD，AB，所以 $CD/\!/AB$，所以 $\frac{PC}{PA}=\frac{CD}{AB}$，又因为 $PC=2$，$CA=3$，$CD=1$，所以 $AB=\frac{5}{2}$.
4. ④ **【解析】** 由两个平面平行的判定定理可知，如果一个平面内的两条相交直线分别与另一个平面平行，那么这两个平面平行，故①②不能判断两个平面平行；当平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=$ 直线 l 时，α 内有无数条与交线 l 平行的直线与 β 平行，故③不能判断两个平面平行；根据面面平行的定义可知④能判断两个平面平行. 故填④.
5. ④ **【解析】** 对于①，a 可以在经过 b 的平面内，故①错误；对于②，a 与 α 内的直线平行或异面，故②错误；对于③，两平面也可以相交，故③错误；对于④，若 $a/\!/b$，$a/\!/\alpha$，$b\not\subset\alpha$，则 $b/\!/\alpha$，故④正确. 故填④.

● 课堂考点探究

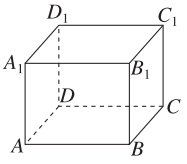
例 1 **【思路点拨】** (1)根据平行的相关定理和结论逐项分析. (2)由题意作出图形，利用线面平行的判定定理可知 $GH/\!/$平面 ACE，又 HF，GF 均不与平面 ACE 平行，即可得解.

(1)D　(2)B **【解析】** (1)对于选项 A，若存在一条直线 a，$a/\!/\alpha$，$a/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$ 或 α 与 β 相交，故 A 错误；对于选项 B，若存在一条直线 a，$a\subset\alpha$，$a/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$ 或 α 与 β 相交，故 B 错误；对于选项 C，若存在两条平行直线 a，b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a/\!/\beta$，$b/\!/\alpha$，则 $\alpha/\!/\beta$ 或 α 与 β 相交，故 C 错误. 故选 D.

(2)如图，取 CE 的中点 I，CC_1 的中点 K，连接 AI，IG，EK，因为 $CI=IE$，$CG=GK$，所以 $IG/\!/EK$，且 $IG=\frac{1}{2}EK$，又 $AB/\!/EK$，$AB=EK$，$AH=\frac{1}{2}AB$，所以 $IG/\!/AH$，且 $IG=AH$，所以四边形 $AHGI$ 为平行四边形，所以 $AI/\!/GH$，又 $GH\not\subset$ 平面 ACE，$AI\subset$ 平面 ACE，所以 $GH/\!/$平面 ACE. 易知 HF，GF 均不与平面 ACE 平行. 故选 B.



变式题 C **【解析】** 由题意，作长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，如图所示，对于 A，当平面 α 为平面 $ABCD$，$m=A_1B_1$，$n=B_1C_1$ 时，显然 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，但 $m\cap n=B_1$，故 A 错误；对于 B，当平面 α 为平面 $ABCD$，平面 β 为平面 A_1ADD_1，$m=B_1C_1$ 时，显然 $m/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，但 $\alpha\cap\beta=AD$，故 B 错误；对于 C，因为 $m/\!/\alpha$，所以存在 $a\subset\alpha$，使得 $m/\!/a$，因为 $m/\!/n$，所以 $a/\!/n$，因为 $a\subset\alpha$，$n\not\subset\alpha$，所以 $n/\!/\alpha$，故 C 正确；对于 D，当平面 α 为平面 $ABCD$，平面 β 为平面 $A_1B_1C_1D_1$，$m=B_1C_1$ 时，显然 $m/\!/\alpha$，$\alpha/\!/\beta$，但 $m\subset\beta$，故 D 错误. 故选 C.



例 2 **【思路点拨】** 利用线面平行的判定定理证明即可.

证明： 如图，连接 B_1C，ME.

因为 M，E 分别为 BB_1，BC 的中点，

所以 $ME/\!/B_1C$，且 $ME=\frac{1}{2}B_1C$.

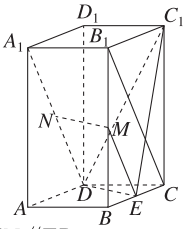
因为 N 为 A_1D 的中点，所以 $ND=\frac{1}{2}A_1D$. 由题设知 $A_1B_1\not\parallel DC$，

可得 $B_1C\not\parallel A_1D$，故 $ME\not\parallel ND$，

所以四边形 $MNDE$ 为平行四边形，所以 $MN/\!/ED$.

又 $MN\not\subset$ 平面 C_1DE，$DE\subset$ 平面 C_1DE，

所以 $MN/\!/$平面 C_1DE.



变式题 **解：** (1)证明：连接 BD，与 AC 交于点 O，连接 OF，因为四边形 $ABCD$ 为正方形，

所以 O 为 BD 的中点，

又 E，F 为 PB 的两个三等分点，

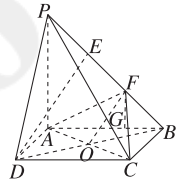
所以 F 为 BE 的中点，所以 $OF/\!/DE$，

因为 $OF\subset$ 平面 ACF，$DE\not\subset$ 平面 ACF，

所以 $DE/\!/$平面 ACF.

(2)$PA=AD=AB=3$，过点 F 作 $FG/\!/PA$，交 AB 于点 G，因为 F 为 PB 的三等分点，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $FG\perp$ 平面 $ABCD$，且 $FG=\frac{1}{3}PA=1$，

所以 $V_{A\text{-}BCF}=V_{F\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot FG=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3^2\times1=\frac{3}{2}$.



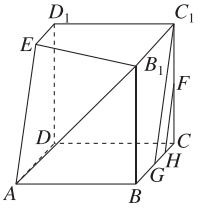
例 3 **【思路点拨】** 取 BC 的中点 G，连接 GC_1，利用线面平行的性质定理和面面平行的性质定理推出 $GC_1/\!/FH$，即可得到点 F 的位置.

解： 设平面 BCC_1B_1 与平面 AEB_1 的交线为 l，因为 $FH/\!/$平面 AEB_1，平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $AEB_1=l$，$FH\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $FH/\!/l$.

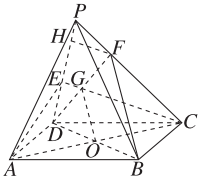
因为平面 $ADD_1E/\!/$平面 BCC_1B_1，平面 $ADD_1E\cap$ 平面 $AEB_1=AE$，平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $AEB_1=l$，

所以 $AE/\!/l$，所以 $AE/\!/FH$.

取 BC 的中点 G，连接 C_1G，易知 $AE/\!/GC_1$，所以 $GC_1/\!/FH$，又 H 为 CG 的中点，所以 F 为 CC_1 的中点.



变式题 1 $\frac{1}{2}$ **【解析】** 连接 BD，与 AC 交于点 O，连接 DF，交 CE 于 G，连接 OG，由于 $BF/\!/$平面 AEC，$BF\subset$ 平面 BDF，平面 $BDF\cap$ 平面 $AEC=OG$，所以 $BF/\!/OG$，由于 O 是 BD 的中点，所以 $\frac{OB}{OD}=\frac{GF}{GD}=1$，过 F 作 $FH/\!/CE$，交 PD 于 H，则 $\frac{ED}{EH}=\frac{DG}{GF}=1$，因为 $\frac{PE}{ED}=\frac{3}{2}$，所以 $\frac{PH}{HE}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{PF}{FC}=\frac{PH}{HE}=\frac{1}{2}$.



变式题 2 **解：** (1)证明：记 AC 与 BD 的交点为 O，连接 OE.

因为 O，M 分别是 AC，EF 的中点，四边形 $ACEF$ 是矩形，

所以四边形 $AOEM$ 是平行四边形，所以 $AM/\!/OE$.

因为 $OE\subset$ 平面 BDE，$AM\not\subset$ 平面 BDE，

所以 $AM/\!/$平面 BDE.

(2)$l/\!/m$，证明如下：由(1)知，$AM/\!/$平面 BDE. 因为 $AM\subset$ 平面 ADM，平面 $ADM\cap$ 平面 $BDE=l$，所以 $l/\!/AM$. 因为 $AM\subset$ 平面 ABM，平面 $ABM\cap$ 平面 $BDE=m$，所以 $m/\!/AM$，所以 $l/\!/m$.

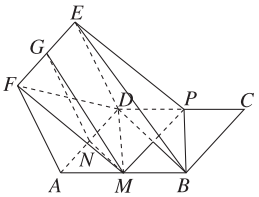
例 4 **【思路点拨】** (1)先由线面平行得到面面平行，再由面面平行推出线面平行即可；(2)由面面平行的判定定理证明.

证明： (1)如图，取 DC 的中点 P，连接 PE，PB，PM.

因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，M 是 AB 的中点，

所以 $DP/\!/MB$ 且 $DP=MB$，所以四边形 $MBPD$ 为平行四边

形，所以 $PB/\!/DM$.



又 $PB\subset$ 平面 BPE，$DM\not\subset$ 平面 BPE，所以 $DM/\!/$ 平面 BPE.

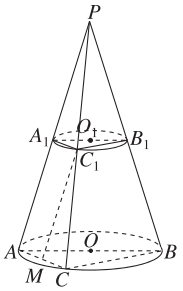
因为 $PM/\!/AD$ 且 $PM=AD$，$AD/\!/FE$ 且 $AD=FE$，所以 $PM/\!/FE$ 且 $PM=FE$，所以四边形 $FEPM$ 为平行四边形，所以 $FM/\!/PE$，又 $FM\not\subset$ 平面 BPE，$PE\subset$ 平面 BPE，所以 $FM/\!/$ 平面 BPE. 因为 $FM\cap DM=M$，FM，$DM\subset$ 平面 DMF，所以平面 $DMF/\!/$ 平面 BPE. 因为 $BE\subset$ 平面 BPE，所以 $BE/\!/$ 平面 DMF.

(2)因为 M，N 分别是 AB，AD 的中点，所以 $MN/\!/BD$，

又 $MN\not\subset$ 平面 BDE，$BD\subset$ 平面 BDE，所以 $MN/\!/$ 平面 BDE.

同理可证 $GN/\!/$ 平面 BDE. 又 $MN\cap GN=N$，MN，$GN\subset$ 平面 MNG，所以平面 $BDE/\!/$ 平面 MNG.

变式题 **证明**：如图，连接 A_1C_1.



因为在圆台 OO_1 中，上、下底面直径分别为 A_1B_1，AB，且 $A_1B_1/\!/AB$，

所以 AA_1，BB_1，C_1C 为圆台母线且延长线交于一点 P，所以 A，A_1，C_1，C 四点共面.

连接 BC，B_1C_1，在圆台 OO_1 中，平面 $ABC/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1$，由平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=AC$，平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=A_1C_1$，得 $A_1C_1/\!/AC$.

因为 $A_1B_1/\!/AB$，$AB=2A_1B_1$，所以 $\dfrac{PA_1}{PA}=\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{PC_1}{PC}=\dfrac{PA_1}{PA}=\dfrac{1}{2}$，

即 C_1 为 PC 的中点.

在$\triangle PAC$ 中，又 M 为 AC 的中点，所以 $C_1M/\!/AA_1$.

因为 $AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，$C_1M\not\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $C_1M/\!/$ 平面 ABB_1A_1.

例 5 **[思路点拨]** (1)由面面平行的判定定理证明；(2)由面面平行的性质定理证明.

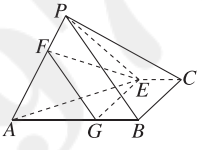
证明：(1)由题知 $BB_1/\!/DD_1$ 且 $BB_1=DD_1$，所以四边形 BB_1D_1D 是平行四边形，所以 $BD/\!/B_1D_1$.

又 $BD\not\subset$ 平面 CD_1B_1，$B_1D_1\subset$ 平面 CD_1B_1，所以 $BD/\!/$ 平面 CD_1B_1. 因为 $A_1D_1/\!/B_1C_1/\!/BC$，且 $A_1D_1=B_1C_1=BC$，

所以四边形 A_1BCD_1 是平行四边形，所以 $A_1B/\!/D_1C$. 又 $A_1B\not\subset$ 平面 CD_1B_1，$D_1C\subset$ 平面 CD_1B_1，所以 $A_1B/\!/$ 平面 CD_1B_1. 因为 $BD\cap A_1B=B$，所以平面 $A_1BD/\!/$ 平面 CD_1B_1.

(2)由(1)知，平面 $A_1BD/\!/$ 平面 CD_1B_1，又平面 $ABCD\cap$ 平面 $B_1D_1C=l$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $A_1BD=BD$，所以直线 $l/\!/$ 直线 BD，又 $B_1D_1/\!/BD$，所以 $B_1D_1/\!/l$.

变式题 **解**：点 F 为线段 AP 上靠近点 P 的三等分点，证明如下：在 AB 上取点 G，使得 $BG=CE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，连接 FG，GE，



因为 $BG/\!/CE$，$BG=CE$，所以四边形 $BGEC$ 为平行四边形，所以 $BC/\!/GE$，

又 $GE\not\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，所以 $GE/\!/$ 平面 PBC.

因为 $EF/\!/$ 平面 PBC，$EF\cap GE=E$，EF，$GE\subset$ 平面 EFG，所以平面 $PBC/\!/$ 平面 EFG，又平面 $EFG\cap$ 平面 $PAB=FG$，平面 $PBC\cap$ 平面 $PAB=PB$，所以 $FG/\!/PB$，所以在$\triangle PAB$ 中，$\dfrac{AF}{FP}=\dfrac{AG}{GB}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$，所以 $FP=\dfrac{1}{3}AP$，

所以点 F 为线段 AP 上靠近点 P 的三等分点.

第 43 讲　垂直关系

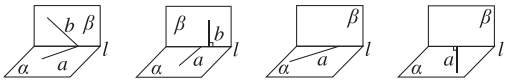
● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)任意一条直线　垂线　垂面　(2)两条相交直线　一条直线　另一条直线　任意一条直线　平面
2. (1)直二面角　(2)直二面角　$\angle AOB=90^\circ$　垂线　二面角的平面角　$\angle AOB=90^\circ$　交线　垂直

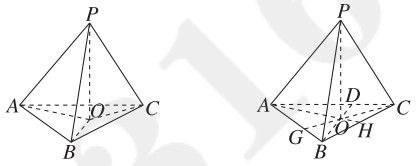
【对点演练】

1. 4　3　**[解析]** 由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，得平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PDB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$. 因为 $AC\perp BD$，$AC\perp PD$，$BD\cap PD=D$，所以 $AC\perp$ 平面 PDB，所以平面 $PAC\perp$ 平面 PDB，故互相垂直的平面有 4 对. 与 AC 垂直的直线有 PD，BD，PB，共 3 条.
2. ②④　**[解析]** 在①中，如图甲，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且 a，b 与 l 都不垂直，则 a，b 不一定垂直，故①错误；在②中，如图乙，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$b\perp l$，则 $b\perp\alpha$，所以 β 内所有与 b 平行的直线都与 a 垂直，故②正确；在③中，如图丙，$a\subset\alpha$，但 a 与 l 不垂直，则 a 与 β 不垂直，故③错误；在④中，如图丁，由两平面垂直的性质定理可知④正确. 故填②④.



3. (1)外　(2)垂　**[解析]** (1)如图①，连接 OA，OB，OC，在 $\mathrm{Rt}\triangle POA$，$\mathrm{Rt}\triangle POB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle POC$ 中，$PA=PB=PC$，所以 $OA=OB=OC$，即 O 为$\triangle ABC$ 的外心.

(2)如图②，延长 AO，BO，CO，分别交 BC，AC，AB 于点 H，D，G. 因为 $PC\perp PA$，$PB\perp PC$，$PA\cap PB=P$，PA，$PB\subset$ 平面 PAB，所以 $PC\perp$ 平面 PAB，又 $AB\subset$ 平面 PAB，所以 $PC\perp AB$，因为 $AB\perp PO$，$PO\cap PC=P$，PO，$PC\subset$ 平面 POC，所以 $AB\perp$ 平面 POC，又 $CG\subset$ 平面 POC，所以 $AB\perp CG$，即 CG 为$\triangle ABC$ 的边 AB 上的高. 同理可得 BD，AH 分别为$\triangle ABC$ 的边 AC，BC 上的高，所以 O 为$\triangle ABC$ 的垂心.



4. 必要不充分　**[解析]** 根据直线与平面垂直的定义，知“直线 a 与平面 α 内的无数条直线都垂直”不能推出“直线 a 与平面 α 垂直”，反之则可以，所以应填必要不充分.
5. ②③　**[解析]** 在①中，若 $\alpha/\!/\beta$，$n\subset\alpha$，$m\subset\beta$，则 m 与 n 平行或异面，故①错误；在②中，若 $m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$，又 $n\perp\alpha$，所以 $n\perp\beta$，故②正确；在③中，若 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，则 $n/\!/\alpha$ 或 $n\subset\alpha$，又 $n\perp\beta$，所以 $\alpha\perp\beta$，故③正确；在④中，若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 m 与 n 平行、相交或异面，故④错误；在⑤中，若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 m，n 平行、相交或异面，所以⑤错误. 故填②③.
6. 5　**[解析]** 由底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形，$PA=a$，$PB=PD=\sqrt{2}a$，得 $PA\perp AB$，$PA\perp AD$，又 $AB\cap AD=A$，所以 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，由 $PA\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAD，可得平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. 又 $AB\perp AD$，$PA\cap AD=A$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD，又 $AB\subset$ 平面 PAB，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PAD. 由 $BC\perp AB$，$BC\perp PA$，$AB\cap PA=A$，得 $BC\perp$ 平面 PAB，又 $BC\subset$ 平面 PBC，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PBC. 由 $CD/\!/AB$，得 $CD\perp$ 平面 PAD，又 $CD\subset$ 平面 PDC，所以平面 $PAD\perp$ 平面 PDC. 故共有 5 对互相垂直的面.
7. 一定　**[解析]** 因为 $PA=PB=PC$，所以点 P 在平面 ABC 内的射影 O 为$\triangle ABC$ 的外心，因为$\angle BAC=90^\circ$，所以 O 为 BC 的中点，所以 PO 在平面 PBC 内，所以平面 $PBC\perp$ 平面 ABC.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)由线面、面面平行的判定定理及线面、面面垂直的性质定理、判定定理逐一判断各选项. (2)利用线面垂直、面面垂直的判定定理和性质定理判断.

(1)D　(2)B　**[解析]** (1)对于 A，由面面平行的判定定理可知，在平面 α 内需要两条相交直线与平面 β 平行才能得出两平面平行，故 A 错误；对于 B，由 $l\subset\beta$，$m/\!/l$ 得 $m/\!/\beta$ 或 $m\subset\beta$，故 B 错误；对于 C，由面面垂直的性质定理可知，当平面 α 内的直线 m 与 α，β 两个平面的交线垂直时，才能得出 $m\perp\beta$，故 C 错误；对于 D，由面面垂直的判定定理可知 D 正确. 故选 D.

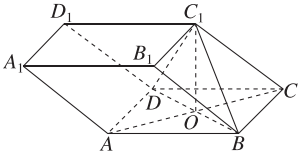
(2)$\because PA\perp$ 平面 ABC，$PA\subset$ 平面 PAC，$\therefore$ 平面 $ABC\perp$ 平面 PAC，故 D 中说法正确. $\because BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore PA\perp BC$，又 $AB\perp BC$，$PA\cap AB=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAB，又 $BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，故 C 中说法正确. $\because AN\subset$ 平面 PAB，$\therefore BC\perp AN$，$\because AN\perp PB$，$BC\cap PB=B$，$\therefore AN\perp$ 平面 PBC，又 $AN\subset$ 平面 ANS，$\therefore$ 平面 $ANS\perp$ 平面 PBC，故 A 中说法正确. 对于 B，假设平面 $ANS\perp$ 平面 PAB，$\because AN\perp$ 平面 PBC，$NS\subset$ 平面 PBC，$\therefore AN\perp NS$，$\because$ 平面 $PAB\perp$ 平面 ANS，平面 $PAB\cap$ 平面 $ANS=AN$，$\therefore NS\perp$ 平面 PAB，$\therefore NS\perp PB$，$\therefore PB\perp$ 平面 ANS，又 $AS\subset$ 平面 ANS，$\therefore PB\perp AS$，$\because AS\perp PC$，$PB\cap PC=P$，$\therefore AS\perp$ 平面 PBC，与 $AN\perp$

平面 PBC 矛盾，故 B 中说法不正确. 故选 B.

变式题 (1)C (2)BC **【解析】** (1)对于选项 A，若 $l/\!/\alpha$，且 $m/\!/\alpha$，则 l，m 可能平行、相交或异面，不一定垂直，故 A 错误；对于选项 B，若 $\alpha\perp\beta$，$m/\!/\alpha$，$n\perp\beta$，则 m，n 可能平行、相交或异面，不一定平行，故 B 错误；对于选项 C，若 $m/\!/l$，且 $m\perp\alpha$，则 $l\perp\alpha$，故 C 正确；对于选项 D，若 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n/\!/\beta$，则 α 与 β 相交或平行，不一定垂直，故 D 错误. 故选 C.

(2)折叠前后得到 $AH\perp HE$，$AH\perp HF$ 不变，又 $EH\cap FH=H$，所以根据线面垂直的判定定理，可得 $AH\perp$ 平面 EFH，故 B 正确；过点 A 只有一条直线与平面 EFH 垂直，且 $AH\perp$ 平面 EFH，点 G 与 H 不重合，故 A 不正确；$AG\perp EF$，$EF\perp HG$，由线面垂直的判定定理可得 $EF\perp$ 平面 AGH，故 C 正确；因为 HG 与 AG 不垂直，所以 HG 与平面 AEF 不垂直，故 D 不正确. 故选 BC.

例 2 **证明：** ∵底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，∴ $CO=\sqrt{2}$，$CD=CB$. 平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$C_1C=A_1A=2$. 在 $\triangle C_1OC$ 中，$\angle C_1CO=45°$，$C_1C=2$，$CO=\sqrt{2}$，由余弦定理得



$$\cos\angle C_1CO=\frac{C_1C^2+CO^2-C_1O^2}{2\cdot C_1C\cdot CO}=\frac{2^2+2-C_1O^2}{2\times2\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$ 解得 $C_1O=\sqrt{2}$，∴ $C_1O^2+CO^2=CC_1^2$，∴ $C_1O\perp CO$. 如图，连接 C_1D，C_1B，在 $\triangle C_1CD$ 与 $\triangle C_1CB$ 中，∵ $CD=CB$，$\angle C_1CD=\angle C_1CB$，$C_1C=C_1C$，∴ $\triangle C_1CD\cong\triangle C_1CB$，∴ $C_1B=C_1D$，即 $\triangle BC_1D$ 为等腰三角形，则 $C_1O\perp BD$. ∵ $CO\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，$CO\cap BD=O$，∴ $C_1O\perp$ 平面 $ABCD$.

变式题 **证明：** (1)因为 $PA=PD$，E 为 AD 的中点，所以 $PE\perp AD$，因为底面 $ABCD$ 为矩形，所以 $BC/\!/AD$. 所以 $PE\perp BC$.

(2)因为底面 $ABCD$ 为矩形，所以 $AB\perp AD$. 又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD. 又 $PD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PD$. 又因为 $PA\perp PD$，且 $PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $PD\perp$ 平面 PAB. 又 $PD\subset$ 平面 PCD，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PCD.

例 3 **【思路点拨】** 由 $\triangle C'CD\backsim\triangle DBE$，证得 $C'D\perp DE$，再根据题意证得 $AD\perp$ 平面 $BCC'B'$，得到 $AD\perp C'D$，进而证得 $C'D\perp$ 平面 ADE，即可证得平面 $AC'D\perp$ 平面 ADE.

证明： 由题意知 $BC=\sqrt{2}AA'$，可得 $\frac{CC'}{CD}=\sqrt{2}$，$\frac{BD}{BE}=\sqrt{2}$，所以 $\triangle C'CD\backsim\triangle DBE$，所以 $\angle CDC'+\angle BDE=90°$，所以 $C'D\perp DE$. 因为 $AB=AC$，D 为 BC 的中点，所以 $AD\perp BC$，因为 $AA'\perp$ 平面 ABC，且 $AD\subset$ 平面 ABC，所以 $AD\perp AA'$，又 $BB'/\!/AA'$，所以 $AD\perp BB'$.

因为 $BC\cap BB'=B$，所以 $AD\perp$ 平面 $BCC'B'$，

又 $C'D\subset$ 平面 $BCC'B'$，所以 $AD\perp C'D$.

因为 $AD\cap DE=D$，AD，$DE\subset$ 平面 ADE，所以 $C'D\perp$ 平面 ADE，又 $C'D\subset$ 平面 $AC'D$，所以平面 $AC'D\perp$ 平面 ADE.

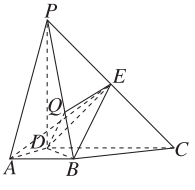
变式题 **证明：** 取 AD 的中点为 O，连接 OM，OB，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $AD=BD=2$，所以 $\triangle ABD$ 为正三角形，所以 $BO\perp AD$，且 $BO=\sqrt{3}$. 因为 $MA=MD=\sqrt{2}$，$AD=2$，所以 $MO\perp AD$，所以 $MO=\sqrt{MA^2-AO^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$，又因为 $MB=2$，所以 $MO^2+BO^2=MB^2$，所以 $MO\perp BO$，因为 $AD\cap BO=O$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，$BO\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $MO\perp$ 平面 $ABCD$，又因为 $MO\subset$ 平面 MAD，所以平面 $MAD\perp$ 平面 $ABCD$.

例 4 **【思路点拨】** (1)由线面平行的性质定理证明；(2)先假设平面 $PDC\perp$ 平面 DEQ，由面面垂直、线面垂直的性质定理得 $PC\perp QE$，最后由三角形相似得到 $\frac{PB}{QB}$ 的值.

解： (1)证明：在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，$AB\not\subset$ 平面 PDC，$DC\subset$ 平面 PDC，∴ $AB/\!/$ 平面 PDC，

又 $AB\subset$ 平面 ABE，平面 $ABE\cap$ 平面 $PDC=l$，∴ $AB/\!/l$.

(2)存在点 Q，使得平面 $PDC\perp$ 平面 DEQ，此时 $\frac{PB}{QB}=3$. 证明如下：



如图，连接 BD，易知 $BD=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{1^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$，

∵ $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

∴ $PD\perp DC$，$PD\perp DB$，

则 $PC=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，

则 $PB^2+BC^2=PC^2$，∴ $PB\perp BC$，∵ $PD=DC$，E 为 PC 的中点，∴ $DE\perp PC$，∵ 平面 $PDC\perp$ 平面 DEQ，平面 $PDC\cap$ 平面 $DEQ=DE$，$PC\subset$ 平面 PDC，$PC\perp DE$，

∴ $PC\perp$ 平面 DEQ，又 $QE\subset$ 平面 DEQ，∴ $PC\perp QE$，

则 $\triangle PQE\backsim\triangle PCB$，则 $\frac{PE}{PB}=\frac{PQ}{PC}$，∴ $PQ=\frac{PE\cdot PC}{PB}=\frac{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，此时 $\frac{PB}{QB}=\frac{PB}{PB-PQ}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\frac{2\sqrt{6}}{3}}=3$.

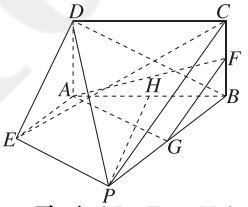
故存在点 Q，使得平面 $PDC\perp$ 平面 DEQ，此时 $\frac{PB}{QB}=3$.

变式题 **解：** (1)证明：∵ G 是 BP 的中点，∴ $PG=\frac{1}{2}BP=1$，

又 $AE=1$，∴ $AE=PG$. 又 $AE/\!/PG$，$AE\perp EP$，∴ 四边形 $AEPG$ 是矩形，∴ $AG/\!/EP$. ∵ $AG\not\subset$ 平面 α，$PE\subset$ 平面 α，∴ $AG/\!/$ 平面 α. ∵ F，G 分别是 BC，BP 的中点，∴ FG 是 $\triangle BCP$ 的中位线，∴ $FG/\!/PC$.

∵ $FG\not\subset$ 平面 α，$PC\subset$ 平面 α，∴ $FG/\!/$ 平面 α. ∵ $AG\cap FG=G$，且 AG，$FG\subset$ 平面 AFG，∴ 平面 $AFG/\!/$ 平面 α.

(2)由题意得 $AD\perp$ 平面 $ABPE$，



∴ $V_{四棱锥D\text{-}ABPE}=\frac{1}{3}S_{梯形ABPE}\cdot AD=\frac{1}{3}\times\frac{1+2}{2}\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

如图，过点 P 作 $PH\perp AB$，垂足为 H，∵ 平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABPE$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABPE=AB$，$PH\subset$ 平面 $ABPE$，$PH\perp AB$，∴ $PH\perp$ 平面 $ABCD$，即 PH 是三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的高.

∵ $AG=EP=\sqrt{3}$，$PG=AE=BG=1$，

∴ $AB=\sqrt{AG^2+BG^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

∴ $CD=AB=2$，$\sin\angle ABG=\frac{AG}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $PH=BP\cdot\sin\angle ABG=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，∴ $V_{三棱锥P\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times PH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ 四棱锥 $D\text{-}ABPE$ 与三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的体积之比为 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{2}$.

第 44 讲　空间向量的概念与运算

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 平行或重合　同一平面
2. (1)$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$　(3)$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$
3. (2)$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}$
4. $(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$　$(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$
   $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$　$a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3$
   $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
   $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

【对点演练】

1. 1 **【解析】** ∵ $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面，∴ ①②④不正确.
2. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ **【解析】** $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.
3. 10 **【解析】** ∵ $l_1\perp l_2$，∴ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6-4+m=0$，解得 $m=10$.
4. ④ **【解析】** 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的直线可能平行也可能重合，故①为假命题；三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中任意两个一定共面，但它们三个却不一定共面，故②为假命题；只有当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面时，空间任意一个向量 $\boldsymbol{p}$ 才一定能表示为 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+$

$y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，故③为假命题；根据向量的运算法则可知④为真命题. 故填④.

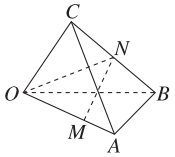
5. 17 或 -1 **【解析】** $\because \boldsymbol{a}=(-1,\lambda,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1,1)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，$\therefore \cos 120°=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-2-\lambda-2}{\sqrt{5+\lambda^2}\cdot\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{2}$，解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=17$.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】** 根据空间向量的线性运算，利用三角形法则和平行四边形法则表示即可.

ABC **【解析】** 对于 A，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，故 A 正确；对于 B，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD_1})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，故 B 正确；对于 C，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{AD_1})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，故 C 正确；对于 D，$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1})=\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1})=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{1}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{5}\boldsymbol{b}+\dfrac{4}{5}\boldsymbol{c}$，故 D 错误. 故选 ABC.

变式题 D **【解析】** 连接 ON，如图，则 $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$，故选 D.



例 2 **【思路点拨】** (1)利用共面向量定理即可得出结论. (2)利用共线向量的性质即可得出结论.

(1)D (2)$\dfrac{2}{5}$ **【解析】** (1)由题可知 O,A,B,C 四点不共面，所以由 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 共面，得 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\lambda=1$，解得 $\lambda=\dfrac{7}{12}$. 故选 D.

(2)$\because \overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=5\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，又 $\because A,C,D$ 三点共线，$\therefore \overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{CD}$，$\because \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，$\therefore \overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{CD}$，$\therefore 2-5k=0$，$\therefore k=\dfrac{2}{5}$.

变式题 **解：** 因为 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC_1}$，$\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}=k(\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{B_1C_1})+\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}-k(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB})=(1-k)\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AA_1}$，所以向量 $\overrightarrow{MN}$ 与向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA_1}$ 共面.

例 3 **【思路点拨】** (1)根据 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$，结合空间向量数量积的运算法则进行计算即可得到结果. (2)将 $\overrightarrow{AM}$ 用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 表示，$\overrightarrow{CN}$ 用 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}$ 表示，再利用向量法求解即可.

(1)B (2)A **【解析】** (1)因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=16+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$. 又 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，所以 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2=\overrightarrow{AD}^2$，即 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}^2$，即 $3^2+4^2+5^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=6^2$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=-7$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=9$. 故选 B.

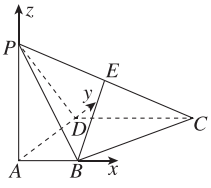
(2)在正四面体 $ABCD$ 中，$\angle BAC=\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{\pi}{3}$. 因为 M,N 分别为 BC,AD 的中点，所以 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$，且 $AM=CN=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}^2\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-1\right)=-\dfrac{1}{2}$，所以 $|\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CN}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{CN}|}=\dfrac{2}{3}$，即直线 AM 和直线 CN 的夹角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$. 故选 A.

变式题 **解：** (1)证明：设 $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{c}$，由已知条件，得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=60°$，$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=60°$. 因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，所以 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA_1}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|^2+0+|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos 60°-0-|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos 60°=2^2+2\times3\times\dfrac{1}{2}-2^2-2\times3\times\dfrac{1}{2}=0$，所以 $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{CA_1}$，即 $BD\perp CA_1$.

(2)由(1)得 $\overrightarrow{CA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，则 $|\overrightarrow{CA_1}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\times0+2|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos 60°+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos 60°=2^2+2^2+3^2+0+2\times2\times3\times\dfrac{1}{2}+2\times2\times3\times\dfrac{1}{2}=29$，所以 $|\overrightarrow{CA_1}|=\sqrt{29}$，即线段 CA_1 的长为 $\sqrt{29}$.

例 4 **【思路点拨】** (1)只需要证明向量 $\overrightarrow{BE}$ 与向量 $\overrightarrow{DC}$ 的数量积为 0 即可；(2)证明 BE 与平面 PAD 的法向量垂直即可；(3)证明两个平面的法向量垂直即可.

证明： 以点 A 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，可得 $B(1,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$.



由 E 为棱 PC 的中点，得 $E(1,1,1)$.

(1)因为 $\overrightarrow{BE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$，所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，所以 $BE\perp DC$.

(2)因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AB\perp PA$，又 $AB\perp AD$，$PA\cap AD=A$，PA，$AD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp$ 平面 PAD，所以 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ 为平面 PAD 的一个法向量.

因为 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}=(0,1,1)\cdot(1,0,0)=0$，所以 $BE\perp AB$，又 $BE\not\subset$ 平面 PAD，所以 $BE\parallel$ 平面 PAD.

(3)由(2)知平面 PAD 的一个法向量为 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$.

$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2y-2z=0,\\ 2x=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$.

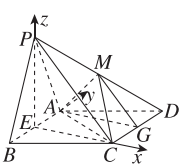
因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(0,1,1)\cdot(1,0,0)=0$，所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，所以平面 $PCD\perp$ 平面 PAD.

变式题 **解：** (1)证明：连接 BD，交 AC 于 N 点，连接 MN，因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以点 N 为 BD 的中点.

又因为 M 为 PD 的中点，所以 $MN\parallel BP$.

因为 $BP\not\subset$ 平面 ACM，$MN\subset$ 平面 ACM，所以 $BP\parallel$ 平面 ACM.

(2)方法一：设底面边长为 2，连接 EC，由于四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle ABC=60°$，所以 $BE=1$，$BC=2$，$EC=\sqrt{BE^2+BC^2-2BE\cdot BC\cdot\cos 60°}=\sqrt{3}$，所以 $BC^2=BE^2+EC^2$，即 $EC\perp AB$.



连接 PE，因为三角形 PAB 为正三角形，E 为 AB 的中点，所以 $PE\perp AB$，又侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PE\subset$ 平面 PAB，所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$.

如图，以 E 为原点，$\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EP}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，则 $A(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$P(0,$

$0,\sqrt{3}),D(\sqrt{3},2,0),M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 假设存在点 G 满足题意，设 $\frac{CG}{CD}=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CD}=(0,2\lambda,0)$，

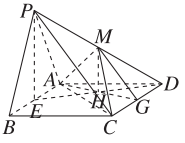
则 $G(\sqrt{3},2\lambda,0)$，$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AG}=(\sqrt{3},2\lambda-1,0)$.

设平面 GAM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0,\end{cases}$ 得到 $\begin{cases}x+z=0,\\ \sqrt{3}x+(2\lambda-1)y=0,\end{cases}$ 取 $y=1$，得 $x=\frac{1-2\lambda}{\sqrt{3}}$，$z=\frac{2\lambda-1}{\sqrt{3}}$，所以 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1-2\lambda}{\sqrt{3}},1,\frac{2\lambda-1}{\sqrt{3}}\right)$.

易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$.

由题可知 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=0$，即 $\left|\frac{2\lambda-1}{\sqrt{3}}\right|=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，满足题意. 故在棱 CD 上存在点 G，使得平面 $GAM\perp$ 平面 $ABCD$，此时 $\frac{CG}{CD}=\frac{1}{2}$.

方法二：连接 PE，因为 $\triangle PAB$ 为正三角形，E 是 AB 的中点，所以 $PE\perp AB$，



又侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PE\subset$ 平面 PAB，所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$.

连接 DE，取 DE 的中点 H，连接 MH，如图，则 MH 是 $\triangle PDE$ 的中位线，所以 $MH/\!/PE$，

又 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $MH\perp$ 平面 $ABCD$. 连接 AH 并延长，交 CD 于 G，连接 MG，则平面 $AMG\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AE/\!/GD$，所以 $\angle HAE=\angle HGD$，$\angle HEA=\angle HDG$，

又因为 $EH=HD$，所以 $\triangle AEH\cong\triangle GDH$，

则 $AE=GD=\frac{1}{2}CD$，故在棱 CD 上存在点 G，使得平面 $GAM\perp$ 平面 $ABCD$，此时 $\frac{CG}{CD}=\frac{1}{2}$.

第 45 讲　空间角

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)不大于 $90°$　(2)$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$　2. (2)$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

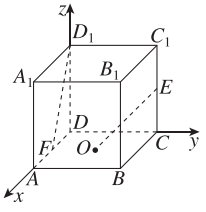
3. (1)垂直于棱

【对点演练】

1. $\frac{2\sqrt{30}}{15}$　**【解析】** 设直线 a 与平面 α 的夹角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

2. $45°$　**【解析】** $\because\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=45°$，故这两个平面的夹角为 $45°$.

3. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　**【解析】** 以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $O(1,1,0)$，$E(0,2,1)$，$F(1,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，

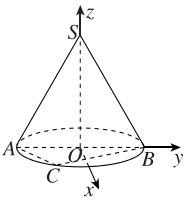


$\therefore\overrightarrow{FD_1}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{OE}=(-1,1,1)$，

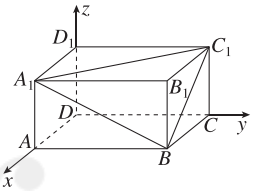
$\therefore\cos\langle\overrightarrow{FD_1},\overrightarrow{OE}\rangle=\frac{\overrightarrow{FD_1}\cdot\overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{FD_1}||\overrightarrow{OE}|}=\frac{1+0+2}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，故异面直线 OE 与 FD_1 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

4. $30°$　**【解析】** 设 l 与 α 的夹角为 θ，$\because\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=-\frac{1}{2}$，$\therefore\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{1}{2}$，又 $0°\leqslant\theta\leqslant90°$，$\therefore\theta=30°$.

5. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　**【解析】** 以 O 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$S(0,0,\sqrt{3})$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，所以 $\overrightarrow{AS}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AS}||\overrightarrow{BC}|}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，则 SA 与 BC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



6. $\frac{1}{3}$　$\frac{2}{3}$　**【解析】** 以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D_1(0,0,1)$，$C_1(0,2,1)$，$A_1(1,0,1)$，$B(1,2,0)$，$\therefore\overrightarrow{D_1C_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-1)$. 设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+2y=0,\\ 2y-z=0,\end{cases}$

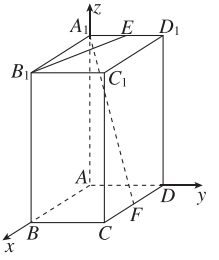


令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$. 设 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 的夹角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{D_1C_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{D_1C_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{D_1C_1}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{2\times3}=\frac{1}{3}$，即 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 夹角的正弦值为 $\frac{1}{3}$. 易知平面 $A_1C_1D_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，$\because\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{1\times3}=\frac{2}{3}$，$\therefore$ 平面 BA_1C_1 与平面 $A_1C_1D_1$ 的夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

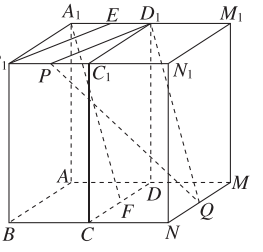
● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】** (1)思路一：在长方体中建立空间直角坐标系，利用向量法求异面直线的夹角；思路二：在长方体中，通过补充新的长方体，结合平行关系，将异面直线转化在同一平面中，利用解三角形求异面直线的夹角. (2)思路一：连接 PC，BC，由 O 是 AB 的中点，M 为 AC 的中点，得出 $OM/\!/BC$，所以 $\angle PBC$(或其补角)即为异面直线 OM 与 PB 的夹角，由 $\angle BOC=\frac{\pi}{2}$，求得 $BC=2\sqrt{2}$，则 $\triangle PBC$ 为等边三角形，即 $\angle PBC=\frac{\pi}{3}$，即可得出结果；思路二：以 O 为坐标原点，以 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，求得 $\overrightarrow{PB}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{OM}=(1,-1,0)$，进而可得 $\overrightarrow{PB}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 的夹角，即可求得异面直线 OM 与 PB 的夹角.

(1)A　**【解析】** 方法一：以 A 为坐标原点，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,4)$，$F(2,2,0)$，$B_1(4,0,4)$，$E(0,1,4)$，所以 $\overrightarrow{A_1F}=(2,2,-4)$，$\overrightarrow{B_1E}=(-4,1,0)$. 设异面直线 A_1F 与 B_1E 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{B_1E}}{|\overrightarrow{A_1F}||\overrightarrow{B_1E}|}\right|=\left|\frac{-6}{2\sqrt{6}\times\sqrt{17}}\right|=\frac{\sqrt{102}}{34}$. 故选 A.

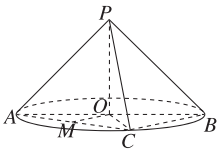


方法二：补充长方体 $CDMN$-$C_1D_1M_1N_1$，如图所示，其中 $C_1N_1=B_1C_1$，取 P 为 B_1C_1 的中点，Q 为 MN 的中点，连接 D_1Q，D_1P，PQ，则 $\angle PD_1Q$(或其补角)即为异面直线 A_1F 与 B_1E 的夹角. 由题知 $D_1P=B_1E=\sqrt{17}$，$D_1Q=A_1F=2\sqrt{6}$，$PQ=\sqrt{29}$，所



以 $\cos\angle PD_1Q=\dfrac{D_1P^2+D_1Q^2-PQ^2}{2\cdot D_1P\cdot D_1Q}=\dfrac{\sqrt{102}}{34}$. 故选 A.

(2)**解**：方法一：连接 PC，BC，如图所示，由题知 O 是 AB 的中点，M 为 AC 的中点，所以 $OM/\!/BC$，

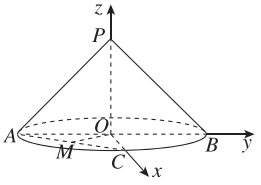


所以 $\angle PBC$（或其补角）即为异面直线 OM 与 PB 的夹角. 因为 $\angle BOC=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=2\sqrt{2}$，

所以 $\triangle PBC$ 为等边三角形，所以 $\angle PBC=\dfrac{\pi}{3}$，

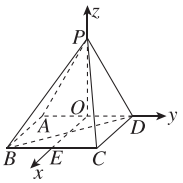
所以异面直线 OM 与 PB 的夹角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$.

方法二：易知 OC，OB，OP 两两垂直，以 O 为坐标原点，

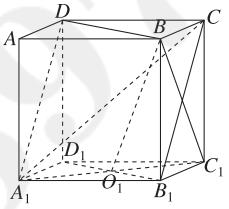


建立如图所示的空间直角坐标系，则 $O(0,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$C(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$P(0,0,2)$. 因为 M 为 AC 的中点，所以 $M(1,-1,0)$，所以 $\overrightarrow{PB}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{OM}=(1,-1,0)$. 设异面直线 OM 与 PB 的夹角为 $\theta\left(0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，向量 $\overrightarrow{PB}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 的夹角为 φ，则 $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{OM}|}=\dfrac{-2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\cos\theta=|\cos\varphi|=\dfrac{1}{2}$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$. 故异面直线 OM 与 PB 的夹角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$.

变式题 1 A **【解析】** 取 AD 的中点 O，BC 的中点 E，连接 PO，OE，因为 $\triangle PAD$ 是正三角形，所以 $PO\perp AD$，又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\subset$ 平面 PAD，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $OE\perp AD$. 如图，以 O 为原点，建立空间直角坐标系，则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$C(2,1,0)$，$D(0,1,0)$，$B(2,-1,0)$，所以 $\overrightarrow{PC}=(2,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DB}=(2,-2,0)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{DB}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{DB}|}=\dfrac{1}{4}$，所以 PC 与 BD 夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$. 故选 A.



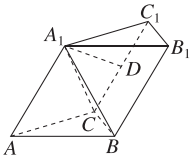
变式题 2 ABD **【解析】** 如图，易证 $BC_1\perp$ 平面 B_1CDA_1，所以 $BC_1\perp DA_1$，$BC_1\perp CA_1$，故 A 选项正确，B 选项正确；连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 O_1，连接 BO_1，则 $C_1O_1\perp$ 平面 BB_1D_1D，所以 $\angle C_1BO_1$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角，在 $\mathrm{Rt}\triangle BO_1C_1$ 中，因为 $O_1C_1=\dfrac{1}{2}BC_1$，所以 $\angle C_1BO_1=30°$，故 C 选项错误；因为 $CC_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle C_1BC=45°$ 即为直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，故 D 选项正确. 故选 ABD.



例 2 **【思路点拨】** (1)根据勾股定理逆定理可知 $BC\perp A_1C$，然后利用线面垂直的判定定理即可证明结论.

(2)思路一：通过作辅助线，找到直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 的夹角，然后根据解三角形的相关知识等进行求解即可；思路二：通过建系，利用向量法求得平面 ABB_1A_1 的法向量及直线 A_1D 的方向向量，然后按公式计算即可.

解：(1)证明：如图，连接 A_1B，



因为 $AB=AA_1=4$，$\angle A_1AB=60°$，所以 $\triangle ABA_1$ 为等边三角形，所以 $A_1B=4$，

又因为 $A_1C=2\sqrt{3}$，$BC=2$，

所以 $A_1B^2=A_1C^2+BC^2$，

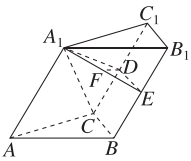
所以 $BC\perp A_1C$.

又 $BC\perp AC$，$AC\cap A_1C=C$，AC，$A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

(2)方法一：如图，设 E 为 BB_1 的中点，连接 A_1E，DE，作 $DF\perp A_1E$ 于点 F.

因为 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，$DE/\!/BC$，所以 $DE\perp$ 平面 ACC_1A_1，



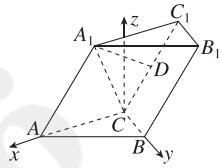
又 $CC_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $DE\perp CC_1$.

在 $\triangle A_1CC_1$ 中，$A_1C=A_1C_1$，D 为 CC_1 的中点，所以 $A_1D\perp CC_1$，又 $A_1D\cap DE=D$，所以 $CC_1\perp$ 平面 A_1DE.

因为 $BB_1/\!/CC_1$，所以 $BB_1\perp$ 平面 A_1DE，又 $DF\subset$ 平面 A_1DE，所以 $BB_1\perp DF$，又因为 $DF\perp A_1E$，$BB_1\cap A_1E=E$，BB_1，$A_1E\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $DF\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 的夹角为 $\angle DA_1E$. 在 $\triangle DA_1E$ 中，$A_1D\perp DE$，$A_1D=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$，$DE=BC=2$，所以 $A_1E=\sqrt{A_1D^2+DE^2}=2\sqrt{3}$，所以 $\sin\angle DA_1E=\dfrac{DE}{A_1E}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 夹角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

方法二：如图，以 C 为坐标原点，以 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$ 的方向分别为 x，y 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $Cxyz$，



则 $C(0,0,0)$，$A(2\sqrt{3},0,0)$，$B(0,2,0)$，$A_1\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$，$C_1\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$，$D\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，所以 $\overrightarrow{A_1D}=\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},0,-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$.

设平面 ABB_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

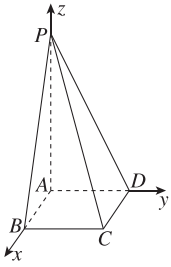
由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0,\\ x-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},\sqrt{6},1)$.

设直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 的夹角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1D},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{A_1D}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{A_1D}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 夹角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

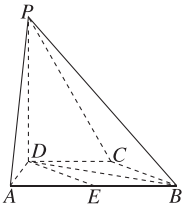
变式题 1 B **【解析】** 如图所示，以 A 为原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，则 $B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,2)$，所以 $\overrightarrow{PD}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0,-2)$. 设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}=y-2z=0,\\ \overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}=x=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$. 设直线 PB 与平面 PCD 的夹角为 θ，



则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{-2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}\right|=\dfrac{2}{5}$.

故选 B.

变式题 2 **解**：(1)证明：$\because PD\perp$ 底面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PD\perp BD$. 如图，取 AB 的中点 E，连接 DE，可知 $CD=\dfrac{1}{2}AB=BE$，又 $CD/\!/AB$，$\therefore CD/\!/BE$，$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形，$\therefore DE=CB=1$，则 $DE=\dfrac{1}{2}AB$，



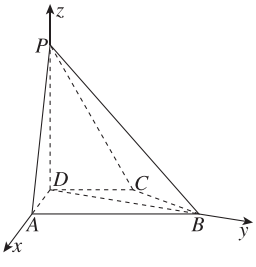
$\therefore\triangle ABD$ 为直角三角形，AB 为斜边，$\therefore BD\perp AD$.

又 $PD\cap AD=D$，$\therefore BD\perp$ 平面 PAD，

又 $PA\subset$ 平面 PAD，$\therefore BD\perp PA$.

(2)由(1)知，PD，AD，BD 两两垂直，$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{3}$.

以 D 为坐标原点，DA，DB，DP 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$\therefore\overrightarrow{PD}=(0,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PA}=(1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$. 设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=$



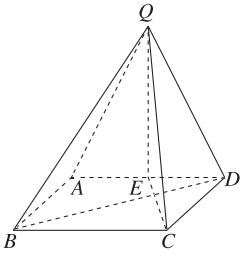
(x,y,z)，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x-\sqrt{3}z=0,\\ -x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$取$y=1$，则$x=\sqrt{3}$，$z=1$，

$\therefore\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$. 设$PD$与平面$PAB$所成的角为$\theta$，则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PD},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PD}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore PD$与平面$PAB$夹角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

例3 **【思路点拨】**(1)取AD的中点E，连接QE，CE，可证$QE\perp$平面$ABCD$，从而得到平面$QAD\perp$平面$ABCD$. (2)思路一：取BC的中点F，连接EF，建立合适的空间直角坐标系，分别求出平面BQD、平面QDA的一个法向量后可求平面BQD与平面QDA夹角的余弦值；思路二：过A作$AM\perp QD$于点M，连接BM，$\angle AMB$即为二面角B-QD-A的平面角，根据已知数据求出$\cos\angle AMB$即可.

解：(1)证明：如图，取AD的中点E，连接QE，CE，



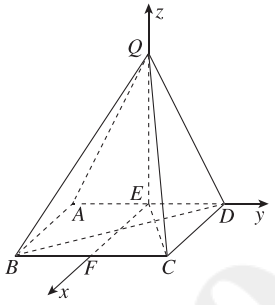
$\because QD=QA=\sqrt{5}$，$\therefore QE\perp AD$.

$\because AD=2$，$\therefore DE=1$，$\therefore QE=\sqrt{QD^2-DE^2}=\sqrt{5-1}=2$，$CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore QE^2+CE^2=9=QC^2$，$\therefore\angle QEC=90°$，即$QE\perp CE$.

$\because AD\cap CE=E$，$\therefore QE\perp$平面$ABCD$，又$\because QE\subset$平面QAD，$\therefore$平面$QAD\perp$平面$ABCD$.

(2)方法一：取BC的中点F，连接EF，则EF，ED，EQ两两垂直，分别以EF，ED，EQ所在的直线为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系，如图所示，则$B(2,-1,0)$，$Q(0,0,2)$，$D(0,1,0)$，$\therefore\overrightarrow{BQ}=(-2,1,2)$，$\overrightarrow{QD}=(0,1,-2)$.



设平面BQD的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x_0,y_0,z_0)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{QD}=0,\end{cases}$

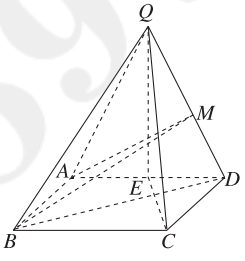
即$\begin{cases}-2x_0+y_0+2z_0=0,\\ y_0-2z_0=0,\end{cases}$令$z_0=1$，则$\boldsymbol{n}_1=(2,2,1)$.

易知平面QDA的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$.

设平面BQD与平面QDA的夹角为θ，$\therefore\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{2}{3}$.

方法二：由(1)知平面$QAD\perp$平面$ABCD$，又$\because BA\perp AD$，$BA\subset$平面$ABCD$，平面$ABCD\cap$平面$QAD=AD$，$\therefore BA\perp$平面QAD.

过A作$AM\perp QD$于点M，连接BM，如图，则$\angle AMB$即为二面角B-QD-A的平面角.



由$S_{\triangle QAD}=\dfrac{1}{2}\times2\times2=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}AM$，得$AM=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$，$\therefore BM=\sqrt{4+\dfrac{16}{5}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$，$\therefore\cos\angle AMB=\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{6}{\sqrt{5}}}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore$平面$BQD$与平面$QDA$夹角的余弦值为$\dfrac{2}{3}$.

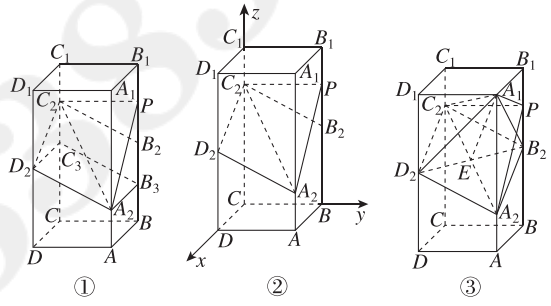
变式题 **解**：(1)证明：方法一：如图①，作$A_2B_3\parallel AB$交BB_1于B_3，$D_2C_3\parallel DC$交CC_1于C_3，连接B_3C_3，易知$A_2B_3\parallel D_2C_3$，且$A_2B_3=D_2C_3$，所以四边形$A_2B_3C_3D_2$是平行四边形，所以$A_2D_2\parallel B_3C_3$. 因为$B_2B_3\parallel C_2C_3$，$B_2B_3=C_2C_3$，所以四边形$B_2B_3C_3C_2$是平行四边形，所以$B_3C_3\parallel B_2C_2$，所以$B_2C_2\parallel A_2D_2$.

方法二：因为$\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{B_2B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{DD_2}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A_2A}=\overrightarrow{A_2D_2}$，$B_2$，$C_2$，$A_2$，$D_2$四点不共线，所以$B_2C_2\parallel A_2D_2$.

(2)方法一：如图②，以C为原点，以CD，CB，CC_1所在直线分别为x，y，z轴，建立空间直角坐标系，则$A_2(2,2,1)$，$C_2(0,0,3)$，$D_2(2,0,2)$，设$P(0,2,t)(0\leqslant t\leqslant4)$，则$\overrightarrow{A_2C_2}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{A_2P}=(-2,0,t-1)$.

设$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$分别为平面$A_2C_2D_2$，$A_2C_2P$的法向量，则$\begin{cases}-2x_1-2y_1+2z_1=0,\\ -2y_1+z_1=0,\end{cases}$取$x_1=1$，得$\boldsymbol{n}_1=(1,1,2)$，同理$\boldsymbol{n}_2=(t-1,3-t,2)$. 由题得$|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\left|\dfrac{(t-1)+(3-t)+4}{\sqrt{6}\times\sqrt{(t-1)^2+(3-t)^2+4}}\right|$，整理得$t^2-4t+3=0$，解得$t=1$或$t=3$，则$B_2P=|2-t|=1$.

方法二：如图③，连接A_2B_2，易证四边形$A_2B_2C_2D_2$为菱形，连接B_2D_2，设A_2C_2与B_2D_2相交于点E. 因为二面角P-A_2C_2-D_2为150°，所以直线B_2E与平面PA_2C_2所成的角为30°，易知$B_2E=\sqrt{2}$，所以点B_2到平面PA_2C_2的距离$d_1=B_2E\sin30°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 连接$A_1B_2$，$A_1D_2$，$A_1E$，$A_1C_2$，$A_1P$，由$A_1B_2=A_1D_2=2\sqrt{2}$，得$A_1E\perp B_2D_2$，由$A_1C_2=A_1A_2=3$，得$A_1E\perp A_2C_2$，又$A_2C_2\cap B_2D_2=E$，所以$A_1E\perp$平面$A_2B_2C_2$. 因为二面角$P$-$A_2C_2$-$D_2$为150°，所以$A_1E$与平面$PA_2C_2$所成的角为60°，易知$A_1E=\sqrt{6}$，所以点$A_1$到平面$PA_2C_2$的距离$d_2=A_1E\sin60°=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. 所以$\dfrac{V_{A_1\text{-}PA_2C_2}}{V_{B_2\text{-}PA_2C_2}}=\dfrac{d_2}{d_1}=3$. 又$C_2$到平面$PA_1A_2$和平面$PA_2B_2$的距离都为2(平面$PA_1A_2$和平面$PA_2B_2$为同一个平面)，所以$\dfrac{S_{\triangle PA_1A_2}}{S_{\triangle PA_2B_2}}=3$，所以$A_1A_2=3B_2P=3$，解得$B_2P=1$.



第46讲　空间距离及立体几何中的探索性问题

● 课前基础巩固

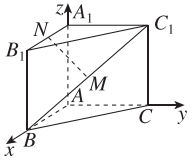
【知识聚焦】

1. $\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AQ}|^2}$　$\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}$

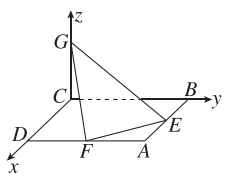
2. $\left|\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|$　$\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$

【对点演练】

1. $2\sqrt{2}$　**【解析】**建立空间直角坐标系如图所示，则$M(2,2,2)$，$N(2,0,4)$，所以$MN=\sqrt{(2-2)^2+(2-0)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$.

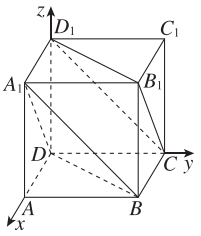


2. $\dfrac{6\sqrt{11}}{11}$　**【解析】**建立如图所示的空间直角坐标系，则$C(0,0,0)$，$E(2,4,0)$，$F(4,2,0)$，$G(0,0,2)$，所以$\overrightarrow{CG}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{EG}=(-2,-4,2)$，$\overrightarrow{EF}=(2,-2,0)$. 设平面$GEF$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x-4y+2z=0,\\ 2x-2y=0,\end{cases}$令$x=1$，得$\boldsymbol{n}=(1,1,3)$，所以点$C$到平面$GEF$的距离$d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CG}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{6\sqrt{11}}{11}$.



1593938016

3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **【解析】** 以点 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$B(1,1,0)$，$D_1(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{A_1D_1}=(-1,0,0)$. 设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-z=0,\\ -x-z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$，所以点 D_1 到平面 A_1BD 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{A_1D_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 易证平面 A_1BD // 平面 B_1CD_1，所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 之间的距离等于点 D_1 到平面 A_1BD 的距离，所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 之间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



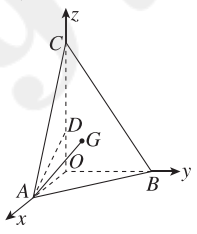
4. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **【解析】** 以点 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $A_1(2,0,2)$，$O(2,1,1)$，$E(1,2,0)$，所以 $\overrightarrow{A_1O}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1E}=(-1,2,-2)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{A_1O},\overrightarrow{A_1E}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1E}}{|\overrightarrow{A_1O}||\overrightarrow{A_1E}|}=\frac{2+2}{\sqrt{2}\times3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 因为 $\langle\overrightarrow{A_1O},\overrightarrow{A_1E}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\sin\langle\overrightarrow{A_1O},\overrightarrow{A_1E}\rangle=\frac{1}{3}$，所以点 O 到直线 A_1E 的距离为 $|\overrightarrow{A_1O}|\sin\langle\overrightarrow{A_1O},\overrightarrow{A_1E}\rangle=\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

5. -1 或 -11 **【解析】** 由题可知 $\overrightarrow{PA}=(x+2,2,-4)$，$\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{10}{3}$，则 $\frac{|-2(x+2)-4-4|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{10}{3}$，解得 $x=-1$ 或 $x=-11$.

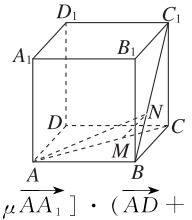
● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】** (1)建立空间直角坐标系，利用投影向量及勾股定理求解点到直线的距离. (2)思路一：在直线 AC 上任取一点 M，作 $MN\perp BC_1$ 于点 N，设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BN}=\mu\overrightarrow{BC_1}$，根据 $MN\perp BC_1$ 得出 λ 和 μ 的关系，从而可得 $|\overrightarrow{MN}|$ 关于 μ(或 λ)的函数关系，再求出此函数的最小值即可；思路二：用几何法求出异面直线 AC 与 BC_1 的公垂线段的长；思路三：建系，用向量法求异面直线 AC 与 BC_1 之间的距离.

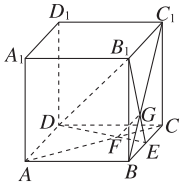
(1)A (2)B **【解析】** (1)四面体 $OABC$ 满足 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=90^\circ$，即 OA，OB，OC 两两垂直，以点 O 为原点，以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，如图. 因为 $OA=1$，$OB=2$，$OC=3$，$OC=3OD$，所以 $A(1,0,0)$，$D(0,0,1)$，$G\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$，所以 $\overrightarrow{AG}=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\right)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,0,1)$，则 $|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{17}}{3}$，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\times(-1)+1=\frac{5}{3}$，所以点 G 到直线 AD 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{17}{9}-\left(\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.



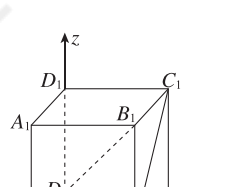
(2)方法一：设 M 为直线 AC 上任意一点，过 M 作 $MN\perp BC_1$，垂足为 N，连接 AN，如图，设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BN}=\mu\overrightarrow{BC_1}=\mu\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AA_1}$，则 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{AM}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+(\mu-\lambda)\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AA_1}$. $\because MN\perp BC_1$，$\therefore\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，即 $[(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+(\mu-\lambda)\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AA_1}]\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=0$，$\because AB\perp AD$，$AB\perp AA_1$，$AD\perp AA_1$，$\therefore(\mu-\lambda)\overrightarrow{AD}^2+\mu\overrightarrow{AA_1}^2=0$，即 $\mu-\lambda+\mu=0$，$\therefore\lambda=2\mu$，$\therefore\overrightarrow{MN}=(1-2\mu)\overrightarrow{AB}-\mu\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AA_1}$，$\therefore|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(1-2\mu)^2+\mu^2+\mu^2}=\sqrt{6\mu^2-4\mu+1}=\sqrt{6\left(\mu-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}}$，$\because\mu\in\mathbf{R}$，$\therefore$ 当 $\mu=\frac{1}{3}$ 时，$|\overrightarrow{MN}|$ 取得最小值 $\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故异面直线 AC 与 BC_1 之间的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.



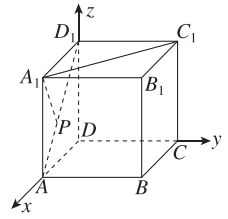
方法二：如图，取 BC 的中点 E，连接 B_1E，DE，设 B_1E 交 BC_1 于点 G，DE 交 AC 于点 F，则 $\frac{B_1G}{GE}=\frac{B_1C_1}{BE}=2$，$\frac{DF}{FE}=\frac{DA}{EC}=2$. 连接 B_1D，FG，在 $\triangle B_1DE$ 中，$\frac{B_1G}{GE}=\frac{DF}{FE}=2$，$\therefore FG\,//\,DB_1$，$FG=\frac{1}{3}DB_1$. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，易证 $B_1D\perp AC$，$B_1D\perp BC_1$，$\therefore FG\perp AC$，$FG\perp BC_1$，$\therefore FG$ 为异面直线 AC 与 BC_1 的公垂线段. $\because B_1D=\sqrt{3}$，$\therefore FG=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即异面直线 AC 与 BC_1 之间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



方法三：如图，以 D 为坐标原点，以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$B_1(1,1,1)$，$C_1(0,1,1)$，$C(0,1,0)$，连接 DB_1，$\therefore\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{DB_1}=(1,1,1)$，则 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，$\therefore DB_1\perp AC$，$DB_1\perp BC_1$，$\therefore$ 异面直线 AC 与 BC_1 之间的距离为 $\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB_1}}{|\overrightarrow{DB_1}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



变式题 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **【解析】** 如图，建立空间直角坐标系，则 $A_1(1,0,1)$，$C_1(0,1,1)$，设 $P(x,0,1-x)$，$0\leqslant x\leqslant1$，连接 A_1P，则 $\overrightarrow{A_1P}=(x-1,0,-x)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,1,0)$，$\therefore$ 动点 P 到直线 A_1C_1 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{A_1P}|^2-\left|\frac{\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|}\right|^2}=\sqrt{(x-1)^2+(-x)^2-\left|\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right|^2}=\sqrt{\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，故面对角线 AD_1 上的动点 P 到直线 A_1C_1 的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



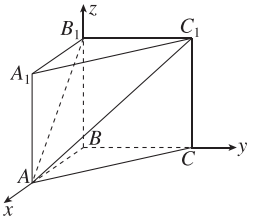
例 2 **【思路点拨】** (1)先证得 BC // 平面 AB_1C_1，则直线 BC 到平面 AB_1C_1 的距离即为点 B 到平面 AB_1C_1 的距离. 思路一：根据等体积法在三棱锥 $B\text{-}AB_1C_1$(连接 BC_1)中可得点 B 到平面 AB_1C_1 的距离；思路二：建系，利用向量法求出平面 AB_1C_1 的一个法向量及 $\overrightarrow{BA}$，即可得到点 B 到平面 AB_1C_1 的距离. (2)思路一：过点 P 作 $PD\perp AC$，PD 交 AC 于点 D，作 $PE\perp BC$，PE 交 BC 于点 E，作 $PO\perp$ 平面 ABC，PO 交平面 ABC 于点 O，连接 OD，OC，OE，则 $PE=\sqrt{3}$，所以 $EC=EO=1$，所以 $CO=\sqrt{2}$，进而根据勾股定理求出点 P 到平面 ABC 的距离；思路二：建系，利用向量法求点 P 到平面 ABC 的距离.

(1)B (2)$\sqrt{2}$ **【解析】** (1)在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，因为 $BC\,//\,B_1C_1$，$BC\not\subset$ 平面 AB_1C_1，$B_1C_1\subset$ 平面 AB_1C_1，所以 $BC\,//$ 平面 AB_1C_1，所以直线 BC 到平面 AB_1C_1 的距离即为点 B 到平面 AB_1C_1 的距离.

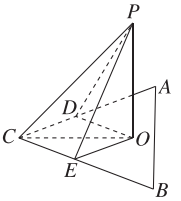
方法一：连接 BC_1，设点 B 到平面 AB_1C_1 的距离为 h，由等体

积法可得 $V_{三棱锥B\text{-}AB_1C_1}=V_{三棱锥C_1\text{-}ABB_1}$，即 $\frac{1}{3}S_{\triangle AB_1C_1}h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABB_1}\times B_1C_1$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\times1$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故直线 BC 到平面 AB_1C_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 B.

方法二：以 B 为坐标原点，以 $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BB_1}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，如图所示. 因为 $CA=2CC_1=2BC=2$，所以 $AB=\sqrt{3}$，则 $B(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B_1(0,0,1)$，$C_1(0,1,1)$，所以 $\overrightarrow{BA}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-\sqrt{3},0,1)$，$\overrightarrow{B_1C_1}=(0,1,0)$. 设平面 AB_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-\sqrt{3}x+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=y=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,\sqrt{3})$，所以点 B 到平面 AB_1C_1 的距离 $d=\left|\overrightarrow{BA}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}+0+0}{\sqrt{1+0+3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即直线 BC 到平面 AB_1C_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 B.



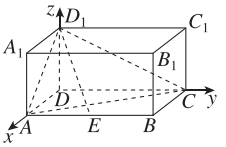
(2)方法一：如图，过点 P 作 $PD\perp AC$，垂足为 D，作 $PE\perp BC$，垂足为 E，由题意知 $PD=PE=\sqrt{3}$. 过点 P 作 $PO\perp$ 平面 ABC，垂足为 O，则点 O 在 $\angle ACB$ 的平分线上，连接 OD，OC，OE，则 $OD\perp CD$，$OE\perp CE$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PCE$ 中，$PC=2$，$PE=\sqrt{3}$，则 $EC=1$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ECO$ 中，$\angle ECO=45^\circ$，则 $\mathrm{Rt}\triangle ECO$ 为等腰直角三角形，所以 $EO=EC=1$，所以 $CO=\sqrt{2}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PCO$ 中，$PO=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，即点 P 到平面 ABC 的距离为 $\sqrt{2}$.



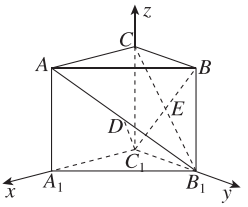
方法二：过点 P 作 $PD\perp AC$，垂足为 D，作 $PE\perp BC$，垂足为 E，由题意知 $PD=PE=\sqrt{3}$，所以 $CD=CE=1$. 以 C 为坐标原点，以 $\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{CD}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$E(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，设 $P(x,y,z)$，则 $|\overrightarrow{CP}|=2$，$|\overrightarrow{PE}|=|\overrightarrow{PD}|=\sqrt{3}$，得 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ (x-1)^2+y^2+z^2=3,\\ x^2+(y-1)^2+z^2=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ z=\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ z=-\sqrt{2},\end{cases}$ 所以点 P 到平面 ABC 的距离为 $\sqrt{2}$.

变式题 1 B **【解析】** 方法一：连接 BD，设点 E 到平面 ACD_1 的距离为 h，因为点 E 是棱 AB 的中点，所以点 E 到平面 ACD_1 的距离等于点 B 到平面 ACD_1 的距离的一半，又平面 ACD_1 过 BD 的中点，所以点 B 到平面 ACD_1 的距离等于点 D 到平面 ACD_1 的距离. 由等体积法得 $V_{D\text{-}ACD_1}=V_{D_1\text{-}ACD}$，所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle ACD_1}\cdot2h=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot DD_1$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$，$DD_1=2$. 在 $\triangle ACD_1$ 中，$AD_1=2\sqrt{2}$，$AC=CD_1=2\sqrt{5}$，所以 $S_{\triangle ACD_1}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=6$，则 $\frac{1}{3}\times6\times2h=\frac{1}{3}\times4\times2$，解得 $h=\frac{2}{3}$，即点 E 到平面 ACD_1 的距离为 $\frac{2}{3}$. 故选 B.

方法二：如图所示，连接 D_1E，以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，则 $D_1(0,0,2)$，$E(2,2,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，所以 $\overrightarrow{D_1E}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,4,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$. 设平面 ACD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x+4y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-2x+2z=0,\end{cases}$ 取 $x=2$，得 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$，所以点 E 到平面 ACD_1 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{D_1E}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\times2+2\times1-2\times2|}{3}=\frac{2}{3}$. 故选 B.



变式题 2 **解：**(1)证明：因为 $CC_1\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，所以 A_1C_1，B_1C_1，CC_1 两两垂直，故以 C_1 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $C(0,0,4)$，$C_1(0,0,0)$，$B_1(0,4,0)$，$D(2,2,2)$，所以 $\overrightarrow{CB_1}=(0,4,-4)$，$\overrightarrow{C_1D}=(2,2,2)$，所以 $\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0+8-8=0$，所以 $\overrightarrow{CB_1}\perp\overrightarrow{C_1D}$，所以 $CB_1\perp C_1D$.

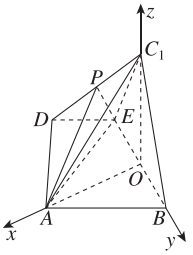


(2)由题意可知 E 是 CB_1，BC_1 的中点，所以 $E(0,2,2)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{C_1D}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{C_1E}=(0,2,2)$. 设平面 B_1C_1D 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{C_1B_1}\cdot\boldsymbol{m}=4y=0,\\ \overrightarrow{C_1D}\cdot\boldsymbol{m}=2x+2y+2z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$，所以点 E 到平面 B_1C_1D 的距离 $d=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1E}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

例 3 **【思路点拨】**(1)由二面角的平面角的定义可知 $\angle AOC_1$（O 为 EB 中点）是二面角 $A\text{-}BE\text{-}C_1$ 的平面角，利用勾股定理可证明 $OA\perp OC_1$，由此可证得结论；(2)以 O 为坐标原点建立空间直角坐标系，假设存在点 P 满足题意，设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC_1}$，由点到平面距离的向量求法可构造方程求得 λ，再利用线面角的向量求法可求得结果.

解：(1)证明：在直角梯形 $ABCD$ 中，连接 AC，交 BE 于点 O，∵四边形 $ABCE$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BCE=60^\circ$，∴$AC\perp BE$，$OA=OC=\sqrt{3}$. 在四棱锥 $C_1\text{-}ABED$ 中，$OA\perp BE$，$OC_1\perp BE$，$OA=OC_1=\sqrt{3}$，∴$\angle AOC_1$ 是二面角 $A\text{-}BE\text{-}C_1$ 的平面角. ∵$AC_1=\sqrt{6}$，∴$OA^2+OC_1^2=AC_1^2$，∴$OA\perp OC_1$，即 $\angle AOC_1=90^\circ$，∴平面 $BC_1E\perp$ 平面 $ABED$.

(2)由(1)可知 OA，OC_1，BE 两两垂直，故以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC_1}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，$C_1(0,0,\sqrt{3})$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$E(0,-1,0)$，∴$\overrightarrow{DC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},-1,0)$. 假设存在点 P 满足题意，设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{3}{2}\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)$，$\lambda\in[0,1]$，连接 AP，则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)$.

设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{3}x+y=0,\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$，∴点 P 到平面 ABC_1 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\sqrt{3}\lambda-2\sqrt{3}|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=\frac{3}{2}$（舍去），∴$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，∴$\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 设直线 EP 与平面 ABC_1 的夹角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EP},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EP}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

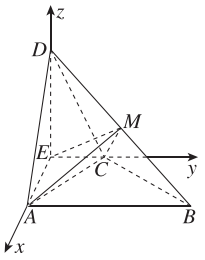
故在棱 DC_1 上存在点 P 满足题意，此时直线 EP 与平面 ABC_1 夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

变式题 **解：**(1)在平行四边形 $ABCD$ 中，$AE\perp DC$，所以 $DE\perp AE$，在 $\triangle ADE$ 中，因为 $AD=4$，$\angle ADE=60^\circ$，所以 $AE=$

$2\sqrt{3}$，$DE=2$，所以 $EC=1$. 在四棱锥 $D\text{-}ABCE$ 中，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCE$，$DE\subset$ 平面 ADE，平面 $ADE\cap$ 平面 $ABCE=AE$，因为 $DE\perp AE$，所以 $DE\perp$ 平面 $ABCE$.

因为 M 为 BD 的中点，所以 $V_{M\text{-}ABCE}=\frac{1}{2}V_{D\text{-}ABCE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times S_{四边形ABCE}\times DE=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times(1+3)\times2\sqrt{3}\times2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(2)由(1)知 EA，EC，ED 两两垂直，以点 E 为坐标原点，$\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{ED}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系(如图)，



则 $E(0,0,0)$，$D(0,0,2)$，$C(0,1,0)$，$A(2\sqrt{3},0,0)$，$B(2\sqrt{3},3,0)$，所以 $\overrightarrow{DB}=(2\sqrt{3},3,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2\sqrt{3},1,0)$.

假设存在点 M 满足题意，设 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DB}=(2\sqrt{3}\lambda,3\lambda,-2\lambda)(0<\lambda<1)$，

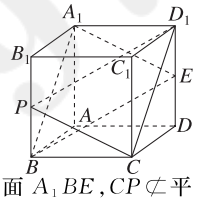
则 $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DM}=(0,0,2)+(2\sqrt{3}\lambda,3\lambda,-2\lambda)=(2\sqrt{3}\lambda,3\lambda,2-2\lambda)$，即 $M(2\sqrt{3}\lambda,3\lambda,2-2\lambda)$，所以 $\overrightarrow{CM}=(2\sqrt{3}\lambda,3\lambda-1,2-2\lambda)$. 设平面 AMC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2\sqrt{3}x+y=0,\\ 2\sqrt{3}\lambda x+(3\lambda-1)y+(2-2\lambda)z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=\left(1,2\sqrt{3},\frac{4\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}}{\lambda-1}\right)$. 易知平面 $ABCE$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{\left|\frac{4\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}}{\lambda-1}\right|}{1\times\sqrt{1+12+\left(\frac{4\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}}{\lambda-1}\right)^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=-\frac{1}{2}$(舍去). 所以存在点 M 满足题意，且 $\frac{DM}{DB}$ 的值为 $\frac{1}{2}$.

增分微课 4　空间中的动态问题

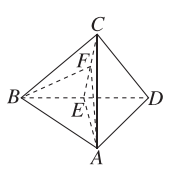
例 1　A　**【解析】** 设二面角 $A\text{-}BC\text{-}D$ 的平面角为 θ，点 P 到平面 BCD 的距离为 PH，点 P 到定直线 CB 的距离为 d，则 $PH=d\sin\theta$. ∵点 P 到平面 BCD 的距离与点 P 到点 A 的距离相等，∴$d\sin\theta=PA$，∴$\frac{PA}{d}=\sin\theta$，由四面体 $ABCD$ 为正四面体，得 $\sin\theta$ 为小于 1 的定值，即在平面 ABC 中，点 P 到定点 A 的距离与到定直线 BC 的距离的比值是一个小于 1 的定值，所以点 P 的轨迹为椭圆在△ABC 内的一部分. 故选 A.

例 2　$\frac{\sqrt{5}}{2}$　**【解析】** 如图，取 BB_1 的中点 P，连接 CP，PD_1，CD_1，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，易得 $BA_1\parallel CD_1$，∵$BA_1\subset$ 平面 A_1BE，$CD_1\not\subset$ 平面 A_1BE，∴$CD_1\parallel$ 平面 A_1BE. 由 P 为 BB_1 的中点，E 为 DD_1 的中点，易得 $CP\parallel A_1E$，∵$A_1E\subset$ 平面 A_1BE，$CP\not\subset$ 平面 A_1BE，∴$CP\parallel$ 平面 A_1BE. 又 $CP\cap CD_1=C$，∴平面 $PCD_1\parallel$ 平面 A_1BE. 若 $D_1M\parallel$ 平面 A_1BE，则 $M\in$ 平面 PCD_1，又 $M\in$ 侧面 B_1BCC_1，∴点 M 的轨迹为线段 PC. 由正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，得 $PC=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，即点 M 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

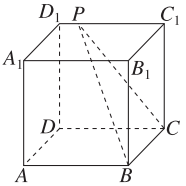


例 3　(1)AC　(2)$\frac{\sqrt{6}}{4}$　**【解析】** (1)对于 A，△ADC 和△ABC 是全等三角形，$\angle ABC=90^\circ$，$\angle BAC=60^\circ$，$AB=2$，可得 AC 的中点 O 到 A，B，C，D 的距离均相等，故 O 为三棱锥 $D_1\text{-}ABC$ 的外接球的球心，AC 为外接球的直径，∴外接球的半径为 $\frac{1}{2}AC=2$，∴三棱锥 $D_1\text{-}ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi\times2^2=16\pi$，为定值，故 A 正确；对于 B，根据三垂线定理可得，当 CD_1 在底面 ABC 上的射影为 BC 时，才能满足 $AB\perp CD_1$，此时 CD_1 与 CB 重合，不能构成三棱锥，∴不存在满足条件的 D_1，故 B 错误；对于 C，当三棱锥 $A_1\text{-}BCD$ 的体积最大时，平面 $A_1BD\perp$ 平面 BCD，此时 $BD=2\sqrt{3}$，△BCD 为等边三角形，点 A_1 到平面 BCD 的距离为 1，∴$V_{A_1\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1=\sqrt{3}$，故 C 正确；当 $A_1C\perp A_1D$ 时，可得 $A_1C\perp A_1B$，∵$A_1B\cap A_1D=A_1$，∴$A_1C\perp$ 平面 A_1BD，则 $\angle A_1BC$ 是 BC 与平面 A_1BD 的夹角，∵$BC=2\sqrt{3}$，$A_1B=2$，∴由勾股定理可得 $A_1C=2\sqrt{2}$，在 Rt△A_1BC 中，$\sin\angle A_1BC=\frac{A_1C}{BC}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 D 错误. 故选 AC.

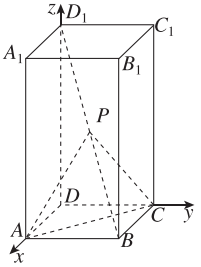
(2)如图所示，取 BD 的中点 E，连接 CE，AE，AC，因为 $AB=AD$，$CB=CD$，所以 $BD\perp AE$，$BD\perp CE$，故$\angle CEA$ 是二面角 $A\text{-}BD\text{-}C$ 的平面角，且 $BD\perp$ 平面 ACE. 依题可知△ACE 是正三角形，作 $AF\perp CE$ 于点 F，连接 BF，则 $BD\perp AF$，又因为 $AF\perp CE$，$BD\cap CE=E$，所以 $AF\perp$ 平面 BCD，即$\angle ABF$ 是直线 AB 与平面 BCD 的夹角. 在 Rt△AFE 中，$AF=\frac{\sqrt{3}}{2}AE$，又 $AE=\frac{1}{2}BD$，所以 $AF=\frac{\sqrt{3}}{2}AE=\frac{\sqrt{3}}{4}BD$，因为△$ABD$ 是等腰直角三角形，所以 $AB=\frac{\sqrt{2}}{2}BD$，从而 $\sin\angle ABF=\frac{AF}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}BD}{\frac{\sqrt{2}}{2}BD}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.



例 4　(1)A　(2)D　**【解析】** (1)如图，连接 PC，则$\angle CPB$ 为直线 PB 与平面 CC_1D_1D 的夹角. 设正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，$PC_1=x(0\leqslant x\leqslant a)$，∴$PB=\sqrt{BC^2+PC^2}=\sqrt{BC^2+PC_1^2+CC_1^2}=\sqrt{2a^2+x^2}$，∴$\sin\angle CPB=\frac{BC}{PB}=\frac{a}{\sqrt{2a^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$，又∵$0\leqslant\frac{x}{a}\leqslant1$，∴$2\leqslant2+\left(\frac{x}{a}\right)^2\leqslant3$，∴$\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{2+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\leqslant\frac{1}{2}$，则 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\sqrt{\frac{1}{2+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，即直线 PB 与平面 CC_1D_1D 夹角的正弦值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. 故选 A.



(2)如图，以点 D 为坐标原点建立空间直角坐标系. 设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$D_1(0,0,2)$，所以 $\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,2)$，所以 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1}=(-\lambda,-\lambda,2\lambda)$，因为 $\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=(0,1,0)+(-\lambda,-\lambda,2\lambda)=(-\lambda,1-\lambda,2\lambda)$. 设平面 APC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-\lambda x+(1-\lambda)y+2\lambda z=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(2\lambda,2\lambda,2\lambda-1)$，则点 B 到平面 APC 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\lambda|}{\sqrt{12\lambda^2-4\lambda+1}}$. 当 $\lambda=0$ 时，点 B 到平面 APC 的距离为 0，当 $0<\lambda\leqslant1$ 时，$d=\frac{|2\lambda|}{\sqrt{12\lambda^2-4\lambda+1}}=\frac{1}{\sqrt{3-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{4\lambda^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda}-2\right)^2}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时取等号，所以点 B 到平面 APC 距离的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 D.



第 47 讲　直线的倾斜角与斜率、直线的方程

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)0°　(2)$0°\leqslant\alpha<180°$　(3)正切值　$\tan\alpha$　(4)$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

2. (1)(x_2-x_1,y_2-y_1)　$(1,k)$　(2)①90°　②$\frac{v}{u}$　$\frac{v}{u}$

3. $y-y_0=k(x-x_0)$　$y=kx+b$　$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$　$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq0)$

【对点演练】

1. $-\sqrt{3}$　120°　$(1,-\sqrt{3})$(答案不唯一)　**【解析】** 由题意知直线 l 的斜率 $k=\frac{3\sqrt{3}-0}{-5-(-2)}=-\sqrt{3}$，即 $\tan\theta=-\sqrt{3}$，则倾斜角 $\theta=120°$，直线 l 的一个方向向量为 $(1,-\sqrt{3})$.

2. 5　**【解析】** 因为 $k_{AB}=\frac{3-1}{1-(-2)}=\frac{2}{3}$，$k_{BC}=\frac{m-1}{4-(-2)}=\frac{m-1}{6}$，所以 $\frac{m-1}{6}=\frac{2}{3}$，解得 $m=5$.

3. $(-1,-2)$　**【解析】** 因为 $y+2=k(x+1)$，即 $y-(-2)=k[x-(-1)]$，所以该直线过定点 $(-1,-2)$.

4. $-\frac{3}{2}$　**【解析】** 经过两点 $(-1,1)$ 和 $(0,3)$ 的直线方程为 $\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-0}{-1-0}$，即 $y=2x+3$，令 $y=0$，得 $x=-\frac{3}{2}$，即直线在 x 轴上的截距为 $-\frac{3}{2}$.

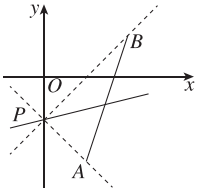
5. ②④　**【解析】** 坐标平面内的任何一条直线均有倾斜角，①中说法正确；一条直线的斜率为 1，则此直线的倾斜角为 45°，②中说法错误；直线的倾斜角的取值范围是 $[0,\pi)$，③中说法正确；当直线的倾斜角为 90°时，直线的斜率不存在，④中说法错误. 故填②④.

6. $x-y=0$ 或 $x+y-2=0$　**【解析】** 当直线经过原点时，直线的方程为 $x-y=0$，满足题意. 当直线不经过原点时，设直线的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1(a\neq0)$，又点 $(1,1)$ 在直线上，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=1$，解得 $a=2$，故直线的方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$，即 $x+y-2=0$. 综上所述，所求直线的方程为 $x-y=0$ 或 $x+y-2=0$.

● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】** 先求出直线 l 与线段 AB 相交时直线 l 的倾斜角的范围与斜率范围，再讨论不相交的情况即可.

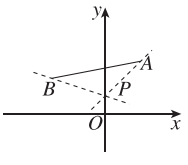
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$　$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$



【解析】 如图，因为 $k_{PA}=\frac{-2-(-1)}{1-0}=-1$，$k_{PB}=\frac{1-(-1)}{2-0}=1$，所以当直线 l 与线段 AB 相交时，由图可知，$k_{PA}\leqslant k\leqslant k_{PB}$，即 $-1\leqslant k\leqslant1$，所以 $0\leqslant\tan\alpha\leqslant1$ 或 $-1\leqslant\tan\alpha<0$. 因为 $y=\tan x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 及 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上均单调递增，所以当直线 l 与线段 AB 相交时，α 的取值范围为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$. 故当直线 l 与线段 AB 没有公共点时，α 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，$k$ 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

变式题　(1)$(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$

(2)$\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha<\pi$　**【解析】** (1)由题得直线 $ax+y-1=0$ 的斜率为 $-a$，且过定点 $P(0,1)$，由图可得，要使直线与线段 AB 总有公共点，需满足 $-a\geqslant k_{PA}$ 或 $-a\leqslant k_{PB}$，∵ $k_{PA}=1$，$k_{PB}=-\frac{1}{3}$，∴ $-a\geqslant1$ 或 $-a\leqslant-\frac{1}{3}$，∴ $a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant\frac{1}{3}$. 故 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$.



(2)直线 $x+(a^2+1)y+1=0(a\in\mathbf{R})$ 的斜率为 $-\frac{1}{a^2+1}$，易得 $-1\leqslant-\frac{1}{a^2+1}<0$，设直线的倾斜角为 α，$0\leqslant\alpha<\pi$，则 $-1\leqslant\tan\alpha<0$，所以 $\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha<\pi$.

例 2　**【思路点拨】** (1)根据题目分直线截距为 0 和不为 0，分别设方程求解. (2)由 AC 边与 AC 边上的高的垂直关系求得 AC 边所在直线的斜率，再结合 A 点的坐标，即可由点斜式写出 AC 边所在直线的方程.

(1)ABC　(2)D　**【解析】** (1)当直线在 x 轴、y 轴上的截距均为 0 时，设直线的方程为 $y=kx$，将点 $(-3,1)$ 的坐标代入可得 $k=-\frac{1}{3}$，此时直线的方程为 $x+3y=0$. 当直线在 x 轴、y 轴上的截距均不为 0 时，设直线的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$ 或 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1(a\neq0)$，将点 $(-3,1)$ 的坐标代入可得 $a=-2$ 或 $a=-4$，此时直线的方程为 $x+y+2=0$ 或 $x-y+4=0$. 故选 ABC.

(2)设 AC 边上的高所在直线的斜率为 k_1，则 $k_1=-\frac{3}{2}$，设 AC 边所在直线的斜率为 k_2，因为 AC 边上的高与 AC 边垂直，所以 $k_1k_2=-1$，所以 $k_2=\frac{2}{3}$，又 $A(5,5)$，所以 AC 边所在直线的方程为 $y=\frac{2}{3}(x-5)+5$，即 $2x-3y+5=0$. 故选 D.

变式题　(1)CD　(2)$3x+y-6=0$　(3)-1 或 $-\frac{1}{2}$　$\left[-\frac{1}{2},0\right]$　**【解析】** (1) 方法一：因为直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以直线 l 的斜率 $k=\frac{3}{2}$，故直线 l 的方程为 $y-3=\frac{3}{2}(x+4)$，即 $3x-2y+18=0$. 故选 CD.

方法二：设 $P(x,y)$ 是直线 l 上的任意一点(不同于 A)，则 $\overrightarrow{AP}=(x+4,y-3)$，因为直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以 $\frac{3}{2}(x+4)-(y-3)=0$，所以直线 l 的方程为 $y-3=\frac{3}{2}(x+4)$，即 $3x-2y+18=0$. 故选 CD.

(2)因为 $|OA|=|AB|$，所以 $\angle AOB=\angle ABO$，即 $k_{AB}=-k_{OA}=-3$，所以直线 AB 的方程为 $y-3=-3(x-1)$，即 $3x+y-6=0$.

(3)当 $k=0$ 时，$y=1$，不符合直线 l 在两坐标轴上的截距相等. 当 $k\neq0$ 时，令 $x=0$，得 $y=2k+1$，令 $y=0$，得 $x=-2-\frac{1}{k}$，由题意可得 $-2-\frac{1}{k}=2k+1$，解得 $k=-1$ 或 $k=-\frac{1}{2}$. ∵直线 l 的方程为 $kx-y+1+2k=0$，即 $y=kx+1+2k$，直线 l 不经过第三象限，∴ $k\leqslant0$ 且 $1+2k\geqslant0$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant0$，故实数 k 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

例 3　**【思路点拨】** 利用待定系数法，设出直线的截距式方程，根据题中的条件结合基本不等式，求得直线方程.

解：设直线 l：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，因为直线 l 经过点

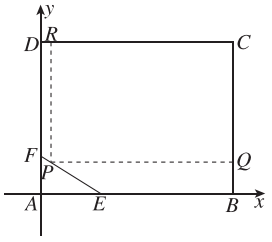
$P(4,1)$，所以$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1$.

(1)因为$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\frac{4}{\sqrt{ab}}$，所以$ab\geqslant 16$，当且仅当$a=8,b=2$时等号成立，所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab\geqslant 8$.

所以当$a=8,b=2$时，$\triangle AOB$的面积最小，此时直线l的方程为$\frac{x}{8}+\frac{y}{2}=1$，即$x+4y-8=0$.

(2)因为$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1,a>0,b>0$，所以$|OA|+|OB|=a+b=(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)=5+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\geqslant 9$，当且仅当$a=6,b=3$时等号成立，所以当$|OA|+|OB|$取最小值时，直线$l$的方程为$x+2y-6=0$.

变式题 **解：**如图所示，以A为坐标原点建立平面直角坐标系，则$E(30,0),F(0,20)$，



直线EF的方程为$\frac{x}{30}+\frac{y}{20}=1$. 易知当矩形草坪的两邻边分别在$BC,CD$上，且一个顶点在线段$EF$上时，可使草坪面积最大.

在线段EF上取点$P(m,n)$，作$PQ\perp BC$于点Q，$PR\perp CD$于点R，设矩形$PQCR$的面积为S，则$S=|PQ|\cdot|PR|=(100-m)(80-n)$.

又$\frac{m}{30}+\frac{n}{20}=1(0\leqslant m\leqslant 30)$，$\therefore n=20-\frac{2}{3}m$，$\therefore S=(100-m)\left(80-20+\frac{2}{3}m\right)=-\frac{2}{3}(m-5)^2+\frac{18\,050}{3}(0\leqslant m\leqslant 30)$，

$\therefore$当$m=5$时，S取得最大值，此时$\frac{|EP|}{|PF|}=5$.

故当矩形草坪的两邻边分别在BC,CD上，一个顶点P在线段EF上，且$|EP|=5|PF|$时，草坪的面积最大.

第48讲　两直线的位置关系

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $k_1=k_2$且$b_1\neq b_2$　$k_1\cdot k_2=-1$　$k_1\neq k_2$
2. 交点坐标　(1)相交　交点的坐标　(2)无公共点　平行
3. $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$　$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$　$\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

【对点演练】

1. 直角　**【解析】**因为边AB所在直线的斜率$k_1=-\frac{1}{2}$，边BC所在直线的斜率$k_2=2$，且$k_1k_2=-1$，所以$AB\perp BC$，所以$\triangle ABC$是直角三角形.
2. 2　**【解析】**点$(1,3)$到直线$3x-4y-1=0$的距离$d=\frac{|3-12-1|}{\sqrt{9+16}}=2$.
3. $2x+y-4=0$　**【解析】**由$\begin{cases}x+y-3=0,\\x-2y+3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$$\therefore$直线$x+y-3=0$和直线$x-2y+3=0$的交点为$(1,2)$，又所求直线与直线$2x+y-7=0$平行，$\therefore$所求直线的斜率为$-2$，$\therefore$所求直线的方程为$y-2=-2(x-1)$，即$2x+y-4=0$.
4. $\frac{1}{6}$　**【解析】**方法一：因为直线$l_1:x+2my-1=0$与$l_2:(3m-1)x-my+1=0$平行，所以两直线的斜率相等或斜率均不存在，所以$-\frac{1}{2m}=\frac{3m-1}{m}$或$m=0$，即$m=\frac{1}{6}$或$m=0$. 当$m=0$时，$l_1$与$l_2$重合，不符合题意，所以$m=\frac{1}{6}$.

方法二：因为$l_1/\!/l_2$，所以$\begin{cases}1\times(-m)-(3m-1)\times 2m=0,\\1\times 1-(3m-1)\times(-1)\neq 0,\end{cases}$解得$m=\frac{1}{6}$.
5. $\frac{4}{3}$或0　**【解析】**若直线$l_1:2x+3ay-4=0$与直线$l_2:ax+(a-2)y+1=0$垂直，则$2a+3a(a-2)=0$，解得$a=0$或$a=\frac{4}{3}$.
6. $\frac{7}{2}$　**【解析】**依题意得$a=6$，$3x+4y-12=0$可变形为$6x+8y-24=0$，所以两条平行直线之间的距离为$\frac{|11+24|}{\sqrt{36+64}}=\frac{7}{2}$.

● 课堂考点探究

例1 **【思路点拨】**判断两直线的位置关系，关键是判断两直线的斜率之间的关系.

解：(1)当$m=-6$时，直线l_1的方程为$-3x+5y=23$，l_2的方程为$x=4$，显然两直线相交；

当$m\neq -6$时，由$\frac{m+3}{2}\neq\frac{5}{m+6}$，解得$m\neq -1,m\neq -8$.

综上，当$m\neq -1$且$m\neq -8$时，直线l_1与l_2相交.

(2)由(1)知当$m=-6$时，直线l_1与l_2相交.

当$m\neq -6$时，由$\frac{m+3}{2}=\frac{5}{m+6}\neq\frac{5-3m}{8}$，得$m=-1$(舍去)或$m=-8$，所以当$m=-8$时，直线$l_1$与$l_2$平行.

(3)由$\frac{m+3}{2}=\frac{5}{m+6}=\frac{5-3m}{8}$，得$m=-1$，

所以当$m=-1$时，直线l_1与l_2重合.

(4)由$2(m+3)+5(m+6)=0$得$m=-\frac{36}{7}$，

所以当$m=-\frac{36}{7}$时，直线l_1与l_2垂直.

变式题　(1)D　(2)C　(3)2　**【解析】**(1)当直线$x+2y-1=0$与直线$a^2x+(a+1)y-1=0$平行时，$\frac{a^2}{1}=\frac{a+1}{2}\neq 1$，得$a=-\frac{1}{2}$. 当$a=1$时，直线$x+2y-1=0$与直线$a^2x+(a+1)y-1=0$重合，所以$p$是$q$的既不充分也不必要条件. 故选D.

(2)当三条直线交于一点时，可将平面分为六个部分，由$\begin{cases}x-2y+2=0,\\x-2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$将$\begin{cases}x=2,\\y=2\end{cases}$代入$l_3:x+ky=0$中，得$2k+2=0$，解得$k=-1$. 当$l_3:x+ky=0$与$l_1:x-2y+2=0$平行时，三条直线可将平面分为六个部分，此时$k=-2$；当$l_3:x+ky=0$与$l_2:x-2=0$平行时，三条直线可将平面分为六个部分，此时$k=0$. 综上，满足条件的$k$的值共有3个. 故选C.

(3)设直线l的斜率为k_1，直线$x+2y-\lambda=0$的斜率为k_2，由直线$x+2y-\lambda=0$可得$k_2=-\frac{1}{2}$，因为直线l与直线$x+2y-\lambda=0$垂直，所以$k_1\cdot k_2=-1$，即$-\frac{1}{2}k_1=-1$，解得$k_1=2$，即$\tan\alpha=2$，所以$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha=2$.

例2 **【思路点拨】**(1)直线$3x+my-3=0$过定点$(1,0)$，计算定点到直线$6x+4y+1=0$的距离即可. (2)直线$y=k(x+1)$恒过定点$(-1,0)$，当点$(-1,0)$与$(0,-1)$的连线垂直于直线$y=k(x+1)$时，点$(0,-1)$到直线$y=k(x+1)$的距离最大. (3)联立两直线的方程，解方程组可得交点坐标，进而可得直线l的斜率，根据点斜式即可得直线l的方程.

(1)D　(2)B　(3)$2x-y=0$　**【解析】**(1)直线$3x+my-3=0$过定点$(1,0)$，则直线$3x+my-3=0$到直线$6x+4y+1=0$的距离即为点$(1,0)$到直线$6x+4y+1=0$的距离，故所求距离$d=\frac{|6\times 1+4\times 0+1|}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{7}{\sqrt{52}}=\frac{7\sqrt{13}}{26}$. 故选D.

(2)由$y=k(x+1)$，可得直线过定点$(-1,0)$，易知当点$(-1,0)$与$(0,-1)$的连线与直线$y=k(x+1)$垂直时，所求距离最大，所以点$(0,-1)$到直线$y=k(x+1)$距离的最大值为$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. 故选B.

(3)由题意得，联立$\begin{cases}2x-3y-4=0,\\x-y-1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$即两条直线$2x-3y-4=0$与$x-y-1=0$的交点坐标为$(-1,-2)$，$\because$直线$l$经过$(0,0)$，$\therefore$直线$l$的斜率$k=\frac{-2}{-1}=2$，$\therefore$直线$l$的方程为$y=2x$，即$2x-y=0$.

变式题　(1)-3或3　(2)4　**【解析】**(1)方法一：由题意得

19936316

$\frac{|-2a-4+1|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|a+5+1|}{\sqrt{a^2+1}}$，解得 $a=3$ 或 $a=-3$.

方法二：因为 A，B 两点到直线 l 的距离相等，所以直线 $AB\parallel l$ 或线段 AB 的中点在直线 l 上，则 $\frac{5+4}{1+2}=-a$ 或 $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}+1=0$，解得 $a=-3$ 或 $a=3$.

(2)$a^2+(b+1)^2$ 即为点 $M(a,b)$ 到点 $(0,-1)$ 的距离的平方，点 $M(a,b)$ 为直线 $\sqrt{3}x-y+3=0$ 上的动点，因为点 $(0,-1)$ 到直线 $\sqrt{3}x-y+3=0$ 的距离 $d=\frac{|0+1+3|}{\sqrt{3+1}}=2$，所以 $a^2+(b+1)^2$ 的最小值为 4.

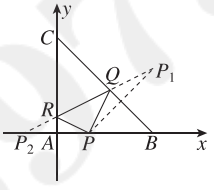
例 3 **【思路点拨】** 设出 A 点的坐标，根据中点坐标公式求出 B 点坐标，代入直线 l_2 的方程中，解方程求得 A 点坐标，利用截距式求出直线 l 的方程.

$x+4y-4=0$ **【解析】** 设 $A(a,8-2a)$，由题意知，点 A 关于点 P 的对称点 $B(-a,2a-6)$ 在直线 l_2 上，则 $-a-3(2a-6)+10=0$，解得 $a=4$，即点 $A(4,0)$ 在直线 l 上，由直线的截距式方程得直线 l 的方程为 $\frac{x}{4}+y=1$，即 $x+4y-4=0$.

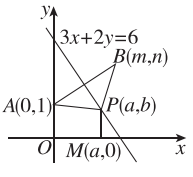
例 4 **【思路点拨】** (1)求出点 B 关于直线 $x-y+3=0$ 的对称点 M 的坐标，进而求出 AC 的斜率，利用点斜式求解直线方程即可.(2)首先建立平面直角坐标系，设点 P 的坐标为 $(t,0)$，分别求出点 P 关于直线 BC 与 y 轴的对称点 P_1，P_2 的坐标，进而求出直线 P_1P_2 的方程，再由 A，B，C 的坐标求出 $\triangle ABC$ 的重心的坐标，进而求出 t 的值，最后得到线段 AP 的长度.

(1)$x-2y+8=0$ (2)$\frac{4}{3}$ **【解析】** (1)设点 B 关于直线 $x-y+3=0$ 的对称点 M 的坐标为 (a,b)，则 $\begin{cases}\frac{b-3}{a-1}=-1,\\ \frac{1+a}{2}-\frac{3+b}{2}+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=4,\end{cases}$ 所以 $M(0,4)$. 由题可知，A，M 两点都在直线 AC 上，所以直线 AC 的斜率为 $\frac{5-4}{2-0}=\frac{1}{2}$，所以直线 AC 的方程为 $y-4=\frac{1}{2}(x-0)$，即 $x-2y+8=0$.

(2)以 A 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，AC 所在直线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，由题意可知 $B(4,0)$，$C(0,4)$，$A(0,0)$，则直线 BC 的方程为 $x+y-4=0$. 设 $P(t,0)(0<t<4)$，可得点 P 关于直线 BC 的对称点 P_1 的坐标为 $(4,4-t)$，点 P 关于 y 轴的对称点 P_2 的坐标为 $(-t,0)$. 根据反射定律可知 P_1，P_2 连线所在直线就是光线 RQ 所在的直线. 由 P_1，P_2 两点的坐标可得直线 P_1P_2 的方程为 $y=\frac{4-t}{4+t}\cdot(x+t)$. 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G，易知 $G\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$，因为重心 $G\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ 在光线 RQ 上，所以 $\frac{4}{3}=\frac{4-t}{4+t}\cdot\left(\frac{4}{3}+t\right)$，可得 $t=\frac{4}{3}$，即 $|AP|=\frac{4}{3}$.



变式题 1 $\frac{29}{13}$ **【解析】** 设直线 $3x+2y=6$，点 $P(a,b)$ 在直线 $3x+2y=6$ 上，且点 P 在第一象限. 设点 $A(0,1)$，过点 P 向 x 轴作垂线，垂足为 M，则 $M(a,0)$，连接 PA，则 $b+\sqrt{a^2+b^2-2b+1}=b+\sqrt{a^2+(b-1)^2}=|PM|+|PA|$. 如图所示，设点 A 关于直线 $3x+2y=6$ 对称的点为 $B(m,n)$，则有 $\begin{cases}\frac{n-1}{m}=\frac{2}{3},\\ \frac{3m}{2}+n+1=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{24}{13},\\ n=\frac{29}{13},\end{cases}$ 即 $m\left(\frac{24}{13},\frac{29}{13}\right)$. 连接 PB，易知 $|PM|+|PA|=|PM|+|PB|$，由图可知，当 B，P，M 在直线 $x=\frac{24}{13}$ 上时，$|PM|+|PB|$ 取得最小值，最小值为 $\frac{29}{13}$，即 $b+\sqrt{a^2+b^2-2b+1}$ 的最小值为 $\frac{29}{13}$.



变式题 2 **解：**(1)设点 $A(0,2)$ 关于直线 $l_1:x-y-1=0$ 的对称点 B 的坐标为 (x,y)，可得 $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y+2}{2}-1=0,\\ \frac{y-2}{x-0}\cdot1=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=-1,\end{cases}$ 故点 B 的坐标为 $(3,-1)$.

(2)由 $\begin{cases}x-y-1=0,\\ x-2y+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=3,\end{cases}$ 所以两直线交于点 $C(4,3)$，在直线 $l_2:x-2y+2=0$ 上取一点 $D(0,1)$，设其关于直线 l_1 的对称点为 $E(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}\frac{x_0}{2}-\frac{y_0+1}{2}-1=0,\\ \frac{y_0-1}{x_0-0}\cdot1=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=2,\\ y_0=-1,\end{cases}$ 即 $E(2,-1)$，$\therefore k_{CE}=\frac{3-(-1)}{4-2}=2$，

$\therefore$ 直线 CE 的方程为 $y-3=2(x-4)$，即 $2x-y-5=0$，

$\therefore$ 直线 l_2 关于直线 l_1 的对称直线的方程为 $2x-y-5=0$.

(3)在直线 $l_1:x-y-1=0$ 上任取两点，如 $M(1,0)$，$N(0,-1)$，则 M，N 关于点 $A(0,2)$ 的对称点 M'，N' 均在直线 l' 上，易得 $M'(-1,4)$，$N'(0,5)$，$\therefore k_{M'N'}=\frac{5-4}{0+1}=1$，

故直线 l' 的方程为 $y-5=1\times(x-0)$，即 $x-y+5=0$.

例 5 **【思路点拨】** (1)思路一：由所求的直线与直线 $3x+2y-5=0$ 垂直，设出直线的方程，再将点 $P(1,-2)$ 的坐标代入直线方程，求出参数，可得答案；思路二：先结合垂直关系求出直线斜率，然后根据直线的点斜式方程即可求解.(2)思路一：求出两直线的交点，根据平行关系设直线方程，代入交点坐标即可；思路二：设出过两直线的交点的直线系方程，根据所求直线与 l_3 的位置关系结合斜率列方程求解即可.

(1)$2x-3y-8=0$ (2)$x-y+4=0$ **【解析】** (1)方法一：由题意，所求的直线与直线 $3x+2y-5=0$ 垂直，可设所求直线的方程为 $2x-3y+m=0$，又直线过点 $P(1,-2)$，则 $2\times1+3\times2+m=0$，解得 $m=-8$，所以过点 $P(1,-2)$ 且与直线 $3x+2y-5=0$ 垂直的直线方程是 $2x-3y-8=0$.

方法二：因为直线 $3x+2y-5=0$ 的斜率 $k=-\frac{3}{2}$，故过点 $P(1,-2)$ 且与直线 $3x+2y-5=0$ 垂直的直线方程为 $y+2=\frac{2}{3}(x-1)$，化简得 $2x-3y-8=0$.

(2)方法一：由 $\begin{cases}3x+4y-2=0,\\ 2x+y+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\ y=2,\end{cases}$ 由平行关系可设直线 l_4 的方程为 $x-y+c=0$，其中 $c\neq-1$，将 $(-2,2)$ 代入 l_4 的方程可得 $c=4$，$\therefore$ 直线 l_4 的方程为 $x-y+4=0$.

方法二：由题意可设直线 l_4 的方程为 $(3x+4y-2)+\lambda(2x+y+2)=0$，即 $(2\lambda+3)x+(4+\lambda)y-2+2\lambda=0$①，因为直线 l_4 与直线 $l_3:x-y-1=0$ 平行，所以 $-(2\lambda+3)=4+\lambda$，解得 $\lambda=-\frac{7}{3}$，代入①式得直线 l_4 的方程为 $-\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}y-\frac{20}{3}=0$，化简得 $x-y+4=0$.

变式题 1 $4x-3y+9=0$ **【解析】** 方法一：由 $\begin{cases}2x+3y+1=0,\\ x-3y+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{5}{3},\\ y=\frac{7}{9},\end{cases}$ 即直线 $2x+3y+1=0$，$x-3y+4=0$ 的交点坐标为 $\left(-\frac{5}{3},\frac{7}{9}\right)$. 因为直线 l 与直线 $3x+4y-7=0$ 垂直，所以直线 l 的斜率 $k=\frac{4}{3}$，由直线的点斜式方程得直线 l 的方程为 $y-\frac{7}{9}=\frac{4}{3}\left(x+\frac{5}{3}\right)$，即 $4x-3y+9=0$.

方法二：由题可设直线 l 的方程为 $4x-3y+m=0$，由 $\begin{cases}2x+3y+1=0,\\ x-3y+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{5}{3},\\ y=\frac{7}{9},\end{cases}$ 代入 $4x-3y+m=0$，可得

$m=9$,故直线 l 的方程为 $4x-3y+9=0$.

方法三:由题意可设直线 l 的方程为 $(2x+3y+1)+\lambda(x-3y+4)=0$,即 $(2+\lambda)x+(3-3\lambda)y+1+4\lambda=0$①,因为直线 l 与直线 $3x+4y-7=0$ 垂直,所以 $3(2+\lambda)+4(3-3\lambda)=0$,解得 $\lambda=2$,代入①式得直线 l 的方程为 $4x-3y+9=0$.

变式题 2 C **【解析】** 由图可知,原点到直线的距离为定值.对于 A,原点到直线 $x+y\sin\theta-3=0$ 的距离为 $\dfrac{|-3|}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$,不是定值,故 A 错误;对于 B,原点到直线 $x\cos\theta+y+3\sin\theta=0$ 的距离为 $\dfrac{|3\sin\theta|}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}$,不是定值,故 B 错误;对于 C,原点到直线 $x\cos\theta+y\sin\theta-2=0$ 的距离为 $\dfrac{|-2|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=2$,是定值,故 C 正确;对于 D,原点到直线 $x\cos\theta+y-3=0$ 的距离为 $\dfrac{|-3|}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}$,不是定值,故 D 错误.故选 C.

第 49 讲　圆的方程

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　(a,b)　r　$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$
2. (1)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$　(2)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$　(3)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$

【对点演练】

1. $(1,2)$　1　**【解析】** 由 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$,得 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$,所以圆心坐标为 $(1,2)$,半径为 1.
2. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$　$x^2+y^2-2x-2y=0$
【解析】 ∵ $P(1,1)$ 为圆心,且圆 P 经过原点,∴ 半径 $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$,∴所求圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$,化为一般方程,可得 $x^2+y^2-2x-2y=0$.
3. $(x-5)^2+(y-6)^2=10$　**【解析】** 由题意得,所求圆的圆心为线段 AB 的中点 $\left(\dfrac{4+6}{2},\dfrac{3+9}{2}\right)$,即 $(5,6)$,半径为 $\dfrac{|AB|}{2}=\dfrac{\sqrt{(6-4)^2+(3-9)^2}}{2}=\sqrt{10}$,所以所求圆的标准方程为 $(x-5)^2+(y-6)^2=10$.
4. $(-3,-2)\cup(2,+\infty)$　**【解析】** 由题意,得 $\begin{cases}m^2+(-2)^2-8>0,\\1^2+2^2+m-2\times2+2>0,\end{cases}$ 解得 $-3<m<-2$ 或 $m>2$,故实数 m 的取值范围为 $(-3,-2)\cup(2,+\infty)$.
5. $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 或 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$　**【解析】** 由题意知圆心的坐标为 $(2,-2)$ 或 $(-2,2)$,所以圆的方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 或 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$.
6. -4　**【解析】** 因为点 $P(x,y)$ 为圆 $x^2+y^2=1$ 上的动点,所以 $x^2+4y=1-y^2+4y=-(y-2)^2+5$.因为 $y\in[-1,1]$,所以当 $y=-1$ 时,x^2+4y 取得最小值 -4.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】** (1)思路一:设圆心为 C,根据圆心 C 在直线 $x-2y-3=0$ 上,设出圆心 C 的坐标,利用 $|CA|=|CB|$ 构造关于点 C 坐标的方程求解;思路二:设出圆的标准方程,将圆心坐标代入 $x-2y-3=0$,将点 A,B 的坐标分别代入圆的方程,然后组成方程组求解;思路三:设出圆的一般方程,求出圆心坐标,再代入 $x-2y-3=0$,将点 A,B 的坐标分别代入圆的方程,然后组成方程组求解.(2)选其中的三点,利用待定系数法即可求出圆的方程.

(1)$(x+1)^2+(y+2)^2=10$　(2)$x^2+y^2-4x-6y=0$(或 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 或 $x^2+y^2-\dfrac{8}{3}x-\dfrac{14}{3}y=0$ 或 $x^2+y^2-\dfrac{16}{5}x-2y-\dfrac{16}{5}=0$)　**【解析】** (1)方法一:设点 C 为圆心,因为点 C 在直线 $x-2y-3=0$ 上,所以可设点 C 的坐标为 $(2a+3,a)$.又该圆经过 A,B 两点,所以 $|CA|=|CB|$,即 $\sqrt{(2a+3-2)^2+(a+3)^2}=\sqrt{(2a+3+2)^2+(a+5)^2}$,解得 $a=-2$,所以圆心 C 的坐标为 $(-1,-2)$,半径 $r=\sqrt{10}$,故所求圆的标准方程为 $(x+1)^2+(y+2)^2=10$.

方法二:设所求圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,由题意得 $\begin{cases}(2-a)^2+(-3-b)^2=r^2,\\(-2-a)^2+(-5-b)^2=r^2,\\a-2b-3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\\r^2=10,\end{cases}$ 故所求圆的标准方程为 $(x+1)^2+(y+2)^2=10$.

方法三:设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,则圆心坐标为 $\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$.由题意得 $\begin{cases}\left(-\dfrac{D}{2}\right)-2\times\left(-\dfrac{E}{2}\right)-3=0,\\4+9+2D-3E+F=0,\\4+25-2D-5E+F=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}D=2,\\E=4,\\F=-5,\end{cases}$ 故所求圆的方程为 $x^2+y^2+2x+4y-5=0$,即 $(x+1)^2+(y+2)^2=10$.

(2)若选 $(0,0),(4,0),(-1,1)$ 三点,设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,把这三点的坐标分别代入可得 $\begin{cases}F=0,\\4^2+4D+F=0,\\(-1)^2+1^2-D+E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}F=0,\\D=-4,\\E=-6,\end{cases}$ 所以圆的方程为 $x^2+y^2-4x-6y=0$.同理,若选 $(0,0),(4,0),(4,2)$ 三点,则圆的方程为 $x^2+y^2-4x-2y=0$.若选 $(0,0),(-1,1),(4,2)$ 三点,则圆的方程为 $x^2+y^2-\dfrac{8}{3}x-\dfrac{14}{3}y=0$.若选 $(4,0),(-1,1),(4,2)$ 三点,则圆的方程为 $x^2+y^2-\dfrac{16}{5}x-2y-\dfrac{16}{5}=0$.所以满足条件的圆的方程为 $x^2+y^2-4x-6y=0$(或 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 或 $x^2+y^2-\dfrac{8}{3}x-\dfrac{14}{3}y=0$ 或 $x^2+y^2-\dfrac{16}{5}x-2y-\dfrac{16}{5}=0$).

变式题 (1)$(x-1)^2+(y+1)^2=5$　(2)$(x-1)^2+(y-1)^2=2$(答案不唯一)　(3)$(x+1)^2+(y+4)^2=3$　**【解析】** (1)方法一:设 $\odot M$ 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,则 $\begin{cases}2a+b-1=0,\\(3-a)^2+b^2=r^2,\\a^2+(1-b)^2=r^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\\r^2=5,\end{cases}$ ∴ $\odot M$ 的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$.

方法二:设 $\odot M$ 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,则 $M\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$,∴ $\begin{cases}2\cdot\left(-\dfrac{D}{2}\right)+\left(-\dfrac{E}{2}\right)-1=0,\\9+3D+F=0,\\1+E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-2,\\E=2,\\F=-3,\end{cases}$ ∴ $\odot M$ 的方程为 $x^2+y^2-2x+2y-3=0$,即 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$.

方法三:∵ 点 M 在直线 $2x+y-1=0$ 上,∴可设点 M 为 $(a,1-2a)$,又点 $(3,0)$ 和 $(0,1)$ 均在 $\odot M$ 上,∴点 M 到点 $(3,0)$,$(0,1)$ 的距离相等,∴ $\sqrt{(a-3)^2+(1-2a)^2}=\sqrt{a^2+(-2a)^2}$,即 $a^2-6a+9+4a^2-4a+1=5a^2$,解得 $a=1$,∴$M(1,-1)$,$\odot M$ 的半径 $R=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$,∴ $\odot M$ 的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$.

方法四:由题可知,以 $(3,0)$ 和 $(0,1)$ 为端点的线段的垂直平分线的方程为 $y=3x-4$,由 $\begin{cases}y=3x-4,\\2x+y-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-1,\end{cases}$ ∴$M(1,-1)$,∴ $\odot M$ 的半径 $R=\sqrt{5}$,故 $\odot M$ 的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$.

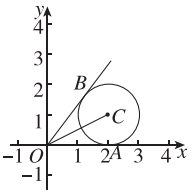
(2)设圆 C 的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.因为 A,B 分别位于 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴上,AB 为圆 C 的直径,所以原点在圆 C 上,即 $a^2+b^2=r^2$,又圆 C 与直线 $x+y=0$ 相切,所以 $\dfrac{|a+b|}{\sqrt{2}}=r$,可得 $r=\sqrt{2}a=\sqrt{2}b$.取 $a=1$,则 $b=1$,$r=\sqrt{2}$,此时圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.(答案不唯一,形如 $(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2$,$a>0$ 即可)

(3)圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=3$ 的圆心为 $(2,1)$,半径为 $\sqrt{3}$,设对称圆的圆心为 (a,b),由题意得 $\begin{cases}\dfrac{b-1}{a-2}=\dfrac{5}{3},\\3\times\dfrac{a+2}{2}+5\times\dfrac{b+1}{2}+6=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-4,\end{cases}$ 即对称圆的圆心为 $(-1,-4)$，又对称圆的半径也为 $\sqrt{3}$，所以对称圆的方程为 $(x+1)^2+(y+4)^2=3$.

例 2 **[思路点拨]** 根据 $\frac{y}{x}$ 的几何意义，结合图形可求得 $\frac{y}{x}$ 的最值，由此判断 A，B；根据 x^2+y^2 的几何意义求其最值，即可判断 C；利用三角换元，结合正弦函数的性质求 $x+y$ 的最大值，即可判断 D.

ABD **[解析]** 由实数 x,y 满足方程 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$，可得点 (x,y) 在圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 上，设圆心为 C，作出圆 C 如图所示. $\frac{y}{x}$ 表示点 (x,y) 与坐标原点 O 连线的斜率，设过坐标原点的圆的切线方程为 $y=kx$，则 $\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$，所以 $\frac{y}{x}\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$，所以 $\left(\frac{y}{x}\right)_{\max}=\frac{4}{3}$，$\left(\frac{y}{x}\right)_{\min}=0$，故 A，B 正确；$x^2+y^2$ 表示圆上的点 (x,y) 到坐标原点的距离的平方，圆上的点 (x,y) 到坐标原点的距离的最大值为 $|OC|+1$，所以 x^2+y^2 的最大值为 $(|OC|+1)^2$，又 $|OC|=\sqrt{2^2+1^2}$，所以 x^2+y^2 的最大值为 $6+2\sqrt{5}$，故 C 错误；因为 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 可化为 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$，所以可设 $x=2+\cos\theta$，$y=1+\sin\theta$，所以 $x+y=2+\cos\theta+1+\sin\theta=3+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $x+y$ 的最大值为 $3+\sqrt{2}$，故 D 正确. 故选 ABD.



变式题 **解**：将方程 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 变形可得 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$，则实数对 (x,y) 表示以点 $C(4,3)$ 为圆心，2 为半径的圆上任意一点.

(1)根据题意，当 $x\neq3$ 时，$p=\frac{y+1}{x-3}$ 的几何意义为圆上任意一点与点 $(3,-1)$ 连线的斜率.

设 $Q(3,-1)$，过点 Q 的圆 C 的切线斜率为 k，则切线方程为 $y+1=k(x-3)$，即 $kx-y-3k-1=0$，则点 C 到切线的距离 $d=\frac{|4k-3-3k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=2$，解得 $k=\frac{-4\pm2\sqrt{13}}{3}$，故 p 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{-4-2\sqrt{13}}{3}\right]\cup\left[\frac{-4+2\sqrt{13}}{3},+\infty\right)$.

(2)由 $s=2x-y$，得 $2x-y-s=0$，该方程表示一条直线，易知当直线和圆相切时，s 取得最大值和最小值.

当直线与圆相切时，$\frac{|5-s|}{\sqrt{1+4}}=2$，解得 $s=5-2\sqrt{5}$ 或 $s=5+2\sqrt{5}$，则 s 的最小值为 $5-2\sqrt{5}$，最大值为 $5+2\sqrt{5}$.

(3)$w=x^2+y^2-10x+2y+26=(x-5)^2+(y+1)^2$，设 $t=\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}$，则 t 的几何意义为圆 C 上任意一点与点 $(5,-1)$ 间的距离，设 $N(5,-1)$，则 $|CN|=\sqrt{17}$，则有 $\sqrt{17}-2\leqslant t\leqslant\sqrt{17}+2$，所以 $21-4\sqrt{17}\leqslant w\leqslant21+4\sqrt{17}$，故 w 的取值范围为 $[21-4\sqrt{17},21+4\sqrt{17}]$.

例 3 **[思路点拨]** (1)思路一：设 $P(3+\cos\theta,4+\sin\theta)$，根据题中条件及辅助角公式可得 m 的最大值；思路二：根据圆心 C 到原点 $O(0,0)$ 的距离为 5，可得圆 C 上的点到原点 O 的距离的最大值为 6，再由 $\angle APB=90°$，可得 $|OP|=m$，可得 $m\leqslant6$，从而得到答案. (2)先求出向量的坐标表示，再利用向量数量积的坐标公式及圆的方程求解.

(1)B (2)0 **[解析]** (1)方法一：设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，由 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$，可设 $\begin{cases}x_0=3+\cos\theta,\\y_0=4+\sin\theta.\end{cases}$ ∵ $\angle APB=90°$，∴ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，可得 $(x_0+m)(x_0-m)+y_0^2=0$，∴ $m^2=x_0^2+y_0^2=26+6\cos\theta+8\sin\theta=26+10\sin(\theta+\varphi)\left(\tan\varphi=\frac{3}{4}\right)$，∴ $4\leqslant m\leqslant6$，∴ m 的最大值为 6. 故选 B.

方法二：设 O 为坐标原点，连接 OP,OC，在 $\mathrm{Rt}\triangle APB$ 中，原点 O 为斜边的中点，$|AB|=2m(m>0)$，∴ $m=|OP|\leqslant|OC|+r$（r 为圆 C 的半径），又 $C(3,4)$，$r=1$，∴ $|OP|\leqslant6$，即 $m\leqslant6$. 故选 B.

(2)由题意知 $\overrightarrow{PA}=(2-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-2-x,-y)$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2+y^2-4$，因为点 $P(x,y)$ 是圆上的点，所以其坐标满足方程 $x^2+(y-3)^2=1$，即 $x^2=-(y-3)^2+1$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-(y-3)^2+1+y^2-4=6y-12$. 由圆的方程为 $x^2+(y-3)^2=1$，可知 $2\leqslant y\leqslant4$，所以当 $y=2$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值最小，最小值为 $6\times2-12=0$.

变式题 (1)B (2)$1-\sqrt{2}$ **[解析]** (1)方法一：易得 $|PA|^2+|PB|^2=4$，可得 $\left(\frac{|PA|+|PB|}{2}\right)^2\leqslant\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}=2$，当且仅当 $|PA|=|PB|=\sqrt{2}$ 时取等号，所以 $|PA|+|PB|\leqslant2\sqrt{2}$. 故选 B.

方法二：易得 $|PA|^2+|PB|^2=4$，设 $\angle PAB=\theta\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $|PA|=2\cos\theta$，$|PB|=2\sin\theta$，所以 $|PA|+|PB|=2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $(|PA|+|PB|)_{\max}=2\sqrt{2}$. 故选 B.

(2)因为 $|AB|=\sqrt{2}$，$|OA|=|OB|=1$，所以 $|OA|^2+|OB|^2=|AB|^2$，所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$. 以 O 为坐标原点，OA，OB 所在直线分别为 x,y 轴建立平面直角坐标系（$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的方向分别为 x,y 轴正方向），则 $A(1,0)$，$B(0,1)$，设 $C(x,y)$，则 $x^2+y^2=1$，$\overrightarrow{AC}=(x-1,y)$，$\overrightarrow{BC}=(x,y-1)$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=x(x-1)+y(y-1)=x^2+y^2-x-y=-x-y+1$. 设 $-x-y+1=t$，即 $x+y+t-1=0$. 依题意，直线 $x+y+t-1=0$ 与圆 O 有交点，所以 $\frac{|t-1|}{\sqrt{1+1}}\leqslant1$，解得 $1-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant1+\sqrt{2}$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最小值为 $1-\sqrt{2}$.

例 4 **[思路点拨]** (1)设动点 P 的坐标为 (x_1,y_1)，根据已知条件建立方程，化简求解；(2)利用相关点法求解.

解：(1)设动点 P 的坐标为 (x_1,y_1)，因为 $M(1,0)$，$N(2,0)$，且 $|PN|=\sqrt{2}|PM|$，所以 $\sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}$，整理得 $x_1^2+y_1^2=2$，所以动点 P 的轨迹 C 的方程为 $x^2+y^2=2$.

(2)设点 Q 的坐标为 (x,y)，点 A 的坐标为 (x_0,y_0)，

因为 Q 是线段 AB 上靠近点 B 的三等分点，

所以 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QB}$，即 $(x-x_0,y-y_0)=2(6-x,-y)$，

解得 $\begin{cases}x_0=3x-12,\\y_0=3y,\end{cases}$ 又点 A 在轨迹 C 上运动，所以 $(3x-12)^2+(3y)^2=2$，化简得 $y^2+(x-4)^2=\frac{2}{9}$，

所以点 Q 的轨迹方程为 $y^2+(x-4)^2=\frac{2}{9}$.

变式题 (1)C (2)BCD **[解析]** (1)因为 $A(-3,4)$，$B(-3,1)$，动点 $P(x,y)$ 满足 $|PA|=2|PB|$，所以 $(x+3)^2+(y-4)^2=4(x+3)^2+4(y-1)^2$，整理得 $(x+3)^2+y^2=4$，$\sqrt{(x-1)^2+(y-t)^2}$ 可以看成圆 $(x+3)^2+y^2=4$ 上的动点 $P(x,y)$ 与定直线 $x=1$ 上的动点 $Q(1,t)$ 的距离，其最小值为圆心 $M(-3,0)$ 到直线 $x=1$ 的距离减去圆的半径 2，即 $|PQ|\geqslant4-2=2$，因此 $(x-1)^2+(y-t)^2$ 的最小值是 $2^2=4$. 故选 C.

(2)设 $P(x,y)$，由条件可得 $\sqrt{(x+4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，即 $x^2+y^2-8x=0$，所以 C 的方程为 $(x-4)^2+y^2=16$，故 A 错误；由对称性可知存在 $D(12,0)$，$E(6,0)$ 满足条件，故 B 正确；$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}=(-4-x,-y)\cdot(-x,-y)=x^2+4x+y^2=12x$，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PO}=(2-x,-y)\cdot(-x,-y)=x^2-2x+y^2=6x$，$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{(-4-x)^2+(-y)^2}=4\sqrt{x+1}$，$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(2-x)^2+(-y)^2}=2\sqrt{x+1}$，所以 $\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PO}|}=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PO}|}$，即 $\cos\angle APO=\cos\angle BPO$，所以 $\angle APO=\angle BPO$，故 C 正确；连接 BQ，则 $k_{BQ}=-3$，线段 BQ 的垂直平分线 l 的斜率 $k=\frac{1}{3}$，BQ 的中点坐标为 $(1,3)$，则线段 BQ 的

垂直平分线 l 的方程为 $y-3=\frac{1}{3}(x-1)$，即 $x-3y+8=0$，圆 C 的圆心 $(4,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{12}{\sqrt{10}}<4$，所以直线 l 与圆 C 相交，故在 C 上存在点 M，使得 $|MQ|=|MB|$，故 D 正确. 故选 BCD.

第 50 讲　直线与圆、圆与圆的位置关系

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $<$　$=$　$>$　$>$　$=$　$<$
2. $d>R+r$　$d=R+r$　$R-r<d<R+r$　$d=R-r$　$d<R-r$

【对点演练】

1. $x+\sqrt{2}y-3\sqrt{3}=0$　**【解析】** ∵点 $A(\sqrt{3},\sqrt{6})$ 是圆 $x^2+y^2=r^2$ 上的一点，∴$(\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2=r^2$，即 $r^2=9$. 圆 $x^2+y^2=9$ 的圆心为 $O(0,0)$，直线 OA 的斜率 $k_{OA}=\frac{\sqrt{6}-0}{\sqrt{3}-0}=\sqrt{2}$，∵直线 OA 与过点 A 的圆的切线垂直，∴过点 A 的圆的切线的斜率是 $-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴过点 A 的圆的切线方程是 $y-\sqrt{6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{3})$，即 $x+\sqrt{2}y-3\sqrt{3}=0$.

2. $\sqrt{10}$　**【解析】** 方法一：联立直线 l 与圆 C 的方程，得 $\begin{cases}3x+y-6=0,\\x^2+y^2-2y-4=0,\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-3x+2=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=2$，所以直线 l 与圆 C 相交，有两个公共点. 设两个公共点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，把 $x_1=1$，$x_2=2$ 分别代入 $3x+y-6=0$，得 $y_1=3$，$y_2=0$，所以直线 l 与圆 C 的两个交点分别为 $A(1,3)$，$B(2,0)$，则 $|AB|=\sqrt{(1-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$.
方法二：圆 $C:x^2+y^2-2y-4=0$ 的圆心 $C(0,1)$，半径 $r=\sqrt{5}$，因为圆心 C 到直线 $l:3x+y-6=0$ 的距离 $d=\frac{|1-6|}{\sqrt{9+1}}=\frac{5}{\sqrt{10}}$，所以直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $2\times\sqrt{5-\frac{25}{10}}=\sqrt{10}$.

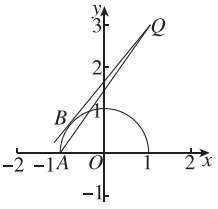
3. 外切　3　**【解析】** 两圆的方程 $x^2+y^2-6y+8=0$，$x^2+y^2-4=0$ 可分别化为 $x^2+(y-3)^2=1$，$x^2+y^2=4$，则两圆圆心分别为 $O_1(0,3)$，$O_2(0,0)$，半径分别为 $r_1=1$，$r_2=2$. 连接 O_1O_2，因为 $|O_1O_2|=3=r_2+r_1$，所以两圆外切，这两个圆有 3 条公切线.

4. $x-y+2=0$　**【解析】** 由 $x^2+y^2-4=0$，$x^2+y^2-4x+4y-12=0$ 等号两边对应相减得 $4x-4y+8=0$，即 $x-y+2=0$，故公共弦所在的直线方程为 $x-y+2=0$.

5. $\pm4\sqrt{2}$ 或 $\pm2\sqrt{3}$　**【解析】** 两圆的圆心距 $d=\sqrt{2^2+a^2}$，由两圆相切(外切或内切)，得 $\sqrt{2^2+a^2}=5+1$ 或 $\sqrt{2^2+a^2}=5-1$，解得 $a=\pm4\sqrt{2}$ 或 $a=\pm2\sqrt{3}$.

6. $x=3$ 或 $4x+3y-15=0$　**【解析】** 当直线的斜率不存在时，该直线的方程为 $x=3$，代入圆的方程解得 $y=\pm4$，故该直线被圆截得的弦长为 8，符合题意；当直线的斜率存在时，不妨设直线的方程为 $y-1=k(x-3)$，即 $kx-y-3k+1=0$，圆心 $(0,0)$ 到直线的距离 $d=\frac{|-3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$，则 $2\sqrt{5^2-\left(\frac{|-3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2}=8$，解得 $k=-\frac{4}{3}$，所以直线的方程为 $4x+3y-15=0$. 综上所述，所求直线的方程为 $x=3$ 或 $4x+3y-15=0$.

7. $\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right]$　**【解析】** 由 $y=kx+3-k$ 知直线 l 过定点 $Q(1,3)$，由曲线 $C:y=\sqrt{1-x^2}$，两边平方得 $x^2+y^2=1$，则曲线 C 是以 $(0,0)$ 为圆心，1 为半径，且位于 x 轴及其上方的半圆，如图. 当直线 l 过点 $A(-1,0)$ 时，直线 l 与曲线有两个不同的交点，此时 $0=-k+3-k$，解得 $k=\frac{3}{2}$；当直线 l 与曲线相切时，直线和曲线有一个交点，由圆心 $(0,0)$ 到直线 $y=kx+3-k$ 的距离 $d=\frac{|3-k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，得 $k=\frac{4}{3}$. 由图可知，若直线 $l:y=kx+3-k$ 与曲线 $C:y=\sqrt{1-x^2}$ 恰有两个交点，则 $\frac{4}{3}<k\leqslant\frac{3}{2}$.



● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】** (1)求出直线 l 过的定点，再判断此定点与圆 C 的位置关系，即可得直线 l 与圆 C 的位置关系. (2)首先求出点 A 关于直线 $y=a$ 对称的点 A' 的坐标，即可得到直线 l 的方程，根据圆心到直线 l 的距离小于或等于半径得到不等式，从而得解.

(1)D　(2)$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$　**【解析】** (1)直线 $l:(m^2+m+1)x+(3-2m)y-2m^2-5=0$，即 $(x-2)m^2+(x-2y)m+(x+3y-5)=0$，由 $\begin{cases}x-2=0,\\x-2y=0,\\x+3y-5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 因此，直线 l 恒过定点 $A(2,1)$ 且不为直线 $y=1$. 圆 $C:x^2+y^2-2x=0$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，显然点 A 在圆 C 外，所以直线 l 与圆 C 可能相离，可能相切，也可能相交. 故选 D.
(2)由题意知直线 l 过点 B. 点 $A(-2,3)$ 关于直线 $y=a$ 的对称点为 $A'(-2,2a-3)$，所以直线 l 的方程为 $y=\frac{(2a-3)-a}{-2-0}x+a$，即 $(a-3)x+2y-2a=0$. 由题意知，圆心 $C(-3,-2)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-3(a-3)+2\times(-2)-2a|}{\sqrt{(a-3)^2+4}}\leqslant1$，整理得 $6a^2-11a+3\leqslant0$，解得 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，故 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$.

变式题　(1)B　(2)ABD　(3)$\pm\sqrt{2}$　**【解析】** (1)根据题意可知，圆 M 的标准方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，∴圆心为 $M(1,0)$，半径为 1，∵对直线 l 上任意一点 P，在圆 M 上存在点 Q，使得 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$，∴直线 l 与圆 M 相切或相离，∴$\frac{|k-k+2|}{\sqrt{1+k^2}}\geqslant1$，解得 $-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$. 故选 B.
(2)对于 A，∵点 A 在圆 C 上，∴$a^2+b^2=r^2$，∴圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$，直线 l 与圆 C 相切，A 正确；对于 B，∵点 A 在圆 C 内，∴$a^2+b^2<r^2$，∴圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}>r$，∴直线 l 与圆 C 相离，B 正确；对于 C，∵点 A 在圆 C 外，∴$a^2+b^2>r^2$，∴圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}<r$，∴直线 l 与圆 C 相交，C 错误；对于 D，∵点 A 在直线 l 上，∴$a^2+b^2=r^2$，∴圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$，∴直线 l 与圆 C 相切，D 正确. 故选 ABD.
(3)直线 l 的方程为 $y=x-a$，即 $x-y-a=0$. 因为圆 $x^2+y^2=4$ 上恰有 3 个点到 l 的距离为 1，所以圆心 $(0,0)$ 到直线 l 的距离为 1，故 $\frac{|-a|}{\sqrt{2}}=1$，解得 $a=\pm\sqrt{2}$.

例 2　**【思路点拨】** (1)求出直线所过定点 P 的坐标，并判断点 P 与圆的位置关系，进而确定 $|AB|$ 最小时直线 l 与直线 CP 的位置关系，即可得结果. (2)计算出圆心到直线的距离，利用勾股定理可得出关于 m 的方程，即可解得 m 的值.
(1)A　(2)2　**【解析】** (1)$mx-y-3m+1=0$ 可化为 $m(x-3)-y+1=0$，∴直线 l 恒过点 $P(3,1)$，∵$(3-1)^2+(1-2)^2=5<25$，∴点 P 在圆 C 内部. 当圆心 $C(1,2)$ 与点 P 的连线与直线 l 垂直时，所得弦长最短，即 $|AB|$ 最小. 由 $|CP|=\sqrt{5}$，圆的半径为 5，得 $|AB|$ 的最小值为 $2\times\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$. 故选 A.
(2)圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 的圆心坐标为 $(1,1)$，半径为 $\sqrt{3}$，则圆心到直线 $x-y+m=0(m>0)$ 的距离为 $\frac{|1-1+m|}{\sqrt{2}}=$

$\frac{m}{\sqrt{2}}$，由勾股定理可得$\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2=3$，因为$m>0$，所以$m=2$.

变式题 (1)B (2)0或$\frac{4}{3}$ **【解析】**(1)圆M的标准方程为$(x-3)^2+(y-4)^2=25$，即圆的圆心为$M(3,4)$，半径为5，由$(0-3)^2+(4-4)^2=9<25$，知点$P(0,4)$在圆内，则最短的弦是以$P(0,4)$为中点的弦，所以$25=\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2+9$，所以$|AC|=8$，过$P(0,4)$最长的弦$BD$为直径，所以$|BD|=10$，又$AC\perp BD$，所以$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|=40$. 故选B.

(2)由$(x-1)^2+(y-1)^2=4$可知圆心为$C(1,1)$，半径为2，设直线与圆交于A,B两点，∵直线$y=k(x+1)$截圆$(x-1)^2+(y-1)^2=4$所得两段圆弧的弧长之比为$1:2$，∴$\angle ACB=120°$，∴圆心到直线的距离为半径的一半，∴$\frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得$k=0$或$k=\frac{4}{3}$.

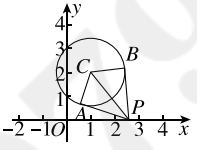
例3 **【思路点拨】**(1)分斜率存在与不存在两种情况讨论，利用圆心到切线的距离等于半径，求解可得. (2)思路一：由题知切点分别为$A(0,2),B(2,0)$或$A(2,0),B(0,2)$，进而求直线AB的方程即可；思路二：根据圆的切线方程的常用结论求解.

(1)$x=0$或$3x+4y=0$ (2)$x+y-2=0$ **【解析】**(1)圆$C:(x-2)^2+(y-1)^2=4$的圆心为$C(2,1)$，半径$r=2$. 当切线的斜率不存在时，易知直线$x=0$是圆的切线，满足题意；当切线的斜率存在时，设斜率为k，则切线的方程为$y=kx$，所以$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得$k=-\frac{3}{4}$，所以切线方程为$3x+4y=0$. 故所求直线的方程为$3x+4y=0$或$x=0$.

(2)方法一：由题知，圆$x^2+y^2=4$的圆心为$(0,0)$，半径$r=2$. 过点$P(2,2)$作圆$x^2+y^2=4$的两条切线，易知切点分别为$A(0,2),B(2,0)$或$A(2,0),B(0,2)$，所以$k_{AB}=-1$，所以直线AB的方程为$y=-x+2$，即$x+y-2=0$.

方法二：过圆$x^2+y^2=r^2$外一点$M(x_0,y_0)$作圆的两条切线，则两切点所在直线方程为$x_0x+y_0y=r^2$. 故所求直线方程为$2x+2y=4$，即$x+y-2=0$.

变式题 (1)B (2)C **【解析】**(1)如图，当PA和PB与圆C相切时，$\angle APB$最大，要使圆C上存在两点A,B使得$\angle APB=\frac{\pi}{3}$，则$\angle APC\geqslant\frac{\pi}{6}$，∴$|PC|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{2}$，即$\sqrt{(x_0-1)^2+(0-2)^2}\leqslant2\sqrt{2}$，解得$-1\leqslant x_0\leqslant3$. 故选B.



(2)方法一：因为圆$C:x^2+(y-2)^2=16$的圆心$C(0,2)$在直线$ax+by-12=0$上，所以$2b-12=0$，解得$b=6$. 设点$P(t,-6)$，则$|PC|^2=t^2+(-6-2)^2=t^2+64$，故以$PC$为直径的圆的方程为$\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}(t^2+64)$，与方程$x^2+(y-2)^2=16$相减可得直线$MN$的方程为$-tx+8y=0$，故直线$MN$恒过定点$Q(0,0)$. 故选C.

方法二：因为圆$C:x^2+(y-2)^2=16$的圆心$C(0,2)$在直线$ax+by-12=0$上，所以$2b-12=0$，解得$b=6$. 设点$P(t,-6)$，因为圆$C:x^2+y^2-4y-12=0$，所以直线MN的方程为$tx-6y-4\times\frac{y-6}{2}-12=0$，即$tx-8y=0$，故直线$MN$恒过定点$(0,0)$. 故选C.

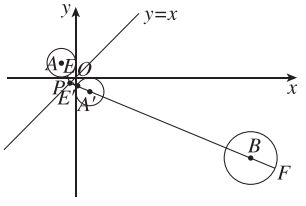
例4 **【思路点拨】**(1)首先得出切线长$|PM|$的表达式，再根据二次函数求最值的方法求解即可. (2)由已知得四边形面积为$2\times\left(\frac{1}{2}|PA|\cdot|AC|\right)=|PA|\cdot|AC|=\sqrt{|PC|^2-1}$，则要使$|PC|\cdot|AC|$最小，只需$|PC|$最小，此时$PC$与直线垂直.

(1)A (2)$\sqrt{3}$ **【解析】**(1)圆$O:x^2+y^2=4$的圆心为$O(0,0)$，半径$r=2$，设$P(x_0,y_0)$，则$2x_0+y_0=10$，即$y_0=10-2x_0$，则$|PM|=\sqrt{|PO|^2-2^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2-4}=\sqrt{5x_0^2-40x_0+96}=\sqrt{5(x_0-4)^2+16}\geqslant\sqrt{16}=4$（当且仅当$x_0=4$时等号成立）. 故选A.

(2)圆$C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$的圆心是$C(1,1)$，半径$r=1$，易知$|PC|$的最小值等于圆心$C(1,1)$到直线$3x+4y+3=0$的距离，为$\frac{10}{5}=2$，且$|AC|=r=1$. 四边形$PACB$的面积为$2\times\left(\frac{1}{2}|PA|\cdot|AC|\right)=|PA|\cdot|AC|=|PA|=\sqrt{|PC|^2-1}$，则四边形$PACB$的面积的最小值是$\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$.

变式题 (1)B (2)16 (3)$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ **【解析】**(1)由题可知，直线$kx-y+2k=0$恒过定点$M(-2,0)$，直线$x+ky-2=0$恒过定点$N(2,0)$，直线$kx-y+2k=0$与直线$x+ky-2=0$垂直. 显然点P与点M不重合，当点P与点N不重合时，$PM\perp PN$，则$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，当点$P$与点$N$重合时，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$. 设点$P(x,y)$，则$\overrightarrow{PM}=(-2-x,-y)$，$\overrightarrow{PN}=(2-x,-y)$，由$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，得$x^2+y^2=4$，因此，点$P$的轨迹是以原点为圆心，2为半径的圆（除点$M$外）. 当射线$AP$旋转到与圆$O:x^2+y^2=4$相切时，$\angle OAP$最大，即$\tan\angle OAP$最大. 设$AP'$为切线，点$P'$为切点，易知$|OA|=4$，$|OP'|=2$，$\angle OP'A=90°$，则$\angle OAP'=30°$，所以$\angle OAP$的最大值为$30°$，$\tan\angle OAP$的最大值为$\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选B.

(2)设直线$l:y=x$，圆$A:(x+1)^2+(y-1)^2=1$，圆$B:(x-13)^2+(y+6)^2=4$，易知点$A(-1,1)$关于直线l的对称点为$A'(1,-1)$，以A'为圆心，1为半径的圆A'即为圆A关于直线l的对称圆. 设点E关于直线l的对称点为E'，连接PE'，则有$|PE|=|PE'|$，所以$|PF|-|PE|=|PF|-|PE'|$. 如图，连接$E'F$，则$|PF|-|PE'|\leqslant|E'F|$，当且仅当P,E',F三点共线时取等号，故求$|PF|-|PE|$的最大值问题即可转换为求$|E'F|$的最大值问题，易知当直线$E'F$过圆心A'和圆心B且E',F距离最远且点P恰好为直线$E'F$与直线l的交点时，$|E'F|$取得最大值. 由题意知$A'(1,-1)$，$B(13,-6)$，两圆的半径分别为1和2，故$|E'F|$的最大值为$\sqrt{(13-1)^2+[-6-(-1)]^2}+1+2=16$.



(3)圆$C_1:(x-a)^2+y^2=4$的圆心为$C_1(a,0)$，半径$r_1=2$，圆$C_2:x^2+(y-b)^2=1$的圆心为$C_2(0,b)$，半径$r_2=1$. 连接C_1C_2，若两圆相交，则$|r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$，所以$1<\sqrt{a^2+b^2}<3$，即$1<a^2+b^2<9$. 又$AB$所在直线的方程为$(x-a)^2+y^2-x^2-(y-b)^2=4-1$，即$2ax-2by-a^2+b^2+3=0$，所以圆心$C_1(a,0)$到直线$AB$的距离$d_1=\frac{|2a^2-0-a^2+b^2+3|}{\sqrt{4a^2+4b^2}}=\frac{|a^2+b^2+3|}{2\sqrt{a^2+b^2}}$，圆心$C_2(0,b)$到直线$AB$的距离$d_2=\frac{|0-2b^2-a^2+b^2+3|}{\sqrt{4a^2+4b^2}}=\frac{|a^2+b^2-3|}{2\sqrt{a^2+b^2}}$，则$|AB|=2\sqrt{r_1^2-d_1^2}=2\sqrt{r_2^2-d_2^2}=2$，所以$\begin{cases}d_1=\sqrt{3},\\d_2=0,\end{cases}$则$\begin{cases}\frac{|a^2+b^2+3|}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{3},\\\frac{|a^2+b^2-3|}{2\sqrt{a^2+b^2}}=0,\end{cases}$所以$a^2+b^2=3$. 因为存在$a$，使得$|AB|=2$，所以$b^2\leqslant3$，即$-\sqrt{3}\leqslant b\leqslant\sqrt{3}$，所以$b$的取值范围为$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

例5 **【思路点拨】**(2)设$P(x,y)$，由$AP\perp BP$可得点P的轨迹方程，即可判断该轨迹与圆O的交点个数.

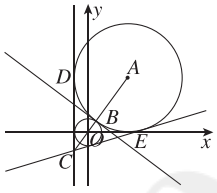
(1)AC (2)B **【解析】**(1)圆$O_1:(x-1)^2+y^2=4$的圆心为$O_1(1,0)$，半径$r_1=2$，若$m=4$，则圆$O_2:(x-5)^2+y^2=16$，则圆心为$O_2(5,0)$，半径$r_2=4$，可得$|O_1O_2|=4$，$r_1+r_2=6$，$|r_1-r_2|=2$，所以$|r_1-r_2|<|O_1O_2|<r_1+r_2$，则圆$O_1$与圆$O_2$相交，故A正确，B错误；若直线$x-y=0$与圆

O_2 相交，则圆心 $O_2(5,0)$ 到直线 $x-y=0$ 的距离 $d=\frac{|5-0|}{\sqrt{2}}<\sqrt{4m}$，解得 $m>\frac{25}{8}$，故 C 正确；圆心 $O_1(1,0)$ 到直线 $x-y=0$ 的距离 $d_1=\frac{|1-0|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $|MN|=2\sqrt{r_1^2-d_1^2}=2\sqrt{4-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{14}$，故 D 错误. 故选 AC.

(2)设点 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x+3,y)$，$\overrightarrow{BP}=(x,y-4)$，由 $AP\perp BP$，得 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=x(x+3)+y(y-4)=x^2+y^2+3x-4y=0$，即 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$，故点 P 的轨迹是圆心为 $\left(-\frac{3}{2},2\right)$，半径为 $\frac{5}{2}$ 的圆，该圆与圆 O 的圆心距为 $\frac{5}{2}$，半径之和为 $\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$，半径之差为 $\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$，所以两圆相交，所以满足这样的点 P 有 2 个. 故选 B.

变式题 (1)BD (2)$3x+4y-5=0$(或 $x=-1$ 或 $7x-24y-25=0$) **【解析】**(1)由已知得圆 C_1 的圆心 $C_1(0,0)$，半径 $r_1=3$，圆 C_2 的圆心 $C_2(3,4)$，半径 $r_2=4$，$|C_1C_2|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$，则 $r_2-r_1<|C_1C_2|<r_1+r_2$，故两圆相交，所以 C_1 与 C_2 的公切线恰有 2 条，故 A 错误. 两圆的方程相减得 C_1 与 C_2 相交弦的方程为 $3x+4y-9=0$，故 B 正确. 点 C_1 到相交弦的距离为 $\frac{9}{5}$，故相交弦的弦长为 $2\times\sqrt{9-\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$，故 C 错误. 若 P,Q 分别是圆 C_1,C_2 上的动点，则 $|PQ|_{\max}=|C_1C_2|+r_1+r_2=12$，故 D 正确. 故选 BD.

(2)方法一：如图，由图易知 $x=-1$ 为公切线 CD 的方程. 设切点 $B(\cos\theta,\sin\theta)$，则由 $A(3,4)$ 可知 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$，所以 $B\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，又 $k_{OA}=\frac{4}{3}$，所以过点 B 的公切线的斜率为 $-\frac{3}{4}$，所以过点 B 的公切线的方程为 $y-\frac{4}{5}=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{5}\right)$，即 $3x+4y-5=0$. 由 $\begin{cases}x=-1,\\y=\frac{4}{3}x,\end{cases}$ 可得 $C\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$，设公切线 CE 的方程为 $y+\frac{4}{3}=k(x+1)$，即 $3kx-3y+3k-4=0$，由 $\frac{|3k-4|}{\sqrt{9k^2+9}}=1$，解得 $k=\frac{7}{24}$，所以公切线 CE 的方程为 $7x-24y-25=0$.



方法二：显然公切线的斜率不为 0，设公切线的方程为 $x+by+c=0$，则 $\frac{|c|}{\sqrt{1+b^2}}=1$，$\frac{|3+4b+c|}{\sqrt{1+b^2}}=4$，故 $c^2=1+b^2$①，$|3+4b+c|=|4c|$，所以 $3+4b+c=4c$ 或 $3+4b+c=-4c$，再结合①可得 $\begin{cases}b=0,\\c=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=-\frac{24}{7},\\c=-\frac{25}{7}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=\frac{4}{3},\\c=-\frac{5}{3},\end{cases}$ 所以公切线有三条，其方程分别为 $x+1=0$，$7x-24y-25=0$，$3x+4y-5=0$(填一个即可).

第 51 讲　椭圆

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 和　大于 $|F_1F_2|$　焦点　焦距　(1)$a>c$　(2)$a=c$　(3)$a<c$
2. $-a\leqslant x\leqslant a$　$-b\leqslant y\leqslant b$　$-b\leqslant x\leqslant b$　$-a\leqslant y\leqslant a$　坐标轴　$(0,0)$　$(-a,0)$　$(a,0)$　$(0,-b)$　$(0,b)$　$(0,-a)$　$(0,a)$　$(-b,0)$　$(b,0)$　$2a$　$2b$　$2c$　$(0,1)$　a^2-b^2
3. (1)没有　一个　两个　(2)$\Delta>0$　$\Delta=0$　$\Delta<0$
4. $|y_1-y_2|$　$|x_1-x_2|$

【对点演练】

1. 14　36　**【解析】**根据椭圆的定义得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，由 $a^2=100$，得 $a=10$，所以 $6+|PF_2|=20$，故 $|PF_2|=14$. 由 $c^2=a^2-b^2=100-36=64$，得 $c=8$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=20+16=36$.
2. 8　$\frac{\sqrt{3}}{2}$　$(0,-2\sqrt{3}),(0,2\sqrt{3})$　**【解析】**椭圆方程可化为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$，则 $a=4,b=2,c=2\sqrt{3}$，所以椭圆的长轴长为 8，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，焦点坐标为 $(0,-2\sqrt{3}),(0,2\sqrt{3})$.
3. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　**【解析】**设 d 是点 M 到直线 $l:x=\frac{25}{4}$ 的距离，则 $\frac{|MF|}{d}=\frac{4}{5}$，即 $\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{\left|\frac{25}{4}-x\right|}=\frac{4}{5}$，整理得 $9x^2+25y^2=225$，即 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.
4. $\frac{4\sqrt{38}}{5}$　**【解析】**由 $\begin{cases}y=x+1,\\x^2+4y^2=16,\end{cases}$ 得 $5x^2+8x-12=0$，设此方程的两实根为 x_1,x_2，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{8}{5},\\x_1x_2=-\frac{12}{5},\end{cases}$ 故所得弦长为 $\sqrt{1+1^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{48}{5}}=\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{304}{25}}=\frac{4\sqrt{38}}{5}$.
5. 线段　**【解析】**由题意知 $|MF_1|+|MF_2|=12$，$|F_1F_2|=12$，即 $|MF_1|+|MF_2|=|F_1F_2|$，所以点 M 的轨迹是线段.
6. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 或 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$　**【解析】**∵椭圆 C 的中心在原点，其长轴长为 4，焦距为 2，∴$a=2,c=1$，∴$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$. 当椭圆的焦点在 x 轴上时，C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；当椭圆的焦点在 y 轴上时，C 的方程为 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.
7. 1　**【解析】**设 $P(x,y)$，依题意得 $F_1(-2,0),F_2(2,0)$，则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-2-x)(2-x)+y^2=x^2+y^2-4=\frac{4}{9}x^2+1$，因为 $0\leqslant x^2\leqslant9$，所以 $1\leqslant\frac{4}{9}x^2+1\leqslant5$，所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最小值是 1.

| 第 1 课时　椭圆及其性质 |

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】**(1)根据圆与圆的位置关系，得到圆心距之间的关系，由定义可知动点轨迹为椭圆，求出方程即可. (2)思路一：根据焦点三角形面积公式求出 $\triangle PF_1F_2$ 的面积，即可得到点 P 的坐标，从而得出 $|OP|$ 的值；思路二：利用椭圆的定义以及余弦定理求出 $|PF_1||PF_2|$，$|PF_1|^2+|PF_2|^2$ 的值，再结合中线的向量公式以及数量积即可得解；思路三：利用椭圆的定义以及余弦定理求出 $|PF_1|^2+|PF_2|^2$ 的值，然后根据三角形中线定理即可得出 $|OP|$ 的值.

(1)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　(2)B　**【解析】**(1)圆 $F_1:(x+1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $F_1(-1,0)$，半径 $r_1=1$，圆 $F_2:(x-1)^2+y^2=25$ 的圆心为 $F_2(1,0)$，半径 $r_2=5$. 设动圆 C 的圆心为 $C(x,y)$，半径为 R，由题得 $|F_1C|=R+1$，$|F_2C|=5-R$，∴$|F_1C|+|F_2C|=6>|F_1F_2|=2$，∴圆心 C 的轨迹是椭圆，设其标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $2a=6,2c=2$，可得 $a=3$，$c=1$，∴$b^2=a^2-c^2=8$，∴动圆圆心 C 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

(2)方法一：设 $\angle F_1PF_2=2\theta$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}=b^2\tan\theta$. 由 $\cos\angle F_1PF_2=\cos2\theta=$

$\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{3}{5}$，可得 $\tan\theta=\frac{1}{2}$. 由椭圆方程可知，$a^2=9$，$b^2=6$，$c^2=a^2-b^2=3$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_P|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times|y_P|=6\times\frac{1}{2}$，所以 $y_P^2=3$，则 $x_P^2=9\times\left(1-\frac{3}{6}\right)=\frac{9}{2}$，故 $|OP|=\sqrt{x_P^2+y_P^2}=\sqrt{3+\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$. 故选 B.

方法二：由题可知，$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$①，$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2$，即 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-\frac{6}{5}|PF_1||PF_2|=12$②，联立①②，可得 $|PF_1||PF_2|=\frac{15}{2}$，$|PF_1|^2+|PF_2|^2=21$，又 $\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2})$，所以 $|OP|=|\overrightarrow{PO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$，即 $|OP|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PF_1}|^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+|\overrightarrow{PF_2}|^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{21+2\times\frac{3}{5}\times\frac{15}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$. 故选 B.

方法三：由题可知，$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$①，$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2$，即 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-\frac{6}{5}|PF_1||PF_2|=12$②，联立①②，可得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=21$，由三角形中线定理可知，$(2|OP|)^2+|F_1F_2|^2=2(|PF_1|^2+|PF_2|^2)=42$，易知 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，解得 $|OP|=\frac{\sqrt{30}}{2}$. 故选 B.

变式题 (1)D (2)$\sqrt{15}$ **【解析】**(1)圆 $(x+1)^2+y^2=25$ 的圆心为 $C(-1,0)$，半径 $r=5$. ∵M 为 AQ 的垂直平分线上一点，∴$|AM|=|MQ|$，∴$|MC|+|MA|=|MC|+|MQ|=|CQ|=5>|AC|=2$，故 M 的轨迹是以定点 C，A 为焦点的椭圆，且 $a=\frac{5}{2}$，$c=1$，则 $b^2=a^2-c^2=\frac{21}{4}$，∴点 M 的轨迹方程为 $\frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{21}=1$. 故选 D.

(2)由题得 $2a=6$，$2c=4$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，故以 F_1F_2 为直径的圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$，圆 O 的半径为 2，则 $|F_1O|=|OA|=2$. 因为 $OA/\!/PF_2$，所以 $\frac{|F_1O|}{|F_1F_2|}=\frac{|OA|}{|F_2P|}=\frac{1}{2}$，所以 $|F_2P|=4$，又点 P 在椭圆 C 上，所以 $|F_1P|+|F_2P|=2a=6$，则 $|F_1P|=2$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle PF_1F_2=\frac{|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}{2|PF_1|\cdot|F_1F_2|}=\frac{2^2+4^2-4^2}{2\times2\times4}=\frac{1}{4}$，故 $\sin\angle PF_1F_2=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|F_1F_2|\sin\angle PF_1F_2=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$.

例 2 **【思路点拨】**(1)由已知条件求出椭圆的长半轴长和短半轴长，分焦点在 x 轴、y 轴两种情况即可求得椭圆的标准方程. (2)先确定椭圆焦点的位置，再求出 a，b 的值即可得椭圆的标准方程.

(1)$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ 或 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$ (2)$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

【解析】(1)设椭圆的长轴长、短轴长、焦距分别为 $2a$，$2b$，$2c$，由题得 $\begin{cases}a=2c,\\a-c=\sqrt{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2\sqrt{3},\\c=\sqrt{3},\end{cases}$ ∴$b^2=a^2-c^2=9$. 若椭圆的焦点在 y 轴上，则椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$；若椭圆的焦点在 x 轴上，则椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$. ∴椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ 或 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)抛物线方程化为标准方程为 $x^2=4y$，抛物线焦点坐标为 $(0,1)$，∵抛物线焦点与椭圆 C 的一个焦点重合，∴椭圆的焦点在 y 轴上，设椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $c=1$，$2a=4$，∴$a=2$，∴$b^2=a^2-c^2=3$，∴椭圆 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

变式题 (1)CD (2)BD (3)B **【解析】**(1)对于 A，若曲线 C 为椭圆，则 $\begin{cases}4-k>0,\\k-1>0,\\4-k\neq k-1,\end{cases}$ 解得 $1<k<4$ 且 $k\neq2.5$，故 A 错误；对于 B，因为 $\{k|1<k<4\}\supsetneq\{k|1<k<2.5$ 或 $2.5<k<4\}$，所以“$1<k<4$”是“曲线 C 是椭圆”的必要不充分条件，故 B 错误；对于 C，若曲线 C 是焦点在 y 轴上的椭圆，则 $\begin{cases}k-1>4-k,\\4-k>0,\end{cases}$ 解得 $2.5<k<4$，又因为 $\{k|2.5<k<4\}\supsetneq\{k|3<k<4\}$，所以“曲线 C 是焦点在 y 轴上的椭圆”是“$3<k<4$”的必要不充分条件，故 C 正确；对于 D，若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，则 $\begin{cases}k-1<4-k,\\k-1>0,\end{cases}$ 解得 $1<k<2.5$，所以“曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆”是“$1<k<2.5$”的充要条件，故 D 正确. 故选 CD.

(2)因为椭圆的长轴长为 10，其焦点到中心的距离为 4，所以 $a=5$，$c=4$，所以 $b^2=25-16=9$. 当椭圆的焦点在 x 轴上时，椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$；当椭圆的焦点在 y 轴上时，椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$. 故选 BD.

(3)由离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{3}$，得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{8}{9}$，即 $b^2=\frac{8}{9}a^2$. 由题意知 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B(0,b)$，所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-a,-b)$，$\overrightarrow{BA_2}=(a,-b)$，因为 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，所以 $-a^2+b^2=-1$，将 $b^2=\frac{8}{9}a^2$ 代入，得 $a^2=9$，$b^2=8$，故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. 故选 B.

例 3 **【思路点拨】**(1)思路一：由直线 AP，AQ 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$，可得 $\frac{b^2}{a^2}$ 的值，由 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ 即可求出离心率；思路二：设椭圆的右顶点为 B，由点对称得直线 BP，AQ 关于 y 轴对称，得 $k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{1}{4}$，进而得解. (2)连接 NF_2，设 $|NF_1|=n$，结合椭圆的定义，在 $\mathrm{Rt}\triangle MNF_2$ 中利用勾股定理求得 $n=\frac{a}{3}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle MF_1F_2$ 中利用勾股定理求得 $36c^2=20a^2$，结合椭圆离心率的取值范围即可得解. (3)由正弦定理及椭圆定义得 $\frac{c}{a}=\frac{\sin\angle PF_2F_1}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|PF_1|}{2a-|PF_1|}$，得 $|PF_1|=\frac{2ac}{a+c}$，结合 $|PF_1|\in(a-c,a+c)$，得关于 e 的不等式，结合 $e\in(0,1)$ 求出 e 的取值范围.

(1)A (2)$\frac{\sqrt{5}}{3}$ (3)B **【解析】**(1)方法一：由题意得 $A(-a,0)$，设 $P(m,n)$，则 $Q(-m,n)$，$k_{AP}=\frac{n}{m+a}$，$k_{AQ}=\frac{n}{-m+a}$，所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{n}{m+a}\cdot\frac{n}{-m+a}=\frac{n^2}{-m^2+a^2}=\frac{1}{4}$. 由 $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1$，得 $\frac{n^2}{a^2-m^2}=\frac{b^2}{a^2}$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

方法二：设椭圆 C 的右顶点为 B，因为点 P，Q 均在 C 上，且关于 y 轴对称，所以直线 BP，AQ 关于 y 轴对称，所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=-k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{1}{4}$. 设 $P(x_0,y_0)$，由题得 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，则 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)b^2}{x_0^2-a^2}=$

$-\frac{b^2}{a^2}=e^2-1=-\frac{1}{4}$，所以 $e^2=\frac{3}{4}$，即 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

(2)连接 NF_2，设 $|NF_1|=n$，则 $|MF_1|=2n$，$|MF_2|=2a-2n$，$|NF_2|=2a-n$，在 Rt$\triangle MNF_2$ 中，$(3n)^2+(2a-2n)^2=(2a-n)^2$，即 $9n^2+4a^2-8an+4n^2=4a^2-4an+n^2$，即 $12n^2=4an$，$\therefore n=\frac{a}{3}$，$\therefore |MF_1|=\frac{2a}{3}$，$|MF_2|=\frac{4a}{3}$，在 Rt$\triangle MF_1F_2$ 中，$4c^2=\frac{4a^2}{9}+\frac{16a^2}{9}$，即 $36c^2=20a^2$，$\therefore e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$，又 $e\in(0,1)$，$\therefore e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(3)由 $\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{\sin\angle PF_2F_1}$，得 $\frac{c}{a}=\frac{\sin\angle PF_2F_1}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|PF_1|}{2a-|PF_1|}$，得 $|PF_1|=\frac{2ac}{a+c}$，$\because |PF_1|\in(a-c,a+c)$，$\therefore a-c<\frac{2ac}{a+c}<a+c$，$\therefore a^2-c^2<2ac<(a+c)^2$，即 $e^2+2e-1>0$，又 $e\in(0,1)$，$\therefore e\in(\sqrt{2}-1,1)$. 故选 B.

例 4 **【思路点拨】**(1)由 $n^2=2-\frac{2}{3}m^2$ 结合两点间的距离公式、二次函数的单调性得出 m 的值.(2)设椭圆的右焦点为 F，根据椭圆的定义得 $|PB|+|PF|=8$，整理可得 $|PA|+|PB|=|PA|-|PF|+8\leqslant|AF|+8$，即可得解.

(1)D (2)9 **【解析】**(1)因为点 $P(m,n)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 上，所以 $\frac{m^2}{3}+\frac{n^2}{2}=1(-\sqrt{3}\leqslant m\leqslant\sqrt{3})$，则 $n^2=2-\frac{2}{3}m^2$，所以 $|PQ|=\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+n^2}=\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+2-\frac{2}{3}m^2}=\sqrt{\frac{1}{3}m^2-m+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{1}{3}\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$，则当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$|PQ|$ 最小. 故选 D.

(2)根据题意可得 $a=4$，$b=\sqrt{7}$，$c=3$，则点 B 为椭圆的左焦点，设椭圆的右焦点为 F，则 $F(3,0)$，$\therefore |PB|+|PF|=8$，则 $|PB|=8-|PF|$. $\because \frac{3^2}{16}+\frac{1^2}{7}<1$，$\therefore$ 点 A 在椭圆内部，$\therefore |PA|+|PB|=|PA|-|PF|+8\leqslant|AF|+8=9$，当且仅当点 P 在 AF 的延长线上时，等号成立，故 $|PA|+|PB|$ 的最大值为 9.

【应用演练】

1. A **【解析】**由题可得 $e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $e_2=\sqrt{3}e_1$，所以 $e_1=\frac{1}{2}$，即 $\frac{a^2-1}{a^2}=\frac{1}{4}$，解得 $a^2=\frac{4}{3}$，所以 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

2. B **【解析】**因为椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{2b}{2a}\right)^2}$，所以椭圆的长轴长与短轴长的比值越大，离心率越大. 由 $\frac{13}{9}>\frac{10}{7}>\frac{64}{45}$，得 $e_1>e_3>e_2$. 故选 B.

3. B **【解析】**由 $\begin{cases}|MF_2|+|MN|+|NF_2|=4a,\\|MF_2|+|NF_2|=2|MN|,\end{cases}$ 得 $|MN|=\frac{4a}{3}$，设 d 为公差，则 $|MF_2|=\frac{4a}{3}-d$，$|NF_2|=\frac{4a}{3}+d$，在 $\triangle MF_2N$ 中，由余弦定理得 $\left(\frac{4a}{3}-d\right)^2+\left(\frac{4a}{3}+d\right)^2-\left(\frac{4a}{3}\right)^2=2\left(\frac{4a}{3}-d\right)\left(\frac{4a}{3}+d\right)\cos\frac{\pi}{3}$，解得 $d=0$，$\therefore\triangle MF_2N$ 为等边三角形. $\because |MF_1|=2a-|MF_2|=\frac{2a}{3}$，$\angle F_1MF_2=\frac{\pi}{3}$，$\therefore |F_1F_2|=\frac{2\sqrt{3}}{3}a=2c$，解得 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

4. D **【解析】**方法一：$\because \tan\angle PBA=3\tan\angle QBA$，$\therefore k_{BP}=3k_{BQ}$，又 $k_{BP}\cdot k_{AP}=-1$，$k_{AQ}\cdot k_{BQ}=-\frac{b^2}{a^2}$，$k_{AP}=k_{AQ}$，$\therefore\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，$\therefore e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，故 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 D.

方法二：考虑到 A，B 关于原点对称，则有 $k_{PA}\cdot k_{QB}=e^2-1$①. $\because PA\perp PB$，$\therefore k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$②，①②两式相除得 $\frac{k_{QB}}{k_{PB}}=1-e^2$，由 $\tan\angle PBA=3\tan\angle QBA$，得 $\frac{k_{PB}}{k_{QB}}=3$，故 $1-e^2=\frac{1}{3}$，可得 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 D.

方法三：设 $Q(a\cos\theta,b\sin\theta)$，则 $\tan\angle PAB=\tan\angle QAB=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+a}$，$\tan\angle QBA=\frac{b\sin\theta}{a-a\cos\theta}$，两式相乘得 $\tan\angle PAB\cdot\tan\angle QBA=\frac{b^2}{a^2}$①. 因为 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle PAB+\angle PBA=\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan\angle PAB\cdot\tan\angle PBA=1$②，由①÷②得 $\frac{\tan\angle QBA}{\tan\angle PBA}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，故 $e=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 D.

5. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ **【解析】**由题知，以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆有交点，所以 $c\geqslant b$，所以 $c^2\geqslant b^2=a^2-c^2$，所以 $\frac{c}{a}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $e\in(0,1)$，所以 $e\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

6. $\frac{3}{2}$ **【解析】**由题得 $a=5$，$b=4$，$c=3$，$\therefore\triangle F_1PF_2$ 的周长 $L=|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=16$. $\because\triangle F_1PF_2$ 内切圆的半径 $r=\frac{2S_{\triangle F_1PF_2}}{L}$，$\therefore$ 当 $S_{\triangle F_1PF_2}$ 取得最大值时，r 取得最大值，显然当 P 为短轴端点时，$S_{\triangle F_1PF_2}$ 取得最大值，此时 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}\times b\times2c=bc=12$，则 $r=\frac{2S_{\triangle F_1PF_2}}{L}=\frac{3}{2}$.

第 2 课时　直线与椭圆的位置关系

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】**将直线方程 $y=x+m$ 和椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 联立，消去 y 并整理得 $7x^2+8mx+4m^2-12=0$，根据判别式求解.

解：由 $\begin{cases}y=x+m,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $7x^2+8mx+4m^2-12=0$①，$\Delta=(8m)^2-4\times7\times(4m^2-12)=-48m^2+336$.

(1)当 $\Delta>0$，即 $-\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$ 时，方程①有两个不同的实数根，此时直线 l 与椭圆 C 有两个不重合的公共点.

(2)当 $\Delta=0$，即 $m=\pm\sqrt{7}$ 时，方程①有两个相同的实数根，此时直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点.

(3)当 $\Delta<0$，即 $m<-\sqrt{7}$ 或 $m>\sqrt{7}$ 时，方程①没有实数根，此时直线 l 与椭圆 C 没有公共点.

变式题 (1)[1,5) (2)$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **【解析】**(1)易知直线 $y=ax-1$ 过定点 $(0,-1)$，要使直线 $y=ax-1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 总有公共点，只需使点 $(0,-1)$ 在椭圆内部或在椭圆上，则 $m\geqslant1$，又椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 的焦点在 x 轴上，所以 $5>m>0$，所以实数 m 的取值范围是[1,5).

(2)设与直线 $x-2y+8=0$ 平行且与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切的直线方程为 $x-2y+m=0$. 由 $\begin{cases}x-2y+m=0,\\\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 x 并整理得 $25y^2-16my+4m^2-36=0$，所以 $\Delta=256m^2-400(m^2-9)=0$，解得 $m=\pm5$. 当 $m=5$，即切线方程为 $x-2y+5=0$ 时，切线与直线 $x-2y+8=0$ 的距离为 $\frac{|8-5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$；当 $m=-5$，即切线方程为 $x-2y-5=0$ 时，切线与直

线 $x-2y+8=0$ 的距离为 $\frac{|8+5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{13\sqrt{5}}{5}$. 所以椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点到直线 $x-2y+8=0$ 的距离的最小值为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

例 2 **[思路点拨]** (1)根据题意列出关于 a,b,c 的方程组,解出 a,b,c 的值,即可得到椭圆 C 的标准方程. (2)对直线 l 的斜率分情况讨论,当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$,与椭圆 C 的方程联立,利用根与系数的关系得到 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$, $x_1\cdot x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$, 代入 $|AF_1|\cdot|BF_1|=\frac{10}{3}$,求出 k 的值,再利用弦长公式求出 $|AB|$;当直线 l 的斜率不存在时,不符合题意,舍去.

解:(1)由题意可知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{4}{3a^2}+\frac{1}{3b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ b=1,\\ c=1,\end{cases}$ ∴椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)易知 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$.

①当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$, $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$,

$\therefore x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}, x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$.

$\because A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 在椭圆 C 上,$\therefore y_1^2=1-\frac{x_1^2}{2}, y_2^2=1-\frac{x_2^2}{2}$,

$\therefore |AF_1|=\sqrt{(x_1+1)^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+2x_1+1+1-\frac{x_1^2}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+2)^2}$,

$|BF_1|=\sqrt{(x_2+1)^2+y_2^2}=\sqrt{x_2^2+2x_2+1+1-\frac{x_2^2}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}(x_2+2)^2}$.

$\because |AF_1|\cdot|BF_1|=\frac{10}{3}$, $\therefore \sqrt{\frac{1}{2}(x_1+2)^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(x_2+2)^2}=\frac{10}{3}$, $\therefore \frac{1}{2}(x_1+2)(x_2+2)=\frac{10}{3}$,

即 $\frac{1}{2}x_1x_2+(x_1+x_2)+2=\frac{10}{3}$,则 $\frac{1}{2}\times\frac{2k^2-2}{1+2k^2}+\frac{4k^2}{1+2k^2}+2=\frac{10}{3}$,解得 $k^2=1$, $\therefore x_1+x_2=\frac{4}{3}, x_1x_2=0$,

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

②当直线 l 的斜率不存在时,不妨设点 $A\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,则 $|AF_1|=|BF_1|=\sqrt{|F_1F_2|^2+|AF_2|^2}=\sqrt{4+\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,此时 $|AF_1|\cdot|BF_1|\neq\frac{10}{3}$,不符合题意,舍去. 综上所述,$|AB|=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

变式题 1 (1)D (2)C **[解析]** (1)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,直线 l 的方程为 $y=x+m$,由 $\begin{cases}y=x+m,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $3x^2+4mx+2(m^2-1)=0$,由 $\Delta>0$,得 $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$,则 $x_1+x_2=-\frac{4m}{3}, x_1x_2=\frac{2(m^2-1)}{3}$,所以 $|AB|=\sqrt{1+1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{\left(-\frac{4}{3}m\right)^2-\frac{8(m^2-1)}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{6-2m^2}$,所以当 $m=0$ 时,$|AB|$ 取得最大值 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 故选 D.

(2)方法一:由题可知 $F_1(-\sqrt{2},0),F_2(\sqrt{2},0)$,$\triangle F_1AB$ 的面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍,则点 F_1 到直线 $y=x+m$ 的距离是点 F_2 到直线 $y=x+m$ 距离的 2 倍,故 $\frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}=2\frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$,化简可得 $3m^2+10\sqrt{2}m+6=0$,即 $(3m+\sqrt{2})(m+3\sqrt{2})=0$,解得 $m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ 或 $m=-3\sqrt{2}$,又直线 $y=x-3\sqrt{2}$ 与 C 不相交,所以 $m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$. 故选 C.

方法二:不妨设直线 $y=x+m$ 与 x 轴的交点为 $Q(-m,0)$,因为 $\triangle F_1AB$ 的面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍,所以点 F_1 到直线 $y=x+m$ 的距离是点 F_2 到直线 $y=x+m$ 距离的 2 倍,则 $|F_1Q|=2|F_2Q|$. 若 Q 在线段 F_1F_2 上,则 $|F_2Q|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $-m=\frac{\sqrt{2}}{3}$,即 $m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$;若 Q 在线段 F_1F_2 的延长线上,则 $|F_2Q|=2\sqrt{2}$,所以 $-m=3\sqrt{2}$,即 $m=-3\sqrt{2}$,此时直线 $y=x+m$ 与椭圆相离. 故选 C.

变式题 2 **解**:(1)依题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ \frac{1}{2}ab=\sqrt{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=\sqrt{6},\\ b=\sqrt{2},\\ c=2,\end{cases}$ 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由(1)知椭圆 C 的右焦点的坐标为 $(2,0)$. 当直线 l 的斜率不存在时,由 $\frac{2^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$,得 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$,此时 $|PQ|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,不符合题意,所以直线 l 的斜率存在. 设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$,由 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(1+3k^2)x^2-12k^2x+12k^2-6=0$,设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{1+3k^2}, x_1x_2=\frac{12k^2-6}{1+3k^2}$,

所以 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{12k^2}{1+3k^2}\right)^2-4\times\frac{12k^2-6}{1+3k^2}}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{144k^4-24(2k^2-1)(1+3k^2)}{(1+3k^2)^2}}=\frac{2\sqrt{6}\cdot(1+k^2)}{1+3k^2}=\frac{6\sqrt{6}}{7}$,解得 $k=\pm\sqrt{2}$,所以直线 l 的方程为 $y=\pm\sqrt{2}(x-2)$.

例 3 **[思路点拨]** (1)思路一:设出弦端点的坐标,由弦端点的坐标与弦中点的坐标的关系,结合弦端点在椭圆上可得弦所在直线的斜率,进而求出弦所在直线的方程;思路二:设过点 C 的弦为 AB,利用 $k_{AB}\cdot k_{OC}=-\frac{b^2}{a^2}$($O$ 为坐标原点)得 $k_{AB}=-\frac{3}{4}$,又直线 AB 过点 C,从而可得答案.

(2)设出斜率为 2 的直线方程,与椭圆的方程联立,由根与系数的关系求出两根之和,进而求出弦中点的坐标,即可得弦中点的轨迹方程. (3)设出弦与椭圆两交点的坐标和点 P 的坐标,分割线斜率存在与不存在两种情况进行分析,结合点差法即可得点 P 的轨迹方程.

解:(1)方法一:设以 $C(1,1)$ 为中点的弦与椭圆的交点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $\frac{x_1+x_2}{2}=1, \frac{y_1+y_2}{2}=1$,

由 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1,\\ \frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1,\end{cases}$ 可得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{4}=-\frac{y_1^2-y_2^2}{3}$,则 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{3}{4}$,即直线 AB 的斜率为 $-\frac{3}{4}$,所以直线 AB 的方程为 $y-1=-\frac{3}{4}(x-1)$,即 $3x+4y-7=0$.

方法二：设过点 C 的弦为 AB，又 AB 被点 C 平分，则 $k_{AB}\cdot k_{OC}=-\frac{b^2}{a^2}$（$O$ 为坐标原点），即 $k_{AB}\cdot 1=-\frac{3}{4}$，解得 $k_{AB}=-\frac{3}{4}$，故弦 AB 所在直线的方程为 $y-1=-\frac{3}{4}(x-1)$，即 $3x+4y-7=0$.

(2)设斜率为 2 的直线方程为 $y=2x+t$，与椭圆的交点为 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，由 $\begin{cases}y=2x+t,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $19x^2+16tx+4t^2-12=0$，由 $\Delta=(16t)^2-4\times19\times(4t^2-12)>0$，可得 $t^2<19$，且 $x_3+x_4=\frac{-16t}{19}$，则 $y_3+y_4=2(x_3+x_4)+2t=\frac{-32t}{19}+2t=\frac{6t}{19}$，所以 MN 的中点 D 的坐标为 $\left(\frac{-8t}{19},\frac{3t}{19}\right)$，设斜率为 2 的平行弦的中点坐标为 (x,y)，由 $\begin{cases}x=\frac{-8t}{19},\\ y=\frac{3t}{19},\\ t^2<19,\end{cases}$ 可得 $3x+8y=0\left(|x|<\frac{8\sqrt{19}}{19}\right)$，所以斜率为 2 的平行弦的中点的轨迹方程为 $3x+8y=0\left(|x|<\frac{8\sqrt{19}}{19}\right)$.

(3)设弦与椭圆的两交点分别为 $I(x_5,y_5)$，$J(x_6,y_6)$，$P(x,y)$，当 $x_5=x_6$ 时，$P(-1,0)$.

当 $x_5\neq x_6$ 时，由 $\begin{cases}3x_5^2+4y_5^2=12,\\ 3x_6^2+4y_6^2=12,\end{cases}$ 两式相减得 $3(x_5+x_6)(x_5-x_6)+4(y_5+y_6)(y_5-y_6)=0$，即 $3+4\cdot\frac{(y_5+y_6)(y_5-y_6)}{(x_5+x_6)(x_5-x_6)}=0$，因为 $\frac{y_5-y_6}{x_5-x_6}=k_{FP}=\frac{y}{x+1}$，$x_5+x_6=2x$，$y_5+y_6=2y$，所以 $3x^2+3x+4y^2=0$，显然 $(-1,0)$ 满足该方程. 所以点 P 的轨迹方程为 $3x^2+3x+4y^2=0$.

变式题 (1)$y=-\frac{x}{2}(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$ (2)$9x-8y-43=0$

[解析] (1)设斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线方程为 $y=\frac{1}{2}x+m$，与椭圆的交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设弦 AB 的中点坐标为 (x,y)，则 $\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$，$\frac{x_1+x_2}{2}=x$，$\frac{y_2+y_1}{2}=y$. 由题得 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1,\\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1,\end{cases}$ 两式相减可得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{4}=(y_2-y_1)(y_2+y_1)$，即 $\frac{x_1+x_2}{4}=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}(y_2+y_1)$，所以 $y=-\frac{x}{2}$. 由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=\frac{1}{2}x+m,\end{cases}$ 消去 y 得 $\frac{x^2}{2}+mx+m^2-1=0$，由 $\Delta=m^2-2(m^2-1)>0$，解得 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，故所求的轨迹方程为 $y=-\frac{x}{2}(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$.

(2)由题知，椭圆的右焦点的坐标为 $(2,0)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，因为 $\triangle BMN$ 的重心为 $(2,0)$，所以 $\frac{x_1+x_2}{3}=2$，$\frac{4+y_1+y_2}{3}=0$，所以 $x_1+x_2=6$，$y_1+y_2=-4$，即 MN 的中点坐标为 $(3,-2)$. 因为 $\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{12}=1$，$\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{12}=1$，所以 $3(x_2+x_1)(x_2-x_1)+4(y_1+y_2)(y_2-y_1)=0$，即 $18(x_2-x_1)-16(y_2-y_1)=0$，所以 $k_{MN}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$，所以直线 l 的方程为 $y+2=\frac{9}{8}(x-3)$，即 $9x-8y-43=0$.

例 4 **[思路点拨]** (1)思路一：设 $|QF_1|=m$，$|PF_1|=n$，将存在点 P 使 $|PQ|=|QF_2|$ 等价转化为 $(|PQ|-|QF_2|)_{\min}\leqslant0$，由椭圆的二级结论得 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2a}{b^2}$，结合基本不等式可求 $|PQ|-|QF_2|=2m+n-2a$ 的最小值，即可求得 $\frac{b^2}{a^2}$ 的范围，从而得到 e^2 的取值范围；思路二：由椭圆的焦半径公式和椭圆的定义结合基本不等式求 e^2 的取值范围.

(2)设直线 PQ：$x=my-2$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，联立直线与椭圆的方程，由根与系数的关系求出 $k_{AP}\cdot k_{AQ}$，再求出 $k_{AQ}\cdot k_{BQ}$，即可求出 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{k_{AP}}{k_{BQ}}=5$，由基本不等式即可求出 $k_1k_2+\frac{1}{k_2^2}$ 的最小值.

(1)$[8\sqrt{2}-11,1)$ (2)$2\sqrt{5}$ **[解析]** (1)方法一（利用椭圆的二级结论和基本不等式）：设 $|QF_1|=m$，$|PF_1|=n$，则 $|QF_2|=2a-m$，且 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2a}{b^2}$，显然当点 P 靠近右顶点时，$|PQ|>|QF_2|$，故存在点 P 使 $|PQ|=|QF_2|$ 成立等价于 $(|PQ|-|QF_2|)_{\min}\leqslant0$，因为 $|PQ|-|QF_2|=2m+n-2a$，而 $2m+n=\frac{b^2}{2a}(2m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=\frac{b^2}{2a}\left(3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\right)\geqslant\frac{(3+2\sqrt{2})b^2}{2a}$，当且仅当 $n=\sqrt{2}m$ 时取等号，所以 $(2m+n-2a)_{\min}=\frac{(3+2\sqrt{2})b^2}{2a}-2a$，由 $\frac{(3+2\sqrt{2})b^2}{2a}-2a\leqslant0$，得 $\frac{b^2}{a^2}\leqslant12-8\sqrt{2}$，又 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$，$0<e<1$，所以 $8\sqrt{2}-11\leqslant e^2<1$. 故 e^2 的取值范围是 $[8\sqrt{2}-11,1)$.

方法二（利用焦半径公式和基本不等式）：设 $\angle PF_1F_2=\theta$，点 P 在 x 轴上方，则 $|PF_1|=\frac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\theta}$，$|QF_1|=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+e\cos\theta}$，所以 $|QF_2|=2a-|QF_1|=2a-\frac{\frac{b^2}{a}}{1+e\cos\theta}$. 存在点 P 使 $|PQ|=|QF_2|$，即 $|PF_1|+|QF_1|=|QF_2|$，所以 $2a=\frac{b^2}{a}\left(\frac{1}{1-e\cos\theta}+\frac{2}{1+e\cos\theta}\right)$，所以 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-e\cos\theta}+\frac{2}{1+e\cos\theta}\right)(1-e\cos\theta+1+e\cos\theta)=\frac{1}{4}\left[3+\frac{1+e\cos\theta}{1-e\cos\theta}+\frac{2(1-e\cos\theta)}{1+e\cos\theta}\right]\geqslant\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}$，当且仅当 $e\cos\theta=3-2\sqrt{2}$ 时取等号，即 $\frac{b^2}{a^2}\leqslant12-8\sqrt{2}$，又 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$，$0<e<1$，所以 $8\sqrt{2}-11\leqslant e^2<1$，故 e^2 的取值范围是 $[8\sqrt{2}-11,1)$.

(2)设直线 PQ：$x=my-2$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x=my-2,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $(5m^2+9)y^2-20my-25=0$，所以 $y_1+y_2=\frac{20m}{5m^2+9}$，$y_1y_2=-\frac{25}{5m^2+9}$，因为 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{y_1}{x_1+3}\cdot\frac{y_2}{x_2+3}=\frac{y_1}{my_1+1}\cdot\frac{y_2}{my_2+1}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1}=\frac{-25}{-25m^2+20m^2+5m^2+9}=-\frac{25}{9}$，因为 $Q(x_2,y_2)$ 在椭圆上，所以 $\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{5}=1$，即 $y_2^2=\frac{5(9-x_2^2)}{9}$，所以 $k_{AQ}\cdot k_{BQ}=\frac{y_2}{x_2+3}\cdot\frac{y_2}{x_2-3}=\frac{y_2^2}{x_2^2-9}=-\frac{5}{9}$，所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{k_{AP}}{k_{BQ}}=\frac{k_{AP}\cdot k_{AQ}}{k_{AQ}\cdot k_{BQ}}=5$，则 $k_1k_2+\frac{1}{k_2^2}=5k_2^2+\frac{1}{k_2^2}\geqslant2\sqrt{5}$，等号显然可以取得，故 $k_1k_2+\frac{1}{k_2^2}$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$.

变式题 (1)BCD (2)B (3)20 **[解析]** (1)易知直线 l_1 的斜率不为 0，$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$. 对于 A，若 $\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$，显然直线 l_1 的斜率存在且大于 0，设直线 l_1：$y=k(x+1)(k>0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}y=k(x+1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 化简整理得 $(4k^2+$

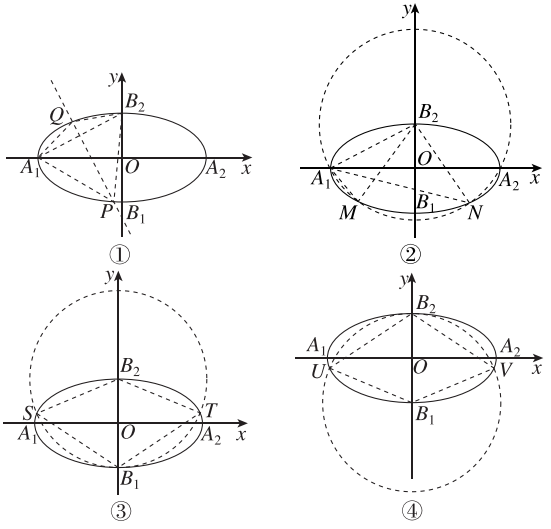
3)$x^2+8k^2x+4k^2-12=0$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}$，因为 $\overrightarrow{AF_1}=(-1-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{F_1B}=(x_2+1,y_2)$，所以 $-1-x_1=2(x_2+1)$，整理得 $x_1+2x_2=-3$，由 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{4k^2+3},\\x_1+2x_2=-3,\\x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3},\end{cases}$ 可得 $k^2=\dfrac{5}{4}$，又 $k>0$，所以 $k=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，故 A 错误. 对于 B，设直线 $l_1:x=my-1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x=my-1,\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 化简整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，所以 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，由点 A 在 x 轴的上方，可得 $y_1>0$，$y_2<0$，所以 $|AF_1|=\sqrt{(x_1+1)^2+y_1^2}=\sqrt{1+m^2}\cdot y_1$，$|BF_1|=\sqrt{(x_2+1)^2+y_2^2}=-\sqrt{1+m^2}\cdot y_2$，所以 $\dfrac{1}{|AF_1|}+\dfrac{1}{|BF_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}\cdot y_1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}\cdot y_2}=\dfrac{y_2-y_1}{\sqrt{1+m^2}\cdot y_1\cdot y_2}=\dfrac{-\sqrt{(y_2+y_1)^2-4y_1\cdot y_2}}{\sqrt{1+m^2}\cdot y_1\cdot y_2}=\dfrac{\frac{12\sqrt{1+m^2}}{3m^2+4}}{\frac{9\sqrt{1+m^2}}{3m^2+4}}=\dfrac{4}{3}$，所以 $|AF_1|+4|BF_1|=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{|AF_1|}+\dfrac{1}{|BF_1|}\right)(|AF_1|+4|BF_1|)=\dfrac{3}{4}\left(5+\dfrac{4|BF_1|}{|AF_1|}+\dfrac{|AF_1|}{|BF_1|}\right)\geqslant\dfrac{3}{4}\left(5+2\sqrt{\dfrac{4|BF_1|}{|AF_1|}\cdot\dfrac{|AF_1|}{|BF_1|}}\right)=\dfrac{27}{4}$，当且仅当 $\dfrac{4|BF_1|}{|AF_1|}=\dfrac{|AF_1|}{|BF_1|}$，即 $|AF_1|=2|BF_1|$ 时取等号，故 B 正确. 对于 C，连接 AF_2，设 $A(x_1,y_1)$，AF_1 的中点为 P，则 $P\left(\dfrac{x_1-1}{2},\dfrac{y_1}{2}\right)$，连接 OP，所以 $|OP|=\sqrt{\dfrac{(x_1-1)^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{4}}=\dfrac{|AF_2|}{2}$（$O$ 为坐标原点），由椭圆的定义知 $\dfrac{|AF_2|}{2}+\dfrac{|AF_1|}{2}=2$，即 $|OP|=2-\dfrac{|AF_1|}{2}$，又 $x^2+y^2=4$ 的圆心为 $O(0,0)$，半径为 2，故以 AF_1 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=4$ 内切，故 C 正确. 对于 D，当直线 l_1 的斜率存在时，由选项 A 的分析知 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{-8k^2}{4k^2+3}\right)^2-4\cdot\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}}=\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$，同理 $|CD|=\dfrac{12\left[\left(-\frac{1}{k}\right)^2+1\right]}{4\left(-\frac{1}{k}\right)^2+3}=\dfrac{12(1+k^2)}{4+3k^2}$，故 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}\cdot\dfrac{12(1+k^2)}{4+3k^2}=\dfrac{72(1+k^2)^2}{(4k^2+3)(4+3k^2)}$，令 $t=k^2+1(t>1)$，则 $S=\dfrac{72t^2}{(4t-1)(1+3t)}=\dfrac{72}{-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+12}=\dfrac{72}{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{49}{4}}$，又 $0<\dfrac{1}{t}<1$，所以 $12<-\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{49}{4}\leqslant\dfrac{49}{4}$，所以 $\dfrac{288}{49}\leqslant S<6$；当直线 l_1 的斜率不存在时，直线 l_2 的斜率为 0，可得 $|AB|=3$，$|CD|=4$，此时 $S=\dfrac{1}{2}\times4\times3=6$. 综上，$S\in\left[\dfrac{288}{49},6\right]$，故 D 正确. 故选 BCD.

(2)方法一：∵椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，∴$a^2=3c^2$，$b^2=2c^2$. 设直线 AB 的方程为 $x=\dfrac{1}{k}y-c$，与椭圆方程 $2x^2+3y^2=6c^2$ 联立，消去 x 整理得 $\left(3+\dfrac{2}{k^2}\right)y^2-\dfrac{4c}{k}y-4c^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\dfrac{4kc}{3k^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-4c^2k^2}{3k^2+2}$. ∵$|AF|=2|FB|$，∴$y_1=-2y_2$，可得 $y_2=-\dfrac{4kc}{3k^2+2}$，$y_2^2=\dfrac{2c^2k^2}{3k^2+2}$，∴$\left(-\dfrac{4kc}{3k^2+2}\right)^2=\dfrac{2c^2k^2}{3k^2+2}$，∵$k>0$，∴$k=\sqrt{2}$. 故选 B.

方法二：设 l 为椭圆的左准线，分别过 A，B 两点作 AA_1，BB_1 垂直于 l，垂足分别为点 A_1，B_1，过点 B 作 $BE\perp AA_1$ 于点 E，根据椭圆的第二定义，得 $|AA_1|=\dfrac{|AF|}{e}$，$|BB_1|=\dfrac{|BF|}{e}$，∵$|AF|=2|FB|$，∴$|AA_1|=\dfrac{2|BF|}{e}$，$\cos\angle BAE=\dfrac{|AE|}{|AB|}=\dfrac{\frac{|BF|}{e}}{3|BF|}=\dfrac{1}{3e}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，∴$\sin\angle BAE=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，∴$\tan\angle BAE=\sqrt{2}$，即 $k=\sqrt{2}$. 故选 B.

方法三：设直线 AB 的倾斜角为 θ，由椭圆的焦半径公式得 $|AF|=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}$，$|BF|=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}$，由题知 $|AF|=2|FB|$，则 $\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}=\dfrac{2b^2}{a+c\cos\theta}$，即 $3e\cos\theta=1$，解得 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，∴$k=\tan\theta=\sqrt{2}$. 故选 B.

(3)不妨设 $A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$，$B_1(0,-1)$，$B_2(0,1)$. 如图①，连接 A_1B_2，当 A_1B_2 为等腰三角形的底时，作 A_1B_2 的垂直平分线交椭圆于 P，Q 两点，连接 QA_1，QB_2，PA_1，PB_2，则 $\triangle QA_1B_2$ 与 $\triangle PA_1B_2$ 均为等腰三角形，满足题意，同理当 A_2B_2，A_2B_1，A_1B_1 为等腰三角形的底时，也可以各作出 2 个满足要求的等腰三角形，此时共有 8 个符合题意的三角形. 如图②，当 A_1B_2 为等腰三角形的腰时，以 B_2 为圆心，A_1B_2 为半径作圆，则圆与椭圆相交于点 A_1，A_2，N，M，连接 MA_1，NA_1，MB_2，NB_2，其中 $\triangle MA_1B_2$ 与 $\triangle NA_1B_2$ 均为等腰三角形，满足要求，$\triangle A_2A_1B_2$ 三个顶点均为椭圆顶点，不符合题意，同理当 A_2B_2，A_2B_1，A_1B_1 为等腰三角形的腰时，也可以各作出 2 个满足要求的等腰三角形，此时共有 8 个符合题意的三角形. 如图③，以 B_2 为圆心，B_1B_2 为半径作圆，此时圆与椭圆相交于点 B_1，S，T，连接 SB_1，SB_2，TB_1，TB_2，此时 $\triangle SB_1B_2$ 与 $\triangle TB_1B_2$ 均为等腰三角形，满足题意，此时共有 2 个符合题意的三角形. 如图④，以 B_1 为圆心，B_1B_2 为半径作圆，此时圆与椭圆相交于点 B_2，U，V，连接 UB_1，UB_2，VB_1，VB_2，此时 $\triangle UB_1B_2$ 与 $\triangle VB_1B_2$ 均为等腰三角形，满足题意，此时共有 2 个符合题意的三角形. 由椭圆性质可知，A_1A_2 为椭圆中的最长弦，所以不能作为等腰三角形的腰，而作为底时，刚好等腰三角形的顶点为上顶点或下顶点，不符合要求. 综上，满足要求的等腰三角形个数为 $8+8+2+2=20$.



第 52 讲　双曲线

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 差的绝对值　大于零且小于$|F_1F_2|$　焦距

(1)$2a<|F_1F_2|$　(2)$2a=|F_1F_2|$　(3)$2a>|F_1F_2|$

3. $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$　$y\leqslant -a$ 或 $y\geqslant a$　$(-a,0)$　$(a,0)$

$(0,-a)$　$(0,a)$　$\pm\frac{b}{a}x$　$\pm\frac{a}{b}x$　$(1,+\infty)$　a^2+b^2

$2a$　$2b$

【对点演练】

1. 8　$8\sqrt{2}$　$y=\pm\sqrt{2}x$　$\sqrt{3}$　**【解析】** 双曲线 $2x^2-y^2=32$ 的标准方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{32}=1$,故实轴长为 8,虚轴长为 $8\sqrt{2}$,渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$,离心率为$\sqrt{3}$.

2. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$　**【解析】** 设双曲线方程为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$,把点 $A(3,-1)$的坐标代入,得 $\lambda=8$,故所求双曲线方程为$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.

3. $\frac{y^2}{9}-x^2=1$　**【解析】** 因为双曲线的渐近线方程是 $y=\pm 3x$,所以设双曲线的方程为 $y^2-9x^2=t(t\neq 0)$,将$(-\sqrt{3},6)$代入,可得 $t=36-9\times 3=9$,所以双曲线的方程为$\frac{y^2}{9}-x^2=1$.

4. $(0,2)$　**【解析】** 根据题意得,要使方程$\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{t-2}=1$ 表示双曲线,只需 $t(t-2)<0$,解得 $0<t<2$,所以实数 t 的取值范围是$(0,2)$.

5. 17　**【解析】** 由题意知$|PF_1|=9<a+c=10$,所以点 P 在双曲线的左支上,则有$|PF_2|-|PF_1|=2a=8$,故$|PF_2|=|PF_1|+8=17$.

6. 双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 的右支　**【解析】** 设满足题意的点为点 P,由题意知$|PF_1|-|PF_2|=6<|F_1F_2|=8$,则点 P 在以 F_1,F_2 为焦点,且实轴长为 6 的双曲线的右支上.设该双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,半焦距为 c,则 $a=3,c=4$,故 $b^2=c^2-a^2=7$,所以所求点的轨迹是双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$的右支.

7. 两条射线　**【解析】** 由题知$|F_1F_2|=8$,而$||PF_1|-|PF_2||=8$,满足 $2a=|F_1F_2|$这一条件,故所求点的轨迹是两条射线.

8. 2 或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　**【解析】** 若双曲线的焦点在 x 轴上,设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>0,b_1>0)$,则其渐近线的方程为 $y=\pm\frac{b_1}{a_1}x$,由题意可得$\frac{b_1}{a_1}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,即 $b_1=\sqrt{3}a_1$,可得 $c_1=2a_1$,此时离心率为$\frac{c_1}{a_1}=2$.若双曲线的焦点在 y 轴上,设双曲线的方程为$\frac{y^2}{a_2^2}-\frac{x^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$,则其渐近线的方程为 $y=\pm\frac{a_2}{b_2}x$,由题意可得$\frac{a_2}{b_2}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,即 $a_2=\sqrt{3}b_2$,可得 $c_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}a_2$,此时离心率为$\frac{c_2}{a_2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.综上,所求离心率为 2 或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】** (1)根据双曲线方程确定 c 的值,从而求出$|PF_2|$,再利用双曲线的定义求解即可.(2)思路一:先根据双曲线的定义及$|PF_1|\cdot|PF_2|=12$ 求出$|PF_1|,|PF_2|$,进而得到 $\tan\angle PF_1F_2$,结合 $\angle POF_2=2\angle PF_1F_2$ 即可求解$\tan\angle POF_2$;思路二:先根据双曲线的定义及$|PF_1|\cdot|PF_2|=12$ 求出$|PF_1|,|PF_2|$,进而得到$|F_1F_2|$,求出双曲线的方程,结合 $P(x_0,y_0)(x_0>0)$在双曲线及以 F_1F_2 为直径的圆上,得到 $x_0,|y_0|$,进而求解.

(1)A　(2)A　**【解析】** (1)由 $x^2-y^2=2$,得$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$,故 $a=\sqrt{2},b=\sqrt{2},c=2$.∵ $|PF_2|^2=8|F_1F_2|=8\times 4=32$,∴$|PF_2|=4\sqrt{2}$.又$|PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$,∴$|PF_1|=2\sqrt{2}+|PF_2|=6\sqrt{2}$.故选 A.

(2)方法一:设$|PF_1|=m,|PF_2|=n$,则 $m>n$.由双曲线的定义知 $m-n=4$,又 $mn=12$,所以 $m=6,n=2$.因为 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上,所以 $PF_1\perp PF_2$,故 $\tan\angle PF_1F_2=\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=\frac{1}{3}$,所以 $\tan\angle POF_2=\tan 2\angle PF_1F_2=\frac{2\tan\angle PF_1F_2}{1-\tan^2\angle PF_1F_2}=\frac{3}{4}$.

方法二:设$|PF_1|=m,|PF_2|=n$,则 $m>n$.由双曲线的定义知 $m-n=4$,又 $mn=12$,所以 $m=6,n=2$.因为 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上,所以 $PF_1\perp PF_2$,则$|F_1F_2|=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$,则 $b^2=10-4=6$,故双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$.设 $P(x_0,y_0)(x_0>0)$,由$\begin{cases}\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{6}=1,\\ x_0^2+y_0^2=10,\end{cases}$可得$\begin{cases}x_0=\frac{4\sqrt{10}}{5},\\ |y_0|=\frac{3\sqrt{10}}{5},\end{cases}$故$\tan\angle POF_2=\frac{|y_0|}{x_0}=\frac{3}{4}$.故选 A.

变式题　(1)C　(2)C　(3)28　**【解析】** (1)∵两定点 $F_1(-3,0),F_2(3,0)$,∴$|F_1F_2|=6$,由双曲线的定义得,当$|PF_1|-|PF_2|=\pm 4$ 时,动点 P 的轨迹为双曲线,故选 C.

(2)由双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ 得 $a=2,b=\sqrt{2},c=\sqrt{6}$.因为 $\angle F_2AB=\angle F_2BA$,所以$|F_2A|=|F_2B|$.作 $F_2C\perp AB$ 于 C,则 C 是 AB 的中点.设$|F_2A|=|F_2B|=x$,则由双曲线的定义知,$|F_2A|-|F_1A|=2a$,$|F_1B|-|F_2B|=2a$,可得$|F_1A|=x-4$,$|F_1B|=x+4$,故$|AB|=|F_1B|-|F_1A|=8$.在 Rt $\triangle F_2BC$ 中,$\cos\angle F_2BC=\frac{|CB|}{|F_2B|}=\frac{4}{x}$,即 $\cos\angle F_1BF_2=\frac{4}{x}$.在 $\triangle F_1BF_2$ 中,由余弦定理得 $\cos\angle F_1BF_2=\frac{(x+4)^2+x^2-(2\sqrt{6})^2}{2(x+4)\cdot x}=\frac{x^2+4x-4}{(x+4)\cdot x}$,所以 $\frac{4}{x}=\frac{x^2+4x-4}{(x+4)\cdot x}$,可得 $x=2\sqrt{5}$.故选 C.

(3)由题意知 $a=4$.由双曲线的定义知$|AF_2|-|AF_1|=8$①,$|BF_2|-|BF_1|=8$②,由①+②得$|AF_2|+|BF_2|-|AB|=16$,所以 $|AF_2|+|BF_2|=22$,所以 $\triangle ABF_2$ 的周长是$|AF_2|+|BF_2|+|AB|=28$.

例 2　**【思路点拨】** (1)根据双曲线 C 的焦点得到双曲线 C 的半焦距,结合离心率求出实半轴长,进而得到虚半轴长,写出 C 的方程即可.(2)设所求双曲线的方程为 $4x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$,结合点$(-5,2\sqrt{15})$在所求双曲线上,求出 λ,即可得到所求双曲线的方程.

(1)$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　(2)$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{40}=1$　**【解析】** (1)设双曲线 C 的实半轴长、虚半轴长分别为 a,b,显然双曲线 C 的中心为原点,焦点在 x 轴上,其半焦距 $c=2$.由双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$,得$\frac{c}{a}=\sqrt{2}$,解得 $a=\sqrt{2}$,则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}$,所以双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)双曲线$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$,设所求双曲线的方程为 $4x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$,又点$(-5,2\sqrt{15})$在双曲线上,所以 $\lambda=4\times(-5)^2-(2\sqrt{15})^2=100-60=40$,故所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{40}=1$.

变式题　(1)C　(2)D　**【解析】** (1)由抛物线 $x^2=20y$,得 $2p=20$,则 $p=10$,∴抛物线 $x^2=20y$ 的焦点坐标为$(0,5)$,可知双

曲线的焦点在 y 轴上，设双曲线的方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，半焦距为 c，由题意知 $c=5$. ∵双曲线上的一点 P 到双曲线的两个焦点的距离之差的绝对值等于 6，∴$2a=6$，即 $a=3$，∴$b^2=c^2-a^2=16$，∴双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$. 故选 C.

(2)由题意，$|PF_2|=2$，∵焦点到任一条渐近线的距离为 b，∴$b=2$. 在 $\triangle POF_2$(O 为原点)中，由等面积法易得点 P 的坐标为 $\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，故 $k_{PF_1}=\frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c}+c}=\frac{ab}{a^2+c^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，化简可得 $(a-\sqrt{2})^2=0$，故 $a=\sqrt{2}$，∴双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$.

例 3 **【思路点拨】**(1)先根据双曲线的焦点在 y 轴上判断，进而根据渐近线方程求解. (2)根据双曲线的离心率与渐近线斜率的关系可解.

(1)A　(2)$y=\pm\sqrt{3}x$　**【解析】**(1)因为双曲线的焦点在 y 轴上，所以选项 B,D 不满足题意；选项 A 中，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm x$，两渐近线的斜率之积为 -1，所以两渐近线互相垂直，所以选项 A 满足题意；选项 C 中，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，两渐近线的斜率之积不为 -1，所以两渐近线不互相垂直，所以选项 C 不满足题意. 故选 A.

(2)因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，所以 $\frac{c}{a}=2$，即 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$，则 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，故该双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

例 4 **【思路点拨】**(1)思路一：利用坐标法，设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$B(0,n)$，结合已知条件得到 $n^2=4c^2$，结合点 A 在 C 上及 $b^2=c^2-a^2$ 得到关于 $\frac{c}{a}$ 的方程，即可得到离心率；思路二：利用几何法，根据 $\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，设 $|F_2A|=2x$，$|F_2B|=3x$，根据双曲线的对称性及定义用 x 表示 $|F_1B|$，$|F_1A|$，结合 $\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$ 得到 $x=a$，在 $\triangle AF_1F_2$ 中利用余弦定理得到 a 与 c 的关系，即可得到离心率. (2)思路一：根据已知条件及正弦定理得到 $|PF_1|=\frac{c}{a}|PF_2|$，结合双曲线的定义得到 $|PF_2|=\frac{2a^2}{c-a}$，再根据双曲线的性质得到 $|PF_2|>c-a$，可得离心率的取值范围；思路二：根据已知条件及正弦定理得到 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{c}{a}$，设 $P(x_0,y_0)$，由焦半径公式得到 $|PF_1|$，$|PF_2|$，进而用 a,c,e 表示 x_0，结合 $x_0>a$ 即可得到离心率的取值范围.

(1)$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　(2)C　**【解析】**(1)方法一(坐标法)：依题可设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$B(0,n)$，由 $\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，可得 $A\left(\frac{5}{3}c,-\frac{2}{3}n\right)$，所以 $\overrightarrow{F_1A}=\left(\frac{8}{3}c,-\frac{2}{3}n\right)$，又 $\overrightarrow{F_1B}=(c,n)$，所以由 $\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$ 可得 $\frac{8}{3}c^2-\frac{2}{3}n^2=0$，即 $n^2=4c^2$. 因为点 A 在 C 上，所以 $\frac{\frac{25}{9}c^2}{a^2}-\frac{\frac{4}{9}n^2}{b^2}=1$，即 $25\frac{c^2}{a^2}-16\frac{c^2}{c^2-a^2}=9$，即 $25e^2-\frac{16e^2}{e^2-1}=9$，解得 $e^2=\frac{9}{5}$ 或 $e^2=\frac{1}{5}$(舍去)，所以 $e=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

方法二(几何法)：由 $\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$ 可得 $\frac{|\overrightarrow{F_2A}|}{|\overrightarrow{F_2B}|}=\frac{2}{3}$，设 $|F_2A|=2x$，$|F_2B|=3x$，由对称性可得 $|F_1B|=3x$，易知点 A 在双曲线的右支上，根据双曲线的定义可得 $|F_1A|=2x+2a$. 又 $|AB|=5x$，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，所以 $\sin\angle F_1AF_2=\frac{|F_1B|}{|AB|}=\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\angle F_1AF_2=\frac{4}{5}$，即 $\frac{|F_1A|}{|AB|}=\frac{2x+2a}{5x}=\frac{4}{5}$，可得 $x=a$，所以 $|AF_1|=4a$，$|AF_2|=2a$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle F_1AF_2=\frac{4}{5}=\frac{16a^2+4a^2-4c^2}{16a^2}$，即 $5c^2=9a^2$，得 $e=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

(2)方法一：由题意可得点 P 不是双曲线的顶点，否则 $\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{\sin\angle PF_2F_1}$ 无意义. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由正弦定理得 $\frac{|PF_1|}{\sin\angle PF_2F_1}=\frac{|PF_2|}{\sin\angle PF_1F_2}$，因为 $\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{\sin\angle PF_2F_1}$，所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{c}{a}$，所以 $|PF_1|=\frac{c}{a}|PF_2|$. 因为点 P 在双曲线的右支上，所以 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以 $\frac{c}{a}|PF_2|-|PF_2|=2a$，得 $|PF_2|=\frac{2a^2}{c-a}$. 由双曲线的性质可得 $|PF_2|>c-a$，所以 $\frac{2a^2}{c-a}>c-a$，化简得 $c^2-2ac-a^2<0$，所以 $e^2-2e-1<0$，解得 $-\sqrt{2}+1<e<\sqrt{2}+1$，因为 $e>1$，所以 $1<e<\sqrt{2}+1$，即双曲线离心率的取值范围为 $(1,\sqrt{2}+1)$. 故选 C.

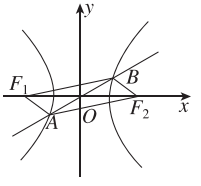
方法二：由题意可得点 P 不是双曲线的顶点，否则 $\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{\sin\angle PF_2F_1}$ 无意义. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由正弦定理得 $\frac{|PF_1|}{\sin\angle PF_2F_1}=\frac{|PF_2|}{\sin\angle PF_1F_2}$，因为 $\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{\sin\angle PF_2F_1}$，所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{c}{a}$. 设 $P(x_0,y_0)$，因为点 P 在双曲线的右支上，所以由双曲线的焦半径公式可得 $|PF_1|=ex_0+a$，$|PF_2|=ex_0-a$，所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{c}{a}=\frac{ex_0+a}{ex_0-a}$，解得 $x_0=\frac{a^2+ac}{e(c-a)}$，又 $x_0>a$，所以 $\frac{a^2+ac}{e(c-a)}>a$，即 $a^2+2ac-c^2>0$，可得 $e^2-2e-1<0$，又 $e>1$，所以 $1<e<1+\sqrt{2}$. 故选 C.

【应用演练】

1. A　**【解析】**双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的右焦点坐标为 $(\sqrt{9+b^2},0)$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{3}x$，即 $bx\pm3y=0$. ∵双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的右焦点到它的一条渐近线的距离为 $3\sqrt{3}$，∴$\frac{b\sqrt{9+b^2}}{\sqrt{b^2+9}}=3\sqrt{3}$，解得 $b=3\sqrt{3}$，∴$c=\sqrt{9+b^2}=\sqrt{9+(3\sqrt{3})^2}=6$，∴离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{6}{3}=2$. 故选 A.

2. D　**【解析】**由题意可知 $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$，所以 $b^2-a^2=a^2b^2$，又 $b^2=c^2-a^2$，所以 $c^2-2a^2=a^2(c^2-a^2)$，所以 $a^2=\frac{c^2-2a^2}{c^2-a^2}=\frac{e^2-2}{e^2-1}>\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$，可得 $e>\sqrt{3}$. 故选 D.

3. D　**【解析】**如图，由题可知四边形 AF_2BF_1 为平行四边形，则 $|F_1B|=|F_2A|=2|F_1A|$，又 $|F_2A|-|F_1A|=2a$，∴$|F_1A|=2a$，$|F_2A|=4a$. ∵$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{AF_1}=-\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=-2a\cdot4a\cos\angle F_1AF_2=-8a^2\cos\angle F_1AF_2=4a^2$，



∴$\cos\angle F_1AF_2=-\frac{1}{2}$，则 $|F_1F_2|^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1|\cdot|AF_2|\cos\angle F_1AF_2=4a^2+16a^2-2\cdot2a\cdot4a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=28a^2$，即 $4c^2=28a^2$(c 为双曲线的半焦距)，∴双曲线的离心率 $e=\sqrt{7}$，故选 D.

4. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **【解析】** 设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$，双曲线 $C_2:\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$，焦距为 $2c$，$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$. 由椭圆的定义得 $m+n=2a_1$①，由双曲线的定义得 $m-n=2a_2$②. 由①^2+②^2 整理得 $m^2+n^2=2(a_1^2+a_2^2)$，由①^2−②^2 整理得 $mn=a_1^2-a_2^2$. 在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理可得 $(2c)^2=m^2+n^2-2mn\cos\angle F_1PF_2$，所以 $a_1^2+3a_2^2=4c^2$. 设 $a_1=2c\cos\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$a_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\sin\theta$，所以 $\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=\frac{a_1}{c}+\frac{a_2}{c}=2\cos\theta+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，当 $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$时，$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$取得最大值$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

5. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ **【解析】** 由题知直线 AB 的方程为 $y=\frac{b}{4a}(x+c)$（c 为双曲线的半焦距），渐近线 OB（O 为坐标原点）的方程为 $y=\frac{b}{a}x$，由$\begin{cases}y=\frac{b}{4a}(x+c),\\y=\frac{b}{a}x,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{c}{3},\\y=\frac{bc}{3a},\end{cases}$所以 $B\left(\frac{c}{3},\frac{bc}{3a}\right)$. 因为 $|FB|=3|FA|$，所以 $y_1=\frac{bc}{9a}$，代入直线 AB 的方程得$\frac{bc}{9a}=\frac{b}{4a}(x_1+c)$，解得 $x_1=-\frac{5}{9}c$，所以 $A\left(-\frac{5c}{9},\frac{bc}{9a}\right)$，代入双曲线方程得$\frac{25c^2}{81a^2}-\frac{b^2c^2}{81a^2b^2}=1$，可得离心率 $e=\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

例 5 **【思路点拨】**（1）根据题目所给条件得到 a,c，进而得到 b，即可写出双曲线 C 的方程；（2）设直线 l 的方程为 $y=x+m$，将直线方程与双曲线方程联立，结合根与系数的关系用 m 表示出线段 MN 的中点坐标，得到线段 MN 的垂直平分线的方程，进而根据三角形的面积求出 m 即可.

解：（1）由题设得 $c=2$，$e=\frac{c}{a}=2$，可得 $a=1$，则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}$，所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

（2）设直线 l 的方程为 $y=x+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=x+m,\\3x^2-y^2=3,\end{cases}$消去 y 整理得 $2x^2-2mx-m^2-3=0$，则 $\Delta=(-2m)^2+8(m^2+3)=12(m^2+2)>0$.

由根与系数的关系可知$\begin{cases}x_1+x_2=m,\\x_1x_2=-\frac{m^2+3}{2}.\end{cases}$设线段 MN 的中点坐标为(x_0,y_0)，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m}{2}$，$y_0=x_0+m=\frac{3m}{2}$，

故线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y-\frac{3m}{2}=-\left(x-\frac{m}{2}\right)$.

此直线与 x 轴、y 轴的交点坐标分别为$(2m,0)$，$(0,2m)$.

由题设可得 $\frac{1}{2}|2m|\cdot|2m|=4$，即 $m^2=2$，解得 $m=\pm\sqrt{2}$，故直线 l 的方程为 $y=x\pm\sqrt{2}$.

变式题 1 （1）A （2）A **【解析】**（1）$\because e=\frac{c}{a}=2$，$c^2=a^2+b^2$，$\therefore c=2a$，$3a^2=b^2$. $\because S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times2c\cdot|y_P|=\sqrt{15}$，$\therefore|y_P|=\frac{\sqrt{15}}{c}=\frac{\sqrt{15}}{2a}$①，$|x_P|=\sqrt{\left(\frac{y_P^2}{b^2}+1\right)a^2}=\sqrt{\frac{y_P^2}{3}+a^2}=\sqrt{\frac{5}{4a^2}+a^2}$②. $\because k_{A_1P}+k_{A_2P}=\frac{6\sqrt{15}}{5}$，$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$\therefore k_{A_1P}+k_{A_2P}=\frac{y_P}{x_P+a}+\frac{y_P}{x_P-a}=\frac{2x_Py_P}{x_P^2-a^2}=2\times\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x_P}{y_P}=\frac{6x_P}{y_P}=\frac{6\sqrt{15}}{5}$，故 $\frac{x_P}{y_P}=\frac{\sqrt{15}}{5}$③. 由①②③，得 $\sqrt{\frac{5}{4a^2}+a^2}=\frac{\sqrt{15}}{2a}\times\frac{\sqrt{15}}{5}$，可得 $a=1$，故选 A.

（2）设半焦距为 c，直线 F_2M 交 PF_1 于点 N，因为 PM 是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线，$F_2M\perp PM$，所以$\triangle NPF_2$是等腰三角形，且$|PN|=|PF_2|$，M 是 NF_2 的中点. 根据双曲线的定义可知$|PF_1|-|PF_2|=2a$，即$|NF_1|=2a$，因为 O 是 F_1F_2 的中点，所以 MO 是$\triangle NF_1F_2$的中位线，所以$|MO|=\frac{1}{2}|NF_1|=a=\sqrt{2}$，又双曲线的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，$b=1$，所以双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{2}-y^2=1$，所以 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，双曲线 C 的渐近线方程为 $x\pm\sqrt{2}y=0$. 设 $T(u,v)$，点 T 到双曲线 C 的两条渐近线的距离之和为 S，则 $S=\frac{|u+\sqrt{2}v|}{\sqrt{3}}+\frac{|u-\sqrt{2}v|}{\sqrt{3}}$. 由 $\overrightarrow{F_1T}\cdot\overrightarrow{F_2T}=(u+\sqrt{3})(u-\sqrt{3})+v^2=u^2+v^2-3=5$，得 $u^2+v^2=8$，又 T 在双曲线 $C:\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 上，所以$\frac{u^2}{2}-v^2=1$，即 $u^2-2v^2=2$，故 $u^2=6$，$v^2=2$，则$|u|>\sqrt{2}|v|$，故 $S=\frac{2|u|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$，即点 T 到双曲线 C 的两条渐近线的距离之和为 $2\sqrt{2}$. 故选 A.

变式题 2 **解：**（1）设以定点 $A(2,1)$ 为中点的弦的两端点坐标为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，可得 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$，

由两端点均在双曲线上，可得 $3x_1^2-y_1^2=3$，$3x_2^2-y_2^2=3$，

两式相减可得 $3(x_1-x_2)(x_1+x_2)=(y_1-y_2)(y_1+y_2)$，

所以以定点 $A(2,1)$ 为中点的弦所在直线的斜率为$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{3(x_1+x_2)}{y_1+y_2}=6$，则以定点 $A(2,1)$ 为中点的弦所在直线的方程为 $y-1=6(x-2)$，即 $y=6x-11$.

代入双曲线的方程可得 $33x^2-132x+124=0$，

由 $\Delta=132^2-4\times33\times124=1056>0$，可得所求直线存在，

故所求直线的方程为 $y=6x-11$.

（2）假设以定点 $B(1,1)$ 为中点的弦存在.

设以定点 $B(1,1)$ 为中点的弦的两端点坐标为 (x_3,y_3)，(x_4,y_4)，可得 $x_3+x_4=2$，$y_3+y_4=2$，

由两端点均在双曲线上，可得 $3x_3^2-y_3^2=3$，$3x_4^2-y_4^2=3$，

两式相减可得 $3(x_3-x_4)(x_3+x_4)=(y_3-y_4)(y_3+y_4)$，

所以以定点 $B(1,1)$ 为中点的弦所在直线的斜率为$\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{3(x_3+x_4)}{y_3+y_4}=3$，

则以定点 $B(1,1)$ 为中点的弦所在直线的方程为 $y-1=3(x-1)$，即为 $y=3x-2$，代入双曲线的方程可得 $6x^2-12x+7=0$，由 $\Delta=12^2-4\times6\times7=-24<0$，可得所求直线不存在，故以定点 $B(1,1)$ 为中点的弦不存在.

第 53 讲　抛物线

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 相等　焦点　准线

2. $\left(\frac{p}{2},0\right)$　$\left(-\frac{p}{2},0\right)$　$\left(0,\frac{p}{2}\right)$　$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$　1　$x=-\frac{p}{2}$　$x=\frac{p}{2}$　$y=-\frac{p}{2}$　$y=\frac{p}{2}$　$x_0+\frac{p}{2}$　$-x_0+\frac{p}{2}$　$y_0+\frac{p}{2}$　$-y_0+\frac{p}{2}$

【对点演练】

1. $\frac{1}{8}$ **【解析】** 抛物线的标准方程为 $x^2=\frac{1}{4}y$，所以 $2p=\frac{1}{4}$，所以焦点到其准线的距离为 $p=\frac{1}{8}$.

2. $\frac{9}{7}$ **【解析】** 以拱顶为坐标原点，水平向右的方向为 x 轴的正方向，竖直向上的方向为 y 轴的正方向建立平面直角坐标系. 设抛物线的方程为 $x^2=-2py(p>0)$，设 $A\left(\frac{3}{2},t\right)$，$B(2,t-1)$，则$\begin{cases}\frac{9}{4}=-2pt,\\4=-2p(t-1),\end{cases}$解得$\begin{cases}t=-\frac{9}{7},\\p=\frac{7}{8},\end{cases}$所以暴雨后

的水面离桥拱顶的距离为$\frac{9}{7}$ m.

3. $\frac{31}{16}$ **【解析】** 抛物线的标准方程为$x^2=\frac{1}{4}y$，则焦点为$F\left(0,\frac{1}{16}\right)$，准线方程为$y=-\frac{1}{16}$. 因为点$P(x_0,y_0)$在抛物线上，且$|PF|=2$，所以$y_0+\frac{1}{16}=2$，即$y_0=2-\frac{1}{16}=\frac{31}{16}$.

4. $y^2=8x$ 或 $x^2=y$ **【解析】** 设抛物线的方程为$y^2=kx(k\neq0)$或$x^2=my(m\neq0)$，将$P(2,4)$的坐标代入，可得$k=8$，$m=1$，故所求抛物线的方程为$y^2=8x$或$x^2=y$.

5. 3 **【解析】** ①当直线l的斜率存在时，设直线l的斜率为k，则当$k=0$时，直线l的方程为$y=2$，满足直线l与抛物线$y^2=2x$有且只有一个公共点；当$k\neq0$时，直线l是抛物线的切线，设直线l的方程为$y=kx+2$，代入抛物线的方程可得$k^2x^2+(4k-2)x+4=0$，由$\Delta=(4k-2)^2-4k^2\cdot4=0$，得$k=\frac{1}{4}$，故切线方程为$y=\frac{1}{4}x+2$. ②当直线$l$的斜率不存在时，直线$l$的方程为$x=0$，满足直线$l$与抛物线$y^2=2x$有且只有一个公共点. 综上，满足题意的直线$l$共有3条.

● 课堂考点探究

例1 **【思路点拨】** (1)先确定M到抛物线准线的距离，再利用抛物线的定义求解即可. (2)由抛物线的焦点坐标可求出p的值，从而可得抛物线的方程，再结合抛物线的定义及点P与抛物线的位置关系即可得解.

(1)D (2)C **【解析】** (1)因为抛物线$C:y^2=8x$的准线方程为$x=-2$，M到直线$x=-3$的距离为5，所以M到准线$x=-2$的距离为4，又点M在C上，所以根据抛物线的定义知$|MF|=4$. 故选D.

(2)由已知可得$\frac{p}{2}=4$，解得$p=8$，则抛物线C的方程为$x^2=16y$. 由抛物线的定义知，点M到点$F(0,4)$的距离等于点M到准线$y=-4$的距离，结合点$P(2,3)$与抛物线C的位置关系可知，$|MF|+|MP|$的最小值是点$P(2,3)$到准线$y=-4$的距离，故$|MF|+|MP|$的最小值为7. 故选C.

变式题 (1)B (2)$\frac{9}{4}$ (3)4 **【解析】** (1)由题设知，$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，又$\overrightarrow{OB}=5\overrightarrow{OF}$，所以$B\left(\frac{5p}{2},0\right)$. 因为线段$AB$的中垂线经过点$F$，所以$|AF|=|BF|=2p$. 不妨设$A(x_0,y_0)$且$y_0>0$，则$|AF|=x_0+\frac{p}{2}=2p$，可得$x_0=\frac{3p}{2}$，故$y_0=\sqrt{3}p$，所以$|AB|=\sqrt{\left(\frac{5p}{2}-\frac{3p}{2}\right)^2+3p^2}=2p$，所以$\frac{|AB|}{|AF|}=1$. 故选B.

(2)由题意可得$(\sqrt{5})^2=2p\times1$，则$2p=5$，所以抛物线C的方程为$y^2=5x$，其准线方程为$x=-\frac{5}{4}$，故A到C的准线的距离为$1-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{9}{4}$.

(3)过点M作$MA\perp y$轴，垂足为A，MA的延长线交抛物线的准线于点B，由题意得$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，设$M\left(\frac{n^2}{2p},n\right)$，由抛物线的定义可知，$|MF|=|MB|=\frac{n^2}{2p}+\frac{p}{2}=3$. 因为$M$为线段$FN$的中点，所以$|AM|=\frac{1}{2}|OF|$($O$为坐标原点)，所以$\frac{n^2}{2p}=\frac{p}{4}$，将其代入$\frac{n^2}{2p}+\frac{p}{2}=3$，可得$\frac{p}{4}+\frac{p}{2}=3$，解得$p=4$.

例2 **【思路点拨】** (1)设直线的方程为$y=kx$，根据直线与圆相切求出k，结合圆$(x+2)^2+y^2=3$和抛物线$y^2=2px(p>0)$均关于x轴对称，不妨取$k>0$，根据直线与抛物线的位置关系求出P的坐标，结合$|OP|=8$即可求出p的值. (2)①将双曲线的方程化为标准方程，得到双曲线的左顶点，即可得到抛物线的焦点坐标，进而求解；②分情况设出抛物线的方程，求出A的横坐标，再根据焦半径公式代入求解.

(1)6 **【解析】** 根据题意设直线的方程为$y=kx$，∵直线与圆$C:(x+2)^2+y^2=3$相切，∴圆心$C(-2,0)$到直线$y=kx$的距离$d=\frac{|-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$，解得$k=\pm\sqrt{3}$，不妨令$k=\sqrt{3}$. 由$\begin{cases}y=\sqrt{3}x,\\y^2=2px,\end{cases}$得$P\left(\frac{2}{3}p,\frac{2\sqrt{3}}{3}p\right)$，∴$|OP|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}p\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}p\right)^2}=8$，可得$p=6$.

(2)**解：**①双曲线方程$16x^2-9y^2=144$化为标准方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，双曲线的左顶点为$(-3,0)$，

所以抛物线的焦点为$(-3,0)$，抛物线的开口方向向左，可设抛物线的标准方程为$y^2=-2px(p>0)$，则$\frac{p}{2}=3$，解得$p=6$，所以所求抛物线的方程是$y^2=-12x$.

②当焦点在x轴的正半轴上时，设抛物线的方程为$y^2=2px(p>0)$，当$y=-3$时，$x=\frac{9}{2p}$，

由$|AF|=\frac{9}{2p}+\frac{p}{2}=5$，得$p^2-10p+9=0$，解得$p=1$或$p=9$，所以抛物线的方程为$y^2=2x$或$y^2=18x$.

当焦点在x轴的负半轴上时，设抛物线的方程为$y^2=-2mx(m>0)$，当$y=-3$时，$x=-\frac{9}{2m}$，由$|AF|=\frac{9}{2m}+\frac{m}{2}=5$，得$m^2-10m+9=0$，解得$m=1$或$m=9$，

所以抛物线的方程为$y^2=-2x$或$y^2=-18x$.

综上可知，所求抛物线的方程为$y^2=\pm2x$或$y^2=\pm18x$.

变式题 (1)$y^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$ (2)$y^2=6x$ **【解析】** (1)根据抛物线的对称性，可知$AB\perp x$轴. 因为正三角形OAB的面积是$4\sqrt{3}$，所以$\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2=4\sqrt{3}$，故$|AB|=4$. 设$AB$与$x$轴交于点$C$，则$|OC|=2\sqrt{3}$，故可设点$A$的坐标为$(2\sqrt{3},2)$，代入抛物线方程得$4=4\sqrt{3}p$，解得$p=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故所求抛物线的方程为$y^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$.

(2)因为抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，所以$|MF|=|MH|=2$，又$\angle HFM=30^\circ$，所以$\triangle MHF$是顶角为120°的等腰三角形，所以$|HF|=2\sqrt{3}$. 记准线l与x轴交于点Q，则$\angle QHF=60^\circ$，所以$p=|QF|=|HF|\sin\angle QHF=2\sqrt{3}\sin60^\circ=3$，所以抛物线$C$的方程为$y^2=6x$.

例3 **【思路点拨】** (1)求出抛物线的焦点坐标，可得$p=2$，即可判断A；联立直线与抛物线的方程，得到A,B的坐标，可得$|AB|$，即可判断B；确定M,N的坐标，可计算$k_{NF}\cdot k_{MF}$，即可判断C；求出线段AB的中点的坐标，即可判断D. (2)由抛物线的性质知A,B两点关于x轴对称，设出坐标，结合斜率之积为-1即可求解.

(1)BD (2)$x=\frac{5p}{2}$ **【解析】** (1)由题意，不妨设点A在第一象限内，直线$l:\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$与x轴的交点为$(1,0)$，又l经过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F，所以$F(1,0)$，可得$p=2$，故抛物线C的方程为$y^2=4x$，故A中说法正确. 由$\begin{cases}\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0,\\y^2=4x,\end{cases}$可得$3x^2-10x+3=0$，解得$x=3$或$x=\frac{1}{3}$，可得$A(3,2\sqrt{3})$，$B\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，所以$|AB|=\sqrt{\left(3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{16}{3}$，故B中说法错误. 易知$M(-1,2\sqrt{3})$，$N\left(-1,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$F(1,0)$，可得$k_{NF}\cdot k_{MF}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}\times\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-1$，则$MF\perp NF$，即$\angle MFN=90^\circ$，故C中说法正确. 因为$A(3,2\sqrt{3})$，$B\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，所以线段$AB$的中点为$\left(\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，则线段$AB$的中点到$y$轴的距离为$\frac{5}{3}$，故D中说法错误. 故选BD.

(2)由抛物线的性质知A,B两点关于x轴对称，设$A(x_0,$

y_0),则 $B(x_0,-y_0)$. 由题意知 $AF\perp OB$,$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,所以 $k_{AF}\cdot k_{OB}=\frac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}}\cdot\left(\frac{-y_0}{x_0}\right)=-1$,所以 $y_0^2=x_0\left(x_0-\frac{p}{2}\right)$,即 $2px_0=x_0\left(x_0-\frac{p}{2}\right)$. 因为 $x_0\neq0$,所以 $2p=x_0-\frac{p}{2}$,即 $x_0=\frac{5p}{2}$,所以直线 AB 的方程为 $x=\frac{5p}{2}$.

变式题 (1)A (2)$x=-\frac{3}{2}$ **[解析]** (1)不妨设 $P\left(\frac{y_0^2}{4},y_0\right)\left(y_0<0,\frac{y_0^2}{4}>1\right)$,由抛物线的对称性及正方形的性质可得 $-y_0=\frac{y_0^2}{4}-1$,可得 $y_0=-(2+2\sqrt{2})$,$\therefore|PF|=\frac{y_0^2}{4}+1=4+2\sqrt{2}$. 故选 A.

(2)不妨设 P 在第一象限,则 $P\left(\frac{p}{2},p\right)$,$k_{OP}=\frac{p}{\frac{p}{2}}=2$,故 $k_{PQ}=-\frac{1}{2}$,因此直线 PQ 的方程为 $y-p=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)$,令 $y=0$,得 $x=\frac{5}{2}p$,因此 $|FQ|=\frac{5}{2}p-\frac{p}{2}=2p=6$,解得 $p=3$,所以 C 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}=-\frac{3}{2}$.

例 4 **[思路点拨]** (1)思路一:设出直线 l 的方程并与抛物线方程联立,解方程组,根据抛物线的定义计算即可;思路二:设直线 l 的倾斜角为 θ,分情况用 $\cos\theta$ 表示 $|\overrightarrow{AF}|$,$|\overrightarrow{BF}|$,根据直线 l 的斜率求出 $\cos\theta$,结合 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|}$ 求解即可.

(2)根据点 A 在抛物线 C 上,求出 p,即可判断 A;利用导数的几何意义求出抛物线 C 在点 A 处的切线方程,即可判断 B;设出直线 PQ 的方程,联立直线 PQ 的方程与抛物线 C 的方程,利用根与系数的关系及弦长公式即可判断 C,D.

(1)C (2)BCD **[解析]** (1)方法一:由题意可知 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,所以直线 l 的方程为 $y=2\sqrt{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)$,由 $\begin{cases}y^2=2px,\\y=2\sqrt{2}\left(x-\frac{p}{2}\right),\end{cases}$ 可得 $4x^2-5px+p^2=0$,解得 $x=p$ 或 $x=\frac{p}{4}$,所以 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|}=\frac{p+\frac{p}{2}}{\frac{p}{4}+\frac{p}{2}}=2$ 或 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|}=\frac{\frac{p}{4}+\frac{p}{2}}{p+\frac{p}{2}}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

方法二:设直线 l 的倾斜角为 θ,则 $|\overrightarrow{AF}|=\frac{p}{1-\cos\theta}$,$|\overrightarrow{BF}|=\frac{p}{1+\cos\theta}$ 或 $|\overrightarrow{AF}|=\frac{p}{1+\cos\theta}$,$|\overrightarrow{BF}|=\frac{p}{1-\cos\theta}$. 因为直线 l 的斜率为 $2\sqrt{2}$,所以 $\tan\theta=2\sqrt{2}$,可得 $\cos\theta=\frac{1}{3}$,则 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|}=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}=2$ 或 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

(2)因为点 $A(1,1)$ 在抛物线 C 上,所以 $2p=1$,所以抛物线 C 的方程为 $x^2=y$,其准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$,故 A 选项错误;由 $y'=2x$,知抛物线 C 在点 A 处的切线的斜率为 2,则切线方程为 $y=2x-1$,恰过点 B,故 B 选项正确;由题意知直线 PQ 的斜率存在,设直线 PQ 的方程为 $y=kx-1$,代入 $x^2=y$ 并整理得 $x^2-kx+1=0$,则 $\Delta=k^2-4>0$,设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$,则 $x_1+x_2=k$,$x_1x_2=1$,所以 $|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)\cdot(x_2^2+y_2^2)}=\sqrt{(x_1^2+x_1^4)\cdot(x_2^2+x_2^4)}=\sqrt{x_1^2x_2^2(1+x_1^2)\cdot(1+x_2^2)}=\sqrt{(1+x_1^2)\cdot(1+x_2^2)}=\sqrt{x_1^2x_2^2+x_1^2+x_2^2+1}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+2}>\sqrt{2x_1x_2+2}=2=|OA|^2$,故 C 选项正确;$|BP|\cdot|BQ|=\sqrt{[x_1^2+(y_1+1)^2]\cdot[x_2^2+(y_2+1)^2]}=\sqrt{(x_1^2+k^2x_1^2)\cdot(x_2^2+k^2x_2^2)}=\sqrt{x_1^2x_2^2(1+k^2)\cdot(1+k^2)}=\sqrt{(1+k^2)\cdot(1+k^2)}=1+k^2>5=|BA|^2$,故 D 选项正确. 故选 BCD.

变式题 1 (1)C (2)$\frac{1}{2}$ **[解析]** (1)抛物线 $E:y^2=3x$ 的焦点为 $F\left(\frac{3}{4},0\right)$,设直线 AB 的方程为 $x=my+n$,$n\neq0$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y^2=3x,\\x=my+n,\end{cases}$ 可得 $y^2-3my-3n=0$,则 $y_1+y_2=3m$,$y_1y_2=-3n$. 由 $OA\perp OB$,可得 $x_1x_2+y_1y_2=0$,即 $\frac{(y_1y_2)^2}{9}+y_1y_2=0$,即 $n^2-3n=0$,可得 $n=3$,则直线 $AB:x=my+3$ 过定点 $P(3,0)$. 由 $OC\perp AB$,可得 C 的轨迹为以 OP 为直径的圆(除去原点),其轨迹方程为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}(x\neq0)$,所以 $|CF|$ 的取值范围为 $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right]$,即 $\left(\frac{3}{4},\frac{9}{4}\right]$. 故选 C.

(2)由题可设直线 AB 的方程为 $x=ty+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y^2=2px,\\x=ty+1,\end{cases}$ 得 $y^2-2pty-2p=0$,$\Delta>0$ 恒成立,所以 $y_1+y_2=2pt$①,$y_1y_2=-2p$②. 因为 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$,所以 $y_1=-2y_2$③. 由①②③可得 $t=-\frac{y_2}{2p}$,$y_2^2=p$,所以 $x_2=ty_2+1=-\frac{y_2}{2p}\cdot y_2+1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$,即点 B 的横坐标为 $\frac{1}{2}$.

变式题 2 **解**:(1)设 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,由 $\begin{cases}x-2y+1=0,\\y^2=2px,\end{cases}$ 可得 $y^2-4py+2p=0$,所以 $y_A+y_B=4p$,$y_Ay_B=2p$,所以 $|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{5}\,|y_A-y_B|=\sqrt{5}\times\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}=4\sqrt{15}$,即 $2p^2-p-6=0$,又 $p>0$,所以 $p=2$.

(2)由(1)可得 $F(1,0)$,因为直线 MN 的斜率不可能为零,所以设直线 $MN:x=my+n$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+n,\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4n=0$,所以 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4n$,由 $\Delta=16m^2+16n>0$,得 $m^2+n>0$.

因为 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$,所以 $(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$,即 $(my_1+n-1)(my_2+n-1)+y_1y_2=0$,即 $(m^2+1)y_1y_2+m(n-1)(y_1+y_2)+(n-1)^2=0$,将 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4n$ 代入上式得 $4m^2=n^2-6n+1$,故 $4(m^2+n)=(n-1)^2>0$,所以 $n\neq1$,由 $n^2-6n+1\geqslant0$,解得 $n\geqslant3+2\sqrt{2}$ 或 $n\leqslant3-2\sqrt{2}$.

设点 F 到直线 MN 的距离为 d,则 $d=\frac{|n-1|}{\sqrt{1+m^2}}$,又 $|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{16m^2+16n}=\sqrt{1+m^2}\sqrt{4(n^2-6n+1)+16n}=2\sqrt{1+m^2}\,|n-1|$,所以 $\triangle MFN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times d\times|MN|=\frac{1}{2}\times\frac{|n-1|}{\sqrt{1+m^2}}\times2\sqrt{1+m^2}\,|n-1|=(n-1)^2$,又 $n\geqslant3+2\sqrt{2}$ 或 $n\leqslant3-2\sqrt{2}$,所以当 $n=3-2\sqrt{2}$ 时,$\triangle MFN$ 的面积取到最小值 $(2-2\sqrt{2})^2=12-8\sqrt{2}$.

第 54 讲　圆锥曲线热点问题

| 第 1 课时　求值、最值与范围、证明问题 |

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)根据椭圆 C 过点 $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$,代入方程即可化简求出离心率;(2)设直线 OQ 的斜率为 k,点 Q 的坐标为 (x_0,y_0),将点 Q 的坐标代入直线 OQ 与椭圆的方程,

消去 y_0 得到 x_0^2，再由 $|AQ|=|AO|$ 得出 x_0，即可建立关于 k 的方程，求解即可.

解：(1)∵点 $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 在椭圆 C 上，

∴$\frac{a^2}{5a^2}+\frac{a^2}{2b^2}=1$，整理得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{8}$，∴椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(2)由题意可知，点 A 的坐标为 $(-a,0)$，$|AO|=a$.

易知直线 OQ 的斜率存在，设直线 OQ 的斜率为 k，则其方程为 $y=kx$，设点 Q 的坐标为 (x_0,y_0)，则 $\begin{cases}y_0=kx_0,\\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 y_0，整理得 $x_0^2=\frac{a^2b^2}{k^2a^2+b^2}$①.

由 $|AQ|=|AO|$，得 $(x_0+a)^2+k^2x_0^2=a^2$，整理得 $(1+k^2)x_0^2+2ax_0=0$，又 $x_0\neq0$，∴$x_0=-\frac{2a}{1+k^2}$②，把②代入①得 $\frac{4a^2}{(1+k^2)^2}=\frac{a^2b^2}{k^2a^2+b^2}$，整理得 $(1+k^2)^2=4k^2\cdot\frac{a^2}{b^2}+4$，由(1)知 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{8}{5}$，则 $(1+k^2)^2=\frac{32}{5}k^2+4$，即 $5k^4-22k^2-15=0$，可得 $k^2=5$，故直线 OQ 的斜率 $k=\pm\sqrt{5}$.

变式题 1 **解**：(1)由抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 过点 $M(4,4)$，得 $4^2=2p\times4$，解得 $p=2$，故抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

(2)易知抛物线 C 的焦点坐标为 $(0,1)$，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2=4y,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{k^2+1}\,\sqrt{16k^2+16}=4(k^2+1)=6$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，故直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$，则坐标原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{4+2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故△$OAB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{3}\times6\times\frac{1}{2}=\sqrt{6}$.

变式题 2 **解**：(1)由题意知 $\frac{9}{a^2}-\frac{7}{b^2}=1$，$a^2+b^2=4$，

可得 $a^4-20a^2+36=0$，则 $a^2=2$ 或 $a^2=18$.

当 $a^2=2$ 时，$b^2=2$；当 $a^2=18$ 时，$b^2=-14$，舍去.

故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $x=ty+2(t>0)$，由 $\begin{cases}x=ty+2,\\ \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $(t^2-1)y^2+4ty+2=0$，则 $t^2-1\neq0$，$\Delta=16t^2-8(t^2-1)=8t^2+8>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{4t}{t^2-1}$，$y_1y_2=\frac{2}{t^2-1}$.

由直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A，B 两点，结合直线 l 的斜率大于 0，可得 $\begin{cases}t>0,\\ y_1y_2=\frac{2}{t^2-1}<0,\end{cases}$ 解得 $0<t<1$. 由 PF 平分 $\angle APB$，得 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|AF|}{|BF|}$，即 $\frac{\sqrt{(x_1-3)^2+(y_1+\sqrt{7})^2}}{\sqrt{(x_2-3)^2+(y_2+\sqrt{7})^2}}=\left|\frac{y_1}{y_2}\right|$，即 $\frac{\sqrt{(ty_1-1)^2+(y_1+\sqrt{7})^2}}{\sqrt{(ty_2-1)^2+(y_2+\sqrt{7})^2}}=\left|\frac{y_1}{y_2}\right|$，

等号两边同时平方得 $\frac{(t^2+1)y_1^2+2(\sqrt{7}-t)y_1+8}{(t^2+1)y_2^2+2(\sqrt{7}-t)y_2+8}=\frac{y_1^2}{y_2^2}$，整理可得 $4(y_1+y_2)+(\sqrt{7}-t)y_1y_2=0$，

将 $y_1+y_2=-\frac{4t}{t^2-1}$，$y_1y_2=\frac{2}{t^2-1}$ 代入，可得 $\frac{-16t}{t^2-1}+\frac{2(\sqrt{7}-t)}{t^2-1}=0$，解得 $t=\frac{\sqrt{7}}{9}\in(0,1)$，符合题意.

故直线 l 的方程为 $x=\frac{\sqrt{7}}{9}y+2$，即 $9x-\sqrt{7}y-18=0$.

例 2 **[思路点拨]** (1)设 $E(x,y)$ 为椭圆上任意一点，利用两点间的距离公式结合二次函数的性质即可求解；

(2)设出直线 AB 的方程并与椭圆的方程联立，利用根与系数的关系得到两根之和与两根之积，再分别联立直线 AP，直线 BP 与直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 的方程，得到 C，D 两点的横坐标，由此可表示出 $|CD|$，再转化求解即可.

解：(1)设 $E(x,y)$ 为椭圆上任意一点，则 $|PE|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{-11y^2-2y+13}=\sqrt{-11\left(y+\frac{1}{11}\right)^2+\frac{144}{11}}$，因此，当 E 点坐标为 $\left(\pm\frac{12\sqrt{10}}{11},-\frac{1}{11}\right)$ 时，$|PE|$ 取到最大值 $\frac{12\sqrt{11}}{11}$.

(2)由题意，设 AB 的直线方程为 $y=kx+\frac{1}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 AB 的直线方程与椭圆方程联立得 $\begin{cases}y=kx+\frac{1}{2},\\ x^2+12y^2=12,\end{cases}$ 则 $(1+12k^2)x^2+12kx-9=0$，

从而 $x_1+x_2=\frac{-12k}{1+12k^2}$，$x_1x_2=\frac{-9}{1+12k^2}$.

设 $C(x_C,y_C)$，$D(x_D,y_D)$，由 PA 与 CD 的直线方程联立得 $\begin{cases}y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x,\\ y=-\frac{1}{2}x+3,\end{cases}$ 解得 $x_C=\frac{4x_1}{(2k+1)x_1-1}$.

同理 $x_D=\frac{4x_2}{(2k+1)x_2-1}$. 那么 $|CD|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\,|x_C-x_D|=2\sqrt{5}\left|\frac{x_2-x_1}{(2k+1)^2x_1x_2-(2k+1)(x_1+x_2)+1}\right|=\frac{3\sqrt{5}}{2}\frac{\sqrt{16k^2+1}}{|3k+1|}$.

当 $k=-\frac{1}{3}$ 时，$PA/\!/CD$ 或 $PB/\!/CD$，不符合题意.

令 $3k+1=t$，则 $|CD|=\frac{3\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{25}{9}\left(\frac{1}{t}-\frac{16}{25}\right)^2+\frac{16}{25}}$.

因此，当 $k=\frac{3}{16}$ 时，$|CD|$ 取得最小值，且最小值为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

变式题 **解**：(1)由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3},\\ \frac{6}{a^2}+\frac{\frac{1}{3}}{b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=3,\\ b=1,\\ c=2\sqrt{2},\end{cases}$

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)当直线 l 的斜率不存在时，线段 MN 的中垂线的方程为 $y=0$，此时点 O 到线段 MN 的中垂线的距离为 0.

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq0)$，因为直线 l 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相切，所以点 O 到直线 l 的距离 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，所以 $m^2=k^2+1$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+y^2=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 得 $(1+9k^2)x^2+18kmx+9m^2-9=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{18km}{1+9k^2}$，所以线段 MN 的中点坐标为 $\left(-\frac{9km}{1+9k^2},\frac{m}{1+9k^2}\right)$，所以线段 MN 的中垂线的方程为 $y=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{9km}{1+9k^2}\right)+\frac{m}{1+9k^2}$，即 $x+ky+\frac{8km}{1+9k^2}=0$，所以点 O 到线段 MN 的中垂线的距离 $d=$

$\dfrac{\left|\dfrac{8km}{1+9k^2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{|8k|}{1+9k^2}=\dfrac{8}{9|k|+\dfrac{1}{|k|}}\leqslant\dfrac{4}{3}$（当且仅当$|k|=\dfrac{1}{3}$时等号成立）.

综上所述，点O到线段MN的中垂线的最大距离为$\dfrac{4}{3}$.

例3 **【思路点拨】**(1)思路一：设出点P的坐标，结合几何条件即可得到W的方程；
思路二：根据抛物线的定义可知W为抛物线，进而得到W的方程.

(2)设直线AB的方程为$y=k(x-a)+a^2+\dfrac{1}{4}$，将其与抛物线的方程联立，再利用弦长公式和放缩法得$|AB|+|AD|\geqslant\sqrt{\dfrac{(1+k^2)^3}{k^2}}$，利用换元法和函数思想即可求出周长的最值，再排除边界值即可.

解：(1)方法一：设$P(x,y)$，则$|y|=\sqrt{x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2}$，化简得$y=x^2+\dfrac{1}{4}$，即$W$的方程为$y=x^2+\dfrac{1}{4}$.

方法二：根据抛物线的定义可知，点P在以$F\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$为焦点，$x$轴为准线的抛物线上，其中$p=\dfrac{1}{2}$，

从而$x^2=2p\left(y-\dfrac{1}{4}\right)=y-\dfrac{1}{4}$，故$W$的方程为$y=x^2+\dfrac{1}{4}$.

(2)证明：不妨设A,B,D三点在W上，且有$BA\perp DA$，

设$A\left(a,a^2+\dfrac{1}{4}\right)$，直线$BA,DA$的斜率分别为$k,-\dfrac{1}{k}$，由对称性不妨设$|k|\leqslant1$.

由$\begin{cases}y=x^2+\dfrac{1}{4},\\ y=k(x-a)+a^2+\dfrac{1}{4},\end{cases}$可得$x^2-kx+ka-a^2=0$，

由根与系数的关系得$x_A+x_B=k$，所以$B\left(k-a,(k-a)^2+\dfrac{1}{4}\right)$，所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|k-2a|$.

同理可得$|AD|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot\left|-\dfrac{1}{k}-2a\right|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|$，所以$|AB|+|AD|=\sqrt{1+k^2}\cdot|k-2a|+\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\geqslant\sqrt{1+k^2}\left(|k-2a|+\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\right)\geqslant\sqrt{1+k^2}\cdot\left|k+\dfrac{1}{k}\right|=\sqrt{\dfrac{(1+k^2)^3}{k^2}}$. 令$m=k^2$，设$f(m)=\dfrac{(1+m)^3}{m}=m^2+3m+\dfrac{1}{m}+3(0<m\leqslant1)$，可得$f'(m)=2m+3-\dfrac{1}{m^2}=\dfrac{(2m-1)(m+1)^2}{m^2}$，所以$f(m)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{2},1\right]$上单调递增，所以$f(m)$在$(0,1]$上的最小值为$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$. 所以$|AB|+|AD|=\sqrt{f(k^2)}\geqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，分析可知，$|AB|+|AD|$取不到$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，所以矩形$ABCD$的周长为$2(|AB|+|AD|)>3\sqrt{3}$，故得证.

变式题 $[2,2\sqrt{2}]$ **【解析】** 设$C\left(x_0,\dfrac{x_0^2}{2p}\right)$，则$|AC|=\sqrt{x_0^2+\left(\dfrac{x_0^2}{2p}-p\right)^2}$，故圆$C$的方程为$(x-x_0)^2+\left(y-\dfrac{x_0^2}{2p}\right)^2=x_0^2+\left(\dfrac{x_0^2}{2p}-p\right)^2$，令$y=0$，得$(x-x_0)^2+\dfrac{x_0^4}{4p^2}=x_0^2+\dfrac{x_0^4}{4p^2}-x_0^2+p^2$，即$(x-x_0)^2=p^2$，解得$x=x_0+p$或$x=x_0-p$，所以$|MN|=|x_0+p-(x_0-p)|=2p$. 设$\angle MAN=\theta$，$O$为坐标原点，因为$S_{\triangle MAN}=\dfrac{1}{2}|AM|\cdot|AN|\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|MN|=p^2$，所以$mn=\dfrac{2p^2}{\sin\theta}$，由余弦定理可得$m^2+n^2-2mn\cos\theta=4p^2$，所以$m^2+n^2=4p^2+\dfrac{4p^2}{\sin\theta}\cos\theta=4p^2\left(1+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$，所以$\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}=\dfrac{m^2+n^2}{mn}=\dfrac{4p^2\left(1+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\sin\theta}{2p^2}=2(\sin\theta+\cos\theta)=2\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$，因为$0°<\theta\leqslant90°$，所以$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin(\theta+45°)\leqslant1$，所以$\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}$的取值范围为$[2,2\sqrt{2}]$.

例4 **【思路点拨】**(1)根据右焦点的坐标、渐近线方程和$a^2=b^2+c^2$即可求出.

(2)首先求出点M的轨迹方程，为$y=\dfrac{3}{k}x$，其中k为直线PQ的斜率.
若选择①②：设直线AB的方程为$y=k(x-2)$，求出点M的坐标，可得M为AB的中点，即可得到$|AM|=|BM|$；
若选择①③：当直线AB的斜率存在时，设直线AB的方程为$y=m(x-2)(m\neq0,m\neq\pm\sqrt{3})$，求出点$M$的坐标，即可得到$PQ/\!/AB$；
若选择②③：设直线AB的方程为$y=k(x-2)$，设AB的中点为$C(x_C,y_C)$，求出点C的坐标，可得点M恰为AB的中点，故点M在直线AB上.

解：(1)由题意可得$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，$\sqrt{a^2+b^2}=2$，故$a=1,b=\sqrt{3}$，

故C的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)证明：设直线PQ的方程为$y=kx+b(k\neq0,k\neq\pm\sqrt{3})$，将直线$PQ$的方程代入$C$的方程，整理得$(3-k^2)x^2-2kbx-b^2-3=0$，则$x_1+x_2=\dfrac{2kb}{3-k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{b^2+3}{3-k^2}$，$x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{2\sqrt{3(b^2+3-k^2)}}{3-k^2}$.

设点M的坐标为(x_M,y_M)，则$\begin{cases}y_M-y_1=-\sqrt{3}(x_M-x_1),\\ y_M-y_2=\sqrt{3}(x_M-x_2),\end{cases}$

两式相减，得$y_1-y_2=2\sqrt{3}x_M-\sqrt{3}(x_1+x_2)$，又$y_1-y_2=(kx_1+b)-(kx_2+b)=k(x_1-x_2)$，故$2\sqrt{3}x_M=k(x_1-x_2)+\sqrt{3}(x_1+x_2)$，解得$x_M=\dfrac{k\sqrt{b^2+3-k^2}+kb}{3-k^2}$.

两式相加，得$2y_M-(y_1+y_2)=\sqrt{3}(x_1-x_2)$，
又$y_1+y_2=(kx_1+b)+(kx_2+b)=k(x_1+x_2)+2b$，故$2y_M=k(x_1+x_2)+\sqrt{3}(x_1-x_2)+2b$，解得$y_M=\dfrac{3\sqrt{b^2+3-k^2}+3b}{3-k^2}=\dfrac{3}{k}x_M$，所以点$M$的轨迹为直线$y=\dfrac{3}{k}x$，其中$k$为直线$PQ$的斜率.

若选择①②：
因为$PQ/\!/AB$，直线AB过点F，所以直线AB的方程为$y=k(x-2)$，设点A的坐标为(x_A,y_A)，点B的坐标为(x_B,y_B)，不妨设点A在直线$y=\sqrt{3}x$上，则$\begin{cases}y_A=k(x_A-2),\\ y_A=\sqrt{3}x_A,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_A=\dfrac{2k}{k-\sqrt{3}},\\ y_A=\dfrac{2\sqrt{3}k}{k-\sqrt{3}}.\end{cases}$同理可得$x_B=\dfrac{2k}{k+\sqrt{3}}$，$y_B=-\dfrac{2\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}}$.

故$x_A+x_B=\dfrac{4k^2}{k^2-3}$，$y_A+y_B=\dfrac{12k}{k^2-3}$.

由点M的坐标满足$\begin{cases}y_M=k(x_M-2),\\ y_M=\dfrac{3}{k}x_M,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_M=\dfrac{2k^2}{k^2-3},\\ y_M=\dfrac{6k}{k^2-3},\end{cases}$故

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$，$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$，

故 M 为 AB 的中点，即 $|AM|=|BM|$.

若选择①③：

由 M 在 AB 上，$|AM|=|BM|$，可得 M 为 AB 的中点.

当直线 AB 的斜率不存在时，点 M 即为点 $F(2,0)$，此时 M 不在直线 $y=\frac{3}{k}x$ 上，矛盾. 当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=m(x-2)(m\neq0,m\neq\pm\sqrt{3})$，设点 A 的坐标为 (x_A,y_A)，点 B 的坐标为 (x_B,y_B).

不妨设点 A 在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上，则 $\begin{cases}y_A=m(x_A-2),\\y_A=\sqrt{3}x_A,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_A=\frac{2m}{m-\sqrt{3}},\\y_A=\frac{2\sqrt{3}m}{m-\sqrt{3}}.\end{cases}$ 同理可得 $x_B=\frac{2m}{m+\sqrt{3}}$，$y_B=-\frac{2\sqrt{3}m}{m+\sqrt{3}}$，

则 $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2m^2}{m^2-3}$，$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{6m}{m^2-3}$.

又点 M 在直线 $y=\frac{3}{k}x$ 上，故 $\frac{6m}{m^2-3}=\frac{3}{k}\cdot\frac{2m^2}{m^2-3}$，解得 $k=m$，因此 $PQ/\!/AB$.

若选择②③：

因为 $PQ/\!/AB$，直线 AB 过点 F，所以直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，设点 A 的坐标为 (x_A,y_A)，点 B 的坐标为 (x_B,y_B). 不妨设点 A 在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上，则 $\begin{cases}y_A=k(x_A-2),\\y_A=\sqrt{3}x_A,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_A=\frac{2k}{k-\sqrt{3}},\\y_A=\frac{2\sqrt{3}k}{k-\sqrt{3}}.\end{cases}$ 同理可得 $x_B=\frac{2k}{k+\sqrt{3}}$，$y_B=-\frac{2\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}}$.

设 AB 的中点为 $C(x_C,y_C)$，则 $x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2k^2}{k^2-3}$，$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{6k}{k^2-3}$. 因为 $|AM|=|BM|$，所以点 M 在 AB 的垂直平分线上，即点 M 在直线 $y-y_C=-\frac{1}{k}(x-x_C)$ 上.

由 $\begin{cases}y_M-y_C=-\frac{1}{k}(x_M-x_C),\\y_M=\frac{3}{k}x_M,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_M=\frac{2k^2}{k^2-3}=x_C,\\y_M=\frac{6k}{k^2-3}=y_C,\end{cases}$ 即点 M 恰为 AB 的中点，故点 M 在 AB 上.

变式题 1 **解：**(1)设双曲线 C 的焦距为 $2c$，其中 $c^2=a^2+b^2$，则 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$H(1,0)$，所以 $\overrightarrow{HF_1}=(-c-1,0)$，$\overrightarrow{HF_2}=(c-1,0)$. 由 $\overrightarrow{HF_1}+3\overrightarrow{HF_2}=\mathbf{0}$，得 $-c-1+3(c-1)=0$，解得 $c=2$，所以 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$.

根据双曲线的对称性，可设直线 l 与双曲线 C 的一条渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 交于点 T，则有 $T\left(1,\frac{b}{a}\right)$，

所以 $\overrightarrow{TF_1}=\left(-3,-\frac{b}{a}\right)$，$\overrightarrow{TF_2}=\left(1,-\frac{b}{a}\right)$.

由 $\overrightarrow{TF_1}\cdot\overrightarrow{TF_2}=-2$，得 $-3+\frac{b^2}{a^2}=-2$，即 $-3+\frac{4-a^2}{a^2}=-2$，解得 $a^2=2$，所以 $b^2=c^2-a^2=2$，所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)证明：设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $(1-k^2)x^2+2k^2x-k^2-2=0$，

则 $1-k^2\neq0$，$\Delta=4k^4-4(1-k^2)(-k^2-2)>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{2k^2}{k^2-1}$，$x_1x_2=\frac{k^2+2}{k^2-1}$，所以 $k_{AF_2}+k_{BF_2}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{k(x_1-1)}{x_1-2}+\frac{k(x_2-1)}{x_2-2}=k\times\frac{2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{k}{(x_1-2)(x_2-2)}\left[2\times\frac{k^2+2}{k^2-1}-3\times\frac{2k^2}{k^2-1}+4\right]=\frac{k}{(x_1-2)(x_2-2)}\cdot\frac{2k^2+4-6k^2+4k^2-4}{k^2-1}=0$，

所以 $k_{BF_2}=-k_{AF_2}$，即 $\angle MF_2H=\angle NF_2H$，

又因为 $MN\perp HF_2$，所以 $|HM|=|HN|$.

变式题 2 **解：**(1)由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\a^2=b^2+c^2,\\2b=2\sqrt{2},\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a^2=4,\\b^2=2,\\c^2=2,\end{cases}$

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)证明：由 $\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，则 $\Delta=8(4k^2-m^2+2)>0$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{2k^2+1}$.

因为 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$，点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}|m|\cdot|x_1-x_2|=\frac{1}{2}|m|\sqrt{\left(\frac{-4km}{2k^2+1}\right)^2-4\cdot\frac{2m^2-4}{2k^2+1}}=\sqrt{2}$，

即 $m^4-(4k^2+2)m^2+(2k^2+1)^2=0$，可得 $m^2=2k^2+1$，满足 $\Delta=8(4k^2-m^2+2)>0$，

所以 $k_{OM}\cdot k_{ON}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=\frac{k^2(2m^2-4)+km(-4km)+m^2(2k^2+1)}{2m^2-4}=\frac{1-2k^2}{4k^2-2}=-\frac{1}{2}$.

设 $T(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$，即 $x_0^2=2(2-y_0^2)$，

所以 $k_{AT}\cdot k_{BT}=\frac{y_0-\sqrt{2}}{x_0}\cdot\frac{y_0+\sqrt{2}}{x_0}=\frac{y_0^2-2}{x_0^2}=-\frac{1}{2}$，

因为 $AT/\!/OM$，所以 $k_{AT}=k_{OM}$，

又 $k_{OM}\cdot k_{ON}=k_{AT}\cdot k_{BT}$，所以 $k_{BT}=k_{ON}$，所以 $BT/\!/ON$.

第 2 课时　定点、定值、探索性问题

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)根据已知条件，求出双曲线的实半轴长 a 和虚半轴长 b，即可求解.

(2)分直线 MN 的斜率不存在与存在两种情况进行分析，当直线 MN 的斜率不存在时，可求得点 P 坐标；当直线 MN 的斜率存在时，设出点 M，N 坐标及直线 MN 的方程，并与双曲线 C 的方程联立，再结合根与系数的关系推得点 P 的横坐标为定值. 即可得证.

解：(1)设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，由题意得 $\begin{cases}c=2\sqrt{5},\\\frac{c}{a}=\sqrt{5},\\c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=2,\\b=4,\\c=2\sqrt{5},\end{cases}$

故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

(2)证明：由(1)得 $A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$.

当直线 MN 的斜率不存在时，直线 MN 的方程为 $x=-4$，则易知 $M(-4,4\sqrt{3})$，$N(-4,-4\sqrt{3})$，∴直线 MA_1 的方程为 $y=-2\sqrt{3}(x+2)$，直线 NA_2 的方程为 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-2)$，

由 $\begin{cases}y=-2\sqrt{3}(x+2),\\y=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-2),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2\sqrt{3},\end{cases}$ ∴$P(-1,-2\sqrt{3})$.

当直线 MN 的斜率存在时，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 MN 的方程为 $y=k(x+4)$，由题意知 $k\neq0$ 且 $k\neq\pm2$，

直线 MA_1 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 NA_2 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$. 联立直线 MA_1 与直线 NA_2 的方程，消去 y 得 $\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，则 $\frac{k(x_1+4)}{x_1+2}(x+2)=$

$\frac{k(x_2+4)}{x_2-2}(x-2)$，即 $(x_1+4)(x_2-2)(x+2)=(x_2+4)(x_1+2)(x-2)$，解得 $x=2\cdot\frac{x_1x_2+x_1+3x_2}{3x_1-x_2+8}$①.

由 $\begin{cases}y=k(x+4),\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1,\end{cases}$ 可得 $(4-k^2)x^2-8k^2x-16k^2-16=0$，

则 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8k^2}{4-k^2},\\ x_1x_2=-16\cdot\frac{k^2+1}{4-k^2},\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x_1x_2=-2\cdot\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(x_1+x_2),\\ 8=\left(\frac{4}{k^2}-1\right)(x_1+x_2),\end{cases}$

代入①可得 $x=2\cdot\frac{-2\cdot\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(x_1+x_2)+x_1+3x_2}{3x_1-x_2+\left(\frac{4}{k^2}-1\right)(x_1+x_2)}=$

$-\frac{\left(\frac{-2}{k^2}-1\right)x_1+\left(1-\frac{2}{k^2}\right)x_2}{\left(\frac{-2}{k^2}-1\right)x_1+\left(1-\frac{2}{k^2}\right)x_2}=-1$，∴当直线 MN 的斜率存在时，点 P 在直线 $x=-1$ 上. 又点 $(-1,-2\sqrt{3})$ 在直线 $x=-1$ 上，故点 P 在定直线 $x=-1$ 上.

变式题 **解**：(1)设 E 的方程为 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$. 将 $A(0,-2)$，$B\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 两点的坐标分别代入 E 的方程得 $\begin{cases}\frac{4}{n^2}=1,\\ \frac{9}{4m^2}+\frac{1}{n^2}=1,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}m^2=3,\\ n^2=4,\end{cases}$ 故 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)证明：由 $A(0,-2)$，$B\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 可得直线 AB 的方程为 $y=\frac{2}{3}x-2$.

①若过点 $P(1,-2)$ 的直线的斜率不存在，则该直线的方程为 $x=1$，将 $x=1$ 代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，可得 $M\left(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$N\left(1,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，将 $y=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 代入 $y=\frac{2}{3}x-2$，可得 $x=3-\sqrt{6}$，则 $T\left(3-\sqrt{6},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. 由 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，得 $H\left(5-2\sqrt{6},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，则直线 HN 的方程为 $y=\left(2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)x-2$，此时直线 HN 过点 $(0,-2)$.

②若过点 $P(1,-2)$ 的直线的斜率存在，则设该直线的方程为 $y=k(x-1)-2$，$M(x_1,y_1)(-2<y_1<-1)$，$N(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=k(x-1)-2,\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4},\\ x_1x_2=\frac{3k(4+k)}{3k^2+4},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-8(2+k)}{3k^2+4},\\ y_1y_2=\frac{8(2+2k-k^2)}{3k^2+4},\end{cases}$

且 $x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}$. 由 $\begin{cases}y=y_1,\\ y=\frac{2}{3}x-2,\end{cases}$ 可得 $T\left(\frac{3y_1}{2}+3,y_1\right)$，则 $H(3y_1+6-x_1,y_1)$，

则直线 HN 的方程为 $y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$，

将 $(0,-2)$ 的坐标代入整理得 $2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$，

可得 $24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$，显然成立，此时直线 HN 过点 $(0,-2)$.

综上，直线 HN 过定点 $(0,-2)$.

例 2 **【思路点拨】**(1)根据题意可得 $2b=2$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，结合 $a^2=b^2+c^2$ 即可求得 a^2，b^2，c^2 的值，进而得到椭圆 C 的方程；(2)设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，代入椭圆 C 的方程，写出直线 AM 的方程，即可求得点 P 的坐标，同理可得点 Q 的坐标，进而求得点 G 的坐标，即可求得直线 EG 的斜率，结合根与系数的关系得到 $k\cdot k'=-\frac{1}{3}$.

解：(1)由题意得 $\begin{cases}2b=2,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\\ c^2=3,\end{cases}$

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)证明：设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq0)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2}$.

直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令 $x=4$，得 $y=\frac{6y_1}{x_1+2}$，所以 $P\left(4,\frac{6y_1}{x_1+2}\right)$，同理可得 $Q\left(4,\frac{6y_2}{x_2+2}\right)$，

所以 $G\left(4,\frac{3y_1}{x_1+2}+\frac{3y_2}{x_2+2}\right)$，则 $k'=\frac{\frac{3y_1}{x_1+2}+\frac{3y_2}{x_2+2}}{4-1}=\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{y_1(x_2+2)+y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{k(x_1-1)(x_2+2)+k(x_2-1)(x_1+2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=$

$\frac{2kx_1x_2+k(x_1+x_2)-4k}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\frac{2k\cdot\frac{4k^2-4}{1+4k^2}+k\cdot\frac{8k^2}{1+4k^2}-4k}{\frac{4k^2-4}{1+4k^2}+2\times\frac{8k^2}{1+4k^2}+4}=-\frac{1}{3k}$，所以 $k\cdot k'=-\frac{1}{3}$，为定值.

变式题 **解**：(1)由题意可知，双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过点 $(\pm2\sqrt{2},2)$，$(4,\pm2\sqrt{3})$，

将上述点的坐标代入方程可得 $\begin{cases}\frac{8}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1,\\ \frac{16}{a^2}-\frac{12}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=4,\end{cases}$

∴双曲线 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)方法一：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，当直线 MN 的斜率存在且不为 0 时，设直线 MN：$y=k(x-4)+2(k\neq0)$，由 $\begin{cases}y=k(x-4)+2,\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $x^2-[k(x-4)+2]^2-4=0$，

∵x_1，x_2 为方程 $x^2-[k(x-4)+2]^2-4=0$ 的两根，

∴$x^2-[k(x-4)+2]^2-4=(1-k^2)(x-x_1)(x-x_2)$，

∴$x_0^2-[k(x_0-4)+2]^2-4=(1-k^2)(x_0-x_1)(x_0-x_2)$.

由 $y=k(x-4)+2$，得 $x=\frac{y-2}{k}+4$，由 $\begin{cases}x=\frac{y-2}{k}+4,\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 得 $\left(\frac{y-2}{k}+4\right)^2-y^2-4=0$，即 $(y-2+4k)^2-k^2y^2-4k^2=0$，

同理可得 $(y_0-2+4k)^2-k^2y_0^2-4k^2=(1-k^2)(y_0-y_1)(y_0-y_2)$. 则 $k_1k_2=\frac{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(1-k^2)(y_0-y_1)(y_0-y_2)}{(1-k^2)(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(y_0-2+4k)^2-k^2y_0^2-4k^2}{x_0^2-[k(x_0-4)+2]^2-4}=\frac{(-y_0^2+12)k^2+(8y_0-16)k+y_0^2-4y_0+4}{(-x_0^2+8x_0-16)k^2+(-4x_0+16)k+x_0^2-8}$，

若 k_1k_2 为定值，则 $\frac{-y_0^2+12}{-x_0^2+8x_0-16}=\frac{8y_0-16}{-4x_0+16}=$

$\frac{y_0^2-4y_0+4}{x_0^2-8}$，结合 $y_0=x_0+1$，

可得 $x_0=3$，$y_0=4$，即 $P(3,4)$，则 $k_1k_2=4$.

当直线 MN 的斜率为 0 时，M，N 的坐标为 $(\pm2\sqrt{2},2)$，若 $P(3,4)$，则 $k_1k_2=\frac{4-2}{3-2\sqrt{2}}\times\frac{4-2}{3+2\sqrt{2}}=4$.

当直线 MN 的斜率不存在时，M，N 的坐标为 $(4,\pm2\sqrt{3})$，若 $P(3,4)$，则 $k_1k_2=\frac{4-2\sqrt{3}}{3-4}\times\frac{4+2\sqrt{3}}{3-4}=4$.

综上所述，当 $P(3,4)$ 时，$k_1k_2=4$，为定值.

方法二：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $(y_1-2)(x_2-4)=(y_2-2)(x_1-4)$，$\therefore\begin{cases}x_1-4=\lambda(x_2-4),\\y_1-2=\lambda(y_2-2)\end{cases}$（其中 $\lambda\in\mathbf{R}$，$\lambda\neq0$），

$\therefore\begin{cases}x_1=\lambda x_2+4(1-\lambda),\\y_1=\lambda y_2+2(1-\lambda),\end{cases}$ $\therefore[\lambda x_2+4(1-\lambda)]^2-[\lambda y_2+2(1-\lambda)]^2=4$，$x_2^2-y_2^2=4$，整理可得 $(\lambda-1)(-2\lambda x_2+\lambda y_2+4\lambda-2)=0$. 当 $\lambda=1$ 时，$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，不合题意；

当 $\lambda\neq1$ 时，由 $-2\lambda x_2+\lambda y_2+4\lambda-2=0$，得 $\frac{1}{\lambda}=2-x_2+\frac{y_2}{2}$.

设 $P(x_0,y_0)$，则 $y_0=x_0+1$，$\therefore k_1k_2=\frac{y_1-(x_0+1)}{x_1-x_0}\cdot\frac{y_2-(x_0+1)}{x_2-x_0}=\frac{2y_2-2x_2+2-\left(2-x_2+\frac{y_2}{2}\right)(x_0+1)}{(4-3x_2+2y_2)-\left(2-x_2+\frac{y_2}{2}\right)x_0}\cdot\frac{y_2-(x_0+1)}{x_2-x_0}=\frac{y_2\left(\frac{3}{2}-\frac{x_0}{2}\right)+x_2(x_0-1)-2x_0}{y_2\left(2-\frac{x_0}{2}\right)+x_2(x_0-3)+4-2x_0}\cdot\frac{y_2-(x_0+1)}{x_2-x_0}$，若 k_1k_2 为定值，则 $\frac{3}{2}-\frac{x_0}{2}=0$，$\frac{x_0-1}{1}=\frac{-2x_0}{-x_0}$ 且 $x_0-3=0$，$\frac{1}{2-\frac{x_0}{2}}=\frac{-x_0-1}{4-2x_0}$，解得 $x_0=3$，

$\therefore P(3,4)$，此时 $k_1k_2=\frac{2x_2-6}{\frac{1}{2}y_2-2}\cdot\frac{y_2-4}{x_2-3}=4$.

故当 $P(3,4)$ 时，$k_1k_2=4$，为定值.

例 3 **【思路点拨】**(1)由 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，直线 $l:y=\sqrt{3}x-3$ 经过椭圆长轴的一个端点，得 a，b 的值，即可求出椭圆方程；

(2)由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 和 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1,\\y=kx+m,\end{cases}$ 可得 $4m^2=1+3k^2$，再求 $|BC|$ 和点 A 到直线 l 的距离 d 即可.

解：(1)$y=\sqrt{3}x-3$，令 $y=0$，得 $x=\sqrt{3}$，$\therefore a=\sqrt{3}$，

又 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore c=\sqrt{2}$，$\therefore b^2=a^2-c^2=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=1$，

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)证明：设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，$\because\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，$\therefore p+x_1+x_2=0$，$q+y_1+y_2=0$，$\therefore p=-(x_1+x_2)$，$q=-(y_1+y_2)$. 由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1,\\y=kx+m,\end{cases}$ 可得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，$\Delta=(6km)^2-12(1+3k^2)(m^2-1)=12(3k^2+1-m^2)>0$，由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=\frac{-6km}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3(m^2-1)}{1+3k^2}$，$\therefore y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+3k^2}$，

$\therefore p=-(x_1+x_2)=\frac{6km}{1+3k^2}$，$q=-(y_1+y_2)=-\frac{2m}{1+3k^2}$.

$\because$ 点 A 在椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上，$\therefore\left(\frac{6km}{1+3k^2}\right)^2+3\left(\frac{-2m}{1+3k^2}\right)^2=3$，化简可得 $4m^2=1+3k^2$，$\therefore|BC|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{-6km}{1+3k^2}\right)^2-4\cdot\frac{3(m^2-1)}{1+3k^2}}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3k^2+1-m^2}}{1+3k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4m^2-m^2}}{1+3k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6|m|}{1+3k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6|m|}{4m^2}=\frac{3\sqrt{k^2+1}}{2|m|}$，

又点 A 到直线 l 的距离 $d=\frac{|pk-q+m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\left|\frac{6km}{1+3k^2}\cdot k+\frac{2m}{1+3k^2}+m\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|3m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{k^2+1}}{2|m|}\cdot\frac{|3m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{9}{4}$，

$\therefore\triangle ABC$ 的面积为定值 $\frac{9}{4}$.

变式题 **解：**(1)因为椭圆 C 的短轴长为 2，所以 $b=1$.

因为 $|MF_2|=7|MF_1|$，$|MF_2|+|MF_1|=7|MF_1|+|MF_1|=8|MF_1|=2a$，所以 $|MF_1|=\frac{a}{4}$，$|MF_2|=7|MF_1|=\frac{7a}{4}$，又因为 $MF_1\perp x$ 轴，所以 $|MF_2|^2=|MF_1|^2+|F_1F_2|^2$，即 $\left(\frac{7a}{4}\right)^2=\left(\frac{a}{4}\right)^2+4c^2$，结合 $a^2-b^2=a^2-1=c^2$，可得 $a^2=4$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $A_1(-x_1,-y_1)$，$A_2(x_1,-y_1)$，由 $\begin{cases}x=ty+m,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 得 $(t^2+4)y^2+2tmy+m^2-4=0$，则 $y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+4}$，$y_1+y_2=\frac{-2tm}{t^2+4}$，所以 $\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4-m^2}{2tm}$，

直线 BA_2 的方程为 $y-y_2=\frac{y_1+y_2}{x_2-x_1}(x-x_2)$，

令 $y=0$，得 $x=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(ty_1+m)y_2+(ty_2+m)y_1}{y_1+y_2}=\frac{2ty_1y_2+m(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=m+2t\cdot\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4}{m}-m+m=\frac{4}{m}$，

则 $D\left(\frac{4}{m},0\right)$，所以 A_1D 的中点的坐标为 $\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1,-\frac{1}{2}y_1\right)$. 由题知 A_1D 的中点在直线 $x=ty+m$ 上，可得 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1=-\frac{1}{2}ty_1+m$，即 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}(ty_1+m)=\frac{2}{m}-\frac{1}{2}ty_1-\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}ty_1+m$，即 $\frac{2}{m}=\frac{3}{2}m$，可得 $m^2=\frac{4}{3}$，又 $0<m<2$，所以 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 4 **【思路点拨】**(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，联立直线 l 与双曲线 E 的方程，得点 M 的坐标，进而得点 M 的轨迹方程；

(2)设 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，将双曲线 E 的渐近线方程与直线 l 的方程联立，得到线段 AB 的中点 M 也是线段 CD 的中点，由 A，B 为线段 CD 的两个三等分点，得 $|CD|=3|AB|$，利用弦长公式求解即可.

解：(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，

由 $\begin{cases}y=kx-3,\\\frac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1-4k^2)x^2+24kx-40=0$.

由 $\Delta=160-64k^2>0$ 且 $1-4k^2\neq0$，得 $k^2<\frac{5}{2}$ 且 $k^2\neq\frac{1}{4}$.

由根与系数的关系得 $x_1+x_2=\frac{-24k}{1-4k^2}$，$x_1x_2=\frac{-40}{1-4k^2}$，

所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-12k}{1-4k^2}$，$y_0=kx_0-3=\frac{-12k^2}{1-4k^2}-3=\frac{-3}{1-4k^2}$. 由 $\begin{cases}x_0=\frac{-12k}{1-4k^2},\\y_0=\frac{-3}{1-4k^2},\end{cases}$ 消去 k，得 $x_0^2=4y_0^2+12y_0$.

由 $k^2<\frac{5}{2}$ 且 $k^2\neq\frac{1}{4}$，可得 $y_0\leqslant-3$ 或 $y_0>\frac{1}{3}$. 所以点 M 的

轨迹方程为 $x^2=4y^2+12y$，其中 $y\leqslant -3$ 或 $y>\frac{1}{3}$.

(2)双曲线 E 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，不妨设点 C 在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上，设 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x,\\ y=kx-3,\end{cases}$ 得 $x_3=\frac{6}{2k-1}$，同理可得 $x_4=\frac{6}{2k+1}$.

因为 $\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{-12k}{1-4k^2}=x_0$，所以线段 AB 的中点 M 也是线段 CD 的中点. 若 A,B 为线段 CD 的两个三等分点，则 $|CD|=3|AB|$，即 $\sqrt{1+k^2}\,|x_3-x_4|=3\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$，即 $|x_3-x_4|=3|x_1-x_2|$. 因为 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(\frac{-24k}{1-4k^2}\right)^2+\frac{160}{1-4k^2}}$，$|x_3-x_4|=\left|\frac{6}{2k-1}-\frac{6}{2k+1}\right|=\frac{12}{|4k^2-1|}$，所以 $\frac{12}{|4k^2-1|}=3\sqrt{\left(\frac{-24k}{1-4k^2}\right)^2+\frac{160}{1-4k^2}}$，解得 $k=\pm\frac{3}{2}$，所以存在实数 $k=\pm\frac{3}{2}$，使得 A,B 是线段 CD 的两个三等分点.

变式题 **解**：(1)由题意知，椭圆 C 的焦距 $2c=2$，则其焦点为 $(-1,0)$和$(1,0)$，由椭圆的定义得，椭圆 C 的长轴长 $2a=\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\sqrt{(1+1)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$，即 $a=\sqrt{2}$，则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设 $P(x_0,y_0)$，显然 $x_0\neq\pm\sqrt{2}$，设过点 P 的直线 l 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，由 $\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0),\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1+2k^2)x^2+4k(y_0-kx_0)x+2(y_0-kx_0)^2-2=0$，

若直线 l 与椭圆 C 相切，则 $\Delta=16k^2(y_0-kx_0)^2-8(1+2k^2)[(y_0-kx_0)^2-1]=0$，得 $(y_0-kx_0)^2=1+2k^2$，

即 $(x_0^2-2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-1=0$. 设直线 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2，显然 k_1,k_2 是上述关于 k 的一元二次方程的两个根，则 $k_1k_2=\frac{y_0^2-1}{x_0^2-2}=-1$，化简得 $x_0^2+y_0^2=3(x_0\neq\pm\sqrt{2})$，

故点 P 在以原点 O 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆上(除去$(\pm\sqrt{2},\pm1)$四个点)，而点 A 为该圆上的一个定点，

当满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 时，点 P 与点 A 或 B 重合，或 AB 为圆 O 的直径，即点 B 的坐标为$(\sqrt{3},0)$，

所以存在定点 $B(\sqrt{3},0)$，使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$.

思维拓展（三） 数学运算之解析几何设点、设线问题

【针对训练】

1. **解**：(1)由题意知，$p=2$，$\therefore y^2=4x$.

(2)由(1)知，抛物线 $C:y^2=4x$，$F(1,0)$，设点 Q 的坐标为 (m,n)，直线 OQ 的斜率为 k，则 $\overrightarrow{QF}=(1-m,-n)$，$\therefore\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}=(9-9m,-9n)$，$\therefore$ 点 P 的坐标为$(10m-9,10n)$，

将点 P 的坐标代入抛物线的方程得 $100n^2=40m-36$，

整理得 $m=\frac{100n^2+36}{40}=\frac{25n^2+9}{10}$，当 $n\leqslant0$ 时，$k=\frac{n}{m}=\frac{10n}{25n^2+9}\leqslant0$；当 $n>0$ 时，$k=\frac{n}{m}=\frac{10n}{25n^2+9}=\frac{10}{25n+\frac{9}{n}}\leqslant\frac{1}{3}$，

当且仅当 $25n=\frac{9}{n}$，即 $n=\frac{3}{5}$ 时，等号成立.

故直线 OQ 的斜率的最大值为 $\frac{1}{3}$.

2. **解**：(1)由题设得 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，解得 $a^2=6$，$b^2=3$. 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)证明：

方法一：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

若直线 MN 与 x 轴不垂直，设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$，代入 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，

于是 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}$. ①

由 $AM\perp AN$ 知 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，故 $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，可得 $(k^2+1)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+(m-1)^2+4=0$，将①代入上式可得 $(k^2+1)\frac{2m^2-6}{1+2k^2}-(km-k-2)\frac{4km}{1+2k^2}+(m-1)^2+4=0$，整理得 $(2k+3m+1)(2k+m-1)=0$. 因为 $A(2,1)$ 不在直线 MN 上，所以 $2k+m-1\neq0$，故 $2k+3m+1=0$，$k\neq1$，

于是 MN 的方程为 $y=k\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}(k\neq1)$，

所以直线 MN 过点 $P\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

若直线 MN 与 x 轴垂直，可得 $N(x_1,-y_1)$.

由 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$ 得 $(x_1-2)(x_1-2)+(y_1-1)(-y_1-1)=0$，又 $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$，所以 $3x_1^2-8x_1+4=0$，解得 $x_1=2$(舍去)或 $x_1=\frac{2}{3}$. 此时直线 MN 过点 $P\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

令 Q 为 AP 的中点，即 $Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$.

若 D 与 P 不重合，连接 DP，则由题设知 AP 是 $\mathrm{Rt}\triangle ADP$ 的斜边，故 $|DQ|=\frac{1}{2}|AP|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

若 D 与 P 重合，则 $|DQ|=\frac{1}{2}|AP|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

综上，存在点 $Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$，使得 $|DQ|$ 为定值.

方法二：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，当直线 AM 的斜率存在且不为 0 时，依题意知 $k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{y_1-1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2-2}=-1$，

因为 $\frac{y_2-1}{x_2-2}\cdot\frac{y_2+1}{x_2+2}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{y_1-1}{x_1-2}\cdot\frac{x_2+2}{y_2+1}=2$，

整理得 $x_2y_1-2x_1y_2=x_2+2x_1-4y_2-2y_1-2$，

同理得 $x_1y_2-2x_2y_1=x_1+2x_2-4y_1-2y_2-2$，两式相减可得 $x_2y_1-x_1y_2=\frac{2}{3}(y_1-y_2)-\frac{1}{3}(x_2-x_1)$，即 $\left(-\frac{1}{3}-y_1\right)(x_1-x_2)=\left(\frac{2}{3}-x_1\right)(y_1-y_2)$，即直线 MN 恒过定点 $H\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，连接 AH，又 $AD\perp MN$，所以点 D 在以 AH 为直径的圆上，线段 AH 的中点 $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ 即为圆心 Q.

经检验，当直线 AM 的斜率不存在或为 0 时上述结论也成立.

故存在 $Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$，使得 $|DQ|=\frac{1}{2}|AH|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，为定值.

方法三：由题意，设直线 AM 的方程为 $y=k(x-2)+1(k\neq0,1)$，代入椭圆方程，可得 $(2k^2+1)x^2+(4k-8k^2)x+8k^2-8k-4=0$.

因为 $x_A=2$，所以 $x_M=\frac{4k^2-4k-2}{2k^2+1}$，

所以 $y_M=\frac{-2k^2-4k+1}{2k^2+1}$. 因为 $AM\perp AN$，所以将 $-\frac{1}{k}$ 代替上面的 k，可得 $x_N=\frac{-2k^2+4k+4}{k^2+2}$，$y_N=\frac{k^2+4k-2}{k^2+2}$，

所以 $k_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{-k^2-3k+1}{(k-2)(2k+1)}(k\neq2)$，所以直线 MN 的方程为 $y-\frac{k^2+4k-2}{k^2+2}=\frac{-k^2-3k+1}{(k-2)(2k+1)}\left(x-\frac{-2k^2+4k+4}{k^2+2}\right)$，即 $y=\frac{-k^2-3k+1}{(k-2)(2k+1)}\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}$，所以直线 MN 恒过定点 $H\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，连接 AH，

又 $AD\perp MN$，所以点 D 在以 AH 为直径的圆上，线段 AH 的中点 $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ 即为圆心 Q.

经检验，当 $k=0$ 或 $k=2$ 或直线 AM 的斜率不存在时上述结论也成立.

故存在 $Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$，使得 $|DQ|=\frac{1}{2}|AH|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，为定值.

第九单元　统计

第 55 讲　抽样的基本方法

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)全面调查　抽样调查　个体　样本量

(2) $\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_N}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i$　$\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$

2. (5)将号签充分搅拌　重复

3. (1)若干个子总体(层)　简单随机

(4) $\frac{n_1}{n_1+n_2}\overline{x}_1+\frac{n_2}{n_1+n_2}\overline{x}_2$　$\frac{n_1}{n_1+n_2}[s_1^2+(\overline{x}_1-\overline{x})^2]+\frac{n_2}{n_1+n_2}[s_2^2+(\overline{x}_2-\overline{x})^2]$

【对点演练】

1. 31　**【解析】** 随机抽样中，随机数法获取的个体编号在指定编号范围内，遇到大于总体编号或者重复编号的舍去不要. 由给定的数据知，第 5 个数据仍是 8，重复，应舍去，所以选出来的第 5 个个体的编号为 31.

2. 分层随机抽样　简单随机抽样　**【解析】** ①中该社区 500 户家庭的收入有明显差异，所以应选用分层随机抽样法；②中 15 个个体间没有明显差异，所以应选用简单随机抽样法.

3. 150　**【解析】** 依题意，得 $\frac{n}{200+1600+1200}=\frac{60}{1200}$，解得 $n=150$.

4. 一批炮弹的杀伤半径　每发炮弹的杀伤半径　50 发炮弹的杀伤半径　50　**【解析】** 在这次调查中，总体是一批炮弹的杀伤半径，个体是每发炮弹的杀伤半径，样本是 50 发炮弹的杀伤半径，样本容量是 50.

5. $\frac{1}{20}$　**【解析】** 由题意得，指定的某个个体被抽到的概率为 $\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$.

6. 880　**【解析】** 依题意男生抽取 $\frac{n}{10}\times\frac{6}{6+5}=\frac{6n}{110}$(人)，女生抽取 $\frac{n}{10}\times\frac{5}{6+5}=\frac{5n}{110}$(人)，所以 $\frac{6n}{110}-\frac{5n}{110}=8$，解得 $n=880$.

● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】** (1)根据简单随机抽样适用的条件及各种抽样方法的要求，对选项进行逐一判断即可. (2)首先根据第二次抽取时余下的每个个体被抽到的概率为 $\frac{1}{5}$，得 n 的值，然后由简单随机抽样的等可能性，求得每个个体被抽到的概率.

(1)AC　(2) $\frac{7}{33}$　**【解析】** (1)在平面直角坐标系中有无数个点，这与总体中的个体数有限不相符，故 A 中的抽样方法不是简单随机抽样；易知 B 中的抽样方法是简单随机抽样；挑选的 5 名同学是最优秀的，不符合简单随机抽样的等可能性，故 C 中的抽样方法不是简单随机抽样；易知 D 中的抽样方法是简单随机抽样. 故选 AC.

(2)第二次抽取时，余下的每个个体被抽到的概率为 $\frac{1}{5}$，则 $\frac{14-1}{n-1}=\frac{1}{5}$，即 $n-1=65$，则 $n=66$，∴在整个抽样过程中，每个个体被抽到的概率为 $\frac{14}{66}=\frac{7}{33}$.

变式题　(1)C　(2)8　$\frac{3}{8}$　**【解析】** (1)①不是简单随机抽样，因为简单随机抽样要求被抽取的总体中的个体数是有限的. ②是简单随机抽样. ③不是简单随机抽样，因为 50 名党员官兵是从中挑出来的，是最优秀的，每个个体被抽到的可能性不同，不符合简单随机抽样中“等可能抽样”的要求. ④是简单随机抽样. 故选 C.

(2)简单随机抽样中第一次抽样可以理解为从 n 个个体中抽取一个个体，则每个个体被抽到的可能性是 $\frac{1}{n}$，因此 $n=8$. 在整个抽样过程中，每个个体被抽到的可能性是 $\frac{3}{8}$.

例 2　**【思路点拨】** (1)根据分层随机抽样的特点计算求解即可.

(2)由分层随机抽样的特点，结合扇形图求解即可.

(1)33　(2)415　**【解析】** (1)依题意可得乳制品类要被抽检样品的批次为 $198\times\frac{452}{2712}=198\times\frac{1}{6}=33$.

(2)采用分层随机抽样的方法从参加活动的全体市民中抽取一个样本量为 900 的样本，由图①知应从中年人中抽取 $900\times55\%=495$(人). 因为游泳组的市民人数是登山组市民人数的 3.5 倍，所以应从游泳组中抽取 700 人，从登山组中抽取 200 人，由图②知应从登山组的老年人中抽取 $200\times5\%=10$(人)，从登山组的中年人中抽取 $200\times45\%=90$(人)，则应从游泳组的中年人中抽取 $495-90=405$(人)，即应从游泳组的中年人与登山组的老年人中共抽取 $405+10=415$(人).

变式题　(1)D　(2)A　**【解析】** (1)根据题意知分层抽样比例为 $\frac{30}{200}=\frac{3}{20}$，所以抽取的总人数为 $(1600+600+200)\times\frac{3}{20}=360$. 故选 D.

(2)由题意，全校参与跑步的人数占总人数的 $\frac{3}{5}$，所以样本中参与跑步的人数为 $200\times\frac{3}{5}=120$，则从高二年级参与跑步的学生中应抽取的人数为 $120\times\frac{3}{2+3+5}=36$. 故选 A.

第 56 讲　用样本估计总体

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (2)①最大值　最小值　②组距　组数　③分组　④频率分布表　⑤频率分布直方图

2. (1) $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

(2)从小到大　中间　(3)最多

(5) $\sum_{i=1}^{n}w_i\overline{x}_i$　$\sum_{i=1}^{n}w_i[s_i^2+(\overline{x}_i-\overline{x})^2]$

(6)①小于或等于　②从小到大　np

【对点演练】

1. 4.5　5.5　**【解析】** 由题意得中位数 $m=\frac{4+5}{2}=4.5$，而 $10\times60\%=6$，则 60%分位数 $a=\frac{5+6}{2}=5.5$.

2. 70　**【解析】** 由频率分布直方图得，数据在区间[6,10)上的频率为 $1-(0.025+0.050+0.075)\times2=0.7$，∵容量为 100，∴数据在区间[6,10)上的频数为 $0.7\times100=70$.

3. 丙　**【解析】** 从表格中可以看出乙和丙的平均环数最高，即平均成绩最好，又乙、丙两人之间，丙的方差较小，所以丙发挥得比乙稳定，故最佳人选应为丙.

4. 7　8.5　**【解析】** 由题意知，这 10 名学生的得分为 3,6,6,6,6,6,7,8,9,10，其极差是 $10-3=7$，因为 $10\times80\%=8$，所以

80%分位数是$\frac{8+9}{2}=8.5$.

5. 3 **[解析]** 由题意可得，$3x_1-1,3x_2-1,3x_3-1,3x_4-1,3x_5-1$的方差是$9\times\frac{1}{3}=3$.

6. 70 70 68 **[解析]** 由题意知众数为$\frac{60+80}{2}=70$. 因为$0.005\times20+0.010\times20=0.3<0.5$，$(0.005+0.010+0.020)\times20=0.7>0.5$，所以中位数位于[60,80)内，设中位数为$x$，则$(0.005+0.010)\times20+(x-60)\times0.020=0.5$，解得$x=70$. 平均数为$30\times0.1+50\times0.2+70\times0.4+90\times0.3=68$.

7. 变大 变大 不变 **[解析]** ∵数据$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$是某市$n(n\geqslant10,n\in\mathbf{N}^*)$个普通职工的年收入，$x_{n+1}$为世界首富的年收入，∴$x_{n+1}$远大于$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，故这$(n+1)$个数据中，年收入的平均数变大，方差变大，众数不变.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1)对于A，直接求出中位数；对于B，分别计算出甲、乙每日行走步数的极差，判断即可；对于C，通过观察折线图即可判断；对于D，将乙的每日行走步数从小到大排列，再计算75%分位数即可. (2)根据扇形图和条形图，利用频率与样本容量的关系计算出这两年A,B,C,D,E五个等级的苹果产量情况，逐项进行分析可得到答案.

(1)AB (2)B **[解析]** (1)对于A，甲的每日行走步数依次为16 000，7965，12 700，2435，16 800，9500，11 600，从小到大排列为2435，7965，9500，11 600，12 700，16 000，16 800，则中位数是11 600，故A正确；对于B，这一星期内甲的每日行走步数的极差为16 800−2435=14 365，这一星期内乙的每日行走步数的极差为14 200−5340=8860，因为14 365>8860，所以这一星期内甲的每日行走步数的极差大于乙的每日行走步数的极差，故B正确；对于C，由图知甲数据的波动幅度更大，则乙的每日行走步数的方差小于甲的每日行走步数的方差，故C错误；对于D，乙的每日行走步数从小到大排列为5340，7030，10 060，11 600，12 300，12 970，14 200，$7\times75\%=5.25$，则这一星期内乙的每日行走步数的75%分位数是12 970，故D错误. 故选AB.

(2)设2021年的苹果产量为a，则2022年的苹果产量为$2a$，所以2021年A,B,C,D,E五个等级的苹果产量分别为$0.28a,0.32a,0.3a,0.08a,0.02a$，2022年$A,B,C,D,E$五个等级的苹果产量分别为$0.48a,0.8a,0.56a,0.12a,0.04a$. 对于选项A，因为$0.28a<0.48a$，所以2022年$A$等级的苹果产量比2021年多，A错误；对于选项B，因为$\frac{0.8a}{0.32a}=2.5$，所以2022年B等级的苹果产量是2021年的2.5倍，B正确；对于选项C，因为$\frac{0.12a}{0.08a}=1.5$，所以2022年D等级的苹果产量是2021年的1.5倍，C错误；对于选项D，因为$0.02a\neq0.04a$，所以2022年E等级的苹果产量与2021年不同，D错误. 故选B.

变式题 (1)C (2)AC **[解析]** (1)对于A，由题中左图知，样本中男性人数多于女性人数，从而男性比女性更关注地铁建设，故A中结论正确；对于B，由题中右图知，女性中35岁以上的占多数，则样本中多数女性是35岁以上，所以关注地铁建设的女性多数是35岁以上，故B中结论正确；对于C，由题中左图知，男性人数多于女性人数，由题中右图知，35岁以下的男性占男性总人数的比例比35岁以上的女性占女性总人数的比例小，所以无法判断35岁以下的男性人数与35岁以上的女性人数的多少，故C中结论不一定正确；对于D，由题中右图知，样本中35岁以上的人对地铁建设关注度更高，故D中结论正确. 故选C.

(2)根据题图可得，甲同学的逻辑思维成绩排名很靠前但总成绩排名靠后，说明阅读表达成绩排名靠后，所以甲同学的逻辑思维成绩排名比他的阅读表达成绩排名更靠前，故A正确；乙同学的总成绩排名比逻辑思维成绩排名靠前，说明阅读表达成绩排名靠前，所以乙同学的逻辑思维成绩排名比他的阅读表达成绩排名更靠后，故B错误；根据题图，可得甲、乙、丙三位同学的逻辑思维成绩排名中，甲同学最靠前，但甲的总成绩排名最靠后，所以在甲、乙、丙三位同学的阅读表达成绩排名中，甲同学最靠后，故C正确；由图可知，甲同学的总成绩排名比丙同学的总成绩排名更靠后，故D错误. 故选AC.

例 2 **[思路点拨]** (1)设这20名学生的得分分别是$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{20}$，利用平均数和方差的计算公式可得正确的选项. (2)对于A选项，由频率分布直方图的各组频率之和等于1，得到关于x的方程，解方程即可得x的值；对于B选项，由百分位数的计算方法求解即可；对于C选项，频率分布直方图中，平均数的估计值等于各组区间中点值乘各组对应的频率之和；对于D选项，先计算中位数所在区间，再利用中位数对应频率为0.5即可求解. (3)先将16个城市的人口数从小到大排序，再根据百分位数的计算方法求解即可.

(1)B (2)AB (3)880 **[解析]** (1)设这20名学生的得分分别是$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{20}$，则$20m=x_1+x_2+\cdots+x_{20}$，$21m'=x_1+x_2+\cdots+x_{20}+m=21m$，故$m=m'$. 因为$20n=(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+(x_3-m)^2+\cdots+(x_{20}-m)^2$，$21n'=(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+(x_3-m)^2+\cdots+(x_{20}-m)^2+(m'-m)^2$，因为$m=m'$，所以$20n=21n'$. 故选B.

(2)由题得$10\times(0.005+x+0.035+0.030+0.010)=1$，解得$x=0.020$，A正确；前三个小矩形的面积之和为$(0.005+0.020+0.035)\times10=0.6$，前四个小矩形的面积之和为$1-0.010\times10=0.9$，所以估计这组数据的80%分位数为$80+\frac{0.8-0.6}{0.30}\times10\approx86.67$，B正确；估计这组数据的平均数为$10\times(55\times0.005+65\times0.020+75\times0.035+85\times0.030+95\times0.010)=77$，C不正确；由频率分布直方图可知，前两个小矩形的面积之和为$0.005\times10+0.020\times10=0.25<0.50$，前三个小矩形的面积之和为$0.005\times10+0.020\times10+0.035\times10=0.60>0.50$，则中位数在[70,80)内，所以估计这组数据的中位数为$70+\frac{0.5-0.25}{0.35}\times10\approx77.14$，D不正确. 故选AB.

(3)由题意，将16个城市的人口数从小到大排列为219，291，297，386，393，470，547，561，595，710，836，880，920，939，1007，1102. 因为$16\times70\%=11.2$，所以该组数据的70%分位数是第12个数据，即为880，所以该组数据的70%分位数为880.

变式题 (1)C (2)ABC (3)$\frac{9}{2}$ **[解析]** (1)将这5个数据由小到大排序. 因为中位数是10，所以第三个数是10，又因为众数是11，所以第四、五个数是11. 因为极差是3，所以第一个数是8. 因为众数唯一，所以第二个数是9. 故这五个数从小到大排序是8，9，10，11，11，因为$5\times60\%=3$，所以该组数据的60%分位数是$\frac{10+11}{2}=10.5$. 故选C.

(2)由已知得，甲射击10次中靶环数分别为9，5，7，8，7，6，8，6，7，7，将它们从小到大排列为5，6，6，7，7，7，7，8，8，9. 乙射击10次中靶环数分别为2，4，6，8，7，7，8，9，9，10，将它们从小到大排列为2，4，6，7，7，8，8，9，9，10. 甲的中靶环数的平均数$\overline{x}_1=\frac{1}{10}\times(5+6\times2+7\times4+8\times2+9)=7$，乙的中靶环数的平均数$\overline{x}_2=\frac{1}{10}\times(2+4+6+7\times2+8\times2+9\times2+10)=7$，甲的中靶环数的方差$s_1^2=\frac{1}{10}\times[(5-7)^2+(6-7)^2\times2+(7-7)^2\times4+(8-7)^2\times2+(9-7)^2]=\frac{1}{10}\times(4+2+0+2+4)=1.2$，乙的中靶环数的方差$s_2^2=\frac{1}{10}\times[(2-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2\times2+(8-7)^2\times2+(9-7)^2\times2+(10-7)^2]=5.4$. A中，甲的中靶环数的平均数等于乙的中靶环数的平均数，故A正确；B中，因为$s_1^2<s_2^2$，所以甲的成绩比乙稳定，故B正确；C中，甲、乙的中靶环数的平均数均为7，甲命中9环及9环以上的频数为1，乙命中9环及9环以上的频数为3，因此乙的成绩更好，故C正确；D中，从二人中靶环数的走势看，甲的成绩逐渐平稳，乙的成绩仍有上升趋势，则乙更有潜力，故D错误. 故选ABC.

(3)记6名老学员射击环数分别为x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6，8名

学员的射击成绩的平均数和方差分别为 $\overline{x}$，s^2. 由题可知 $\sum_{i=1}^{6}x_i=6\times8=48$，$\sum_{i=1}^{6}(x_i-8)^2=6\times\frac{5}{3}=10$，则 $\overline{x}=\frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{6}x_i+3+5\right)=\frac{1}{8}\times56=7$，所以 $s^2=\frac{1}{8}\left[\sum_{i=1}^{6}(x_i-7)^2+(3-7)^2+(5-7)^2\right]=\frac{1}{8}\left[\sum_{i=1}^{6}(x_i-8+1)^2+20\right]=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{6}[(x_i-8)^2+2x_i-15]+\frac{5}{2}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{6}(x_i-8)^2+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{6}x_i-\frac{35}{4}=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\times48-\frac{35}{4}=\frac{9}{2}$.

例 3 **【思路点拨】**(1)对于 A，B，分别计算相应矩形的面积进而可得结论；对于 C，验证中位数是否为 5h 即可；对于 D，根据频率分布直方图计算平均数的方法求解即可.(2)①在Ⅰ级品频率分布直方图中求出频率 0.7 对应的值即得；②在Ⅱ级品频率分布直方图中求出 $c\geqslant65$ 的频率即得；③用 c 表示出方案一的损失值与方案二的缺失值 101 万元比较即得.

(1)BD **【解析】**对于 A，该校高中学生平均每周英语训练时间不足 4 h 的人数为 $(0.03\times2+0.10\times2)\times5000=1300$，故 A 错误；对于 B，估计该校高中学生平均每周英语训练时间不少于 8 h 的人数所占比例为 $0.08\times2+0.03\times2=0.22=22\%$，故 B 正确；对于 C，假设该校高中学生平均每周英语训练时间的中位数为 5 h，而训练时间小于 5 h 的频率为 $0.03\times2+0.10\times2+\frac{1}{2}\times0.14\times2=0.4$，与频率为 0.5 矛盾，所以平均每周英语训练时间的中位数不为 5 h，故 C 错误；对于 D，估计该校高中学生平均每周英语训练时间为 $0.03\times2\times1+0.10\times2\times3+0.14\times2\times5+0.12\times2\times7+0.08\times2\times9+0.03\times2\times11=5.84$(h)，故 D 正确. 故选 BD.

(2)**解：**①设 Q 型芯片Ⅰ级品该项指标的 70%分位数为 a，该项指标在 80 以下的概率为 0.55，该项指标在 90 以下的概率为 0.8，因此该项指标的 70%分位数 a 一定在 $[80,90)$ 内，由 $0.002\times10+0.005\times10+0.023\times10+0.025\times10+0.025\times(a-80)=0.7$，得 $a=86$，所以 Q 型芯片Ⅰ级品该项指标的 70%分位数为 86.

②当临界值 $c=65$ 时，Q 型芯片Ⅱ级品应用于 A 型手机的概率为 $0.010\times(70-65)=0.05$.

③设直接将 Q 型芯片Ⅰ级品、Ⅱ级品分别应用于生产 A 型手机、B 型手机时，该生产商该项成本为 y(万元)，则 $y=700\times[0.002\times10+0.005\times(c-50)]+300\times[0.01\times10+0.03\times(60-c)]=409-5.5c$，$c\in[50,60]$，令 $y=409-5.5c=101$，可得 $c=56$. 所以当 $50\leqslant c<56$ 时，$y>101$，当 $c=56$ 时，$y=101$，当 $56<c\leqslant60$ 时，$y<101$. 综上，为降低生产商的该项成本，当临界值 $c\in[50,56)$ 时，选择方案二；当临界值 $c=56$ 时，选择方案一和方案二均可；当临界值 $c\in(56,60]$ 时，选择方案一.

变式题 (1)AB **【解析】**对于 A，由题得 $(0.01+0.02+0.04+x+0.005)\times10=1$，解得 $x=0.025$，故 A 正确；对于 B，设 80%分位数为 N，易知 N 落在区间 $[80,90)$ 中，则 $(0.01+0.02+0.04)\times10+0.025\times(N-80)=0.8$，解得 $N=84$，故 B 正确；对于 C，估计全市初二学生数学水平分数为 60 分以下的人数占比为 0.1，则全市初二学生数学水平分数低于 60 分的人数约为 $36\,000\times0.1=3600$，故 C 错误；对于 D，估计全市初二学生数学水平分数为 80 分及以上的人数占比为 $(0.025+0.005)\times10=0.3=30\%$，故 D 错误. 故选 AB.

(2)**解：**①估计该地区这种疾病患者的平均年龄为 $(5\times0.001+15\times0.002+25\times0.012+35\times0.017+45\times0.023+55\times0.020+65\times0.017+75\times0.006+85\times0.002)\times10=47.9$(岁).

②估计该地区这种疾病患者的年龄在区间 $[20,70)$ 内的概率为 $1-(0.001+0.002+0.006+0.002)\times10=1-0.11=0.89$.

③设 $B=$“此人的年龄在区间 $[40,50)$ 内”，$C=$“此人患这种疾病”，则由条件概率公式，得 $P(C\mid B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{0.1\%\times0.023\times10}{16\%}=\frac{0.001\times0.23}{0.16}=0.001\,437\,5\approx0.001\,4$，所以若此人的年龄在区间 $[40,50)$ 内，则此人患这种疾病的概率约为 0.001 4.

第 57 讲　统计案例

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

一、2. (2)①正相关　负相关　②越强　越弱

【对点演练】

1. $r_2<r_4<r_3<r_1$ **【解析】**根据散点图可知，图①③中的样本数据正相关，图②④中的样本数据负相关，$\therefore r_1>0$，$r_2<0$，$r_3>0$，$r_4<0$. 又图①②中的散点近似在一条直线上，则图①②中的样本数据的线性相关程度比较高. 图③④中的散点比较分散，故图③④中的样本数据的线性相关程度比较低，即 $|r_1|$ 与 $|r_2|$ 比较大，$|r_4|$ 与 $|r_3|$ 比较小，$\therefore r_2<r_4<r_3<r_1$.

2. 6.1 **【解析】**由表格数据知 $\overline{x}=4$，设污损的数据为 a，则 $\overline{y}=\frac{25.4+a}{6}$，$\therefore\frac{25.4+a}{6}=1.03\times4+1.13$，解得 $a=6.1$，即污损的数据为 6.1.

3. 88 **【解析】**因为样本中志愿者的总人数为 100，所以 $a+b+d+12=100$，解得 $a+b+d=88$.

4. ④ **【解析】**根据 Y 关于 X 的线性回归方程 $Y=0.85X-85.71$，可知 Y 与 X 具有正的线性相关关系，①中结论正确；回归直线过点 $(\overline{x},\overline{y})$，②中结论正确；由线性回归方程知，若该大学某女生身高增加 1 cm，则其体重约增加 0.85 kg，故③中结论正确；若该大学某女生身高为 170 cm，则可预测其体重为 58.79 kg，不可断定其体重必为 58.79 kg，故④中结论不正确.

5. 0.8 **【解析】**因为回归直线过点 $(\overline{x},\overline{y})$，所以 $\frac{0.5+a+1+1.2+1.5}{5}=0.24\times\frac{1+2+3+4+5}{5}+0.28$，得 $a=0.8$.

6. 99% **【解析】**$\because\chi^2\approx7.63>6.635$，$\therefore$ 判断有 99%的把握认为打鼾与患心脏病有关.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】**根据线性回归方程判断选项 A；写出女性平均受教育年限 Z 与总和生育率 Y 的关系式，从而判断选项 B；根据散点图中点的分布判断选项 C；由线性回归方程可预测未来的趋势，但实际值不一定会继续降低，从而判断选项 D.

AB **【解析】**由线性回归方程 $Z=7.54+0.33X$ 可知，人均 GDP 和女性平均受教育年限正相关，A 正确. 因为 $Z=7.54+0.33X$，$Y=2.88-0.41X$，所以 $Y=2.88-0.41\times\frac{Z-7.54}{0.33}$，所以女性平均受教育年限和总和生育率负相关，B 正确. 由散点图可知，数据 (x_i,y_i) 的线性相关程度比数据 (x_i,z_i) 的线性相关程度弱，所以 $|r_1|<|r_2|$，C 错误. 根据线性回归方程 $Y=2.88-0.41X$ 可知，未来三年总和生育率有降低的趋势，但不一定继续降低，D 错误. 故选 AB.

变式题 (1)C　(2)D **【解析】**(1)因为 $r_1=0.837$，$r_2=-0.957$，所以变量 X 与 Y 正相关，变量 U 与 V 负相关，且 X 与 Y 之间的线性相关程度弱于 U 与 V 之间的线性相关程度. 故选 C.

(2)由题中图可以看出 $D(10,2)$ 距离其他点较远，且其他点大致分布在一条斜率为正数的直线附近，所以去掉 D 后，成对样本数据的线性相关程度变强. 因为成对样本数据正相关，所以去掉 D 后，样本相关系数 r 变大，A，B 错误. 去掉 D 后，成对样本数据的线性相关程度变强，所以残差平方和变小，变量 X 与变量 Y 的线性相关程度变强，故 C 错误，D 正确. 故选 D.

例 2 **【思路点拨】**(1)利用所给公式及数据求出样本相关系数，加以说明即可；(2)利用公式求出 $\hat{b}$，$\hat{a}$，得到线性回归方程，再求预测值.

解：(1)由已知数据可得 $\overline{x}=3$，$\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i}{5}=\frac{6100}{5}=1220$，所以 $\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}=16\,589-5\times3\times1220=-1711$，

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2-5\overline{y}^2\right)}}\approx\dfrac{-1711}{1736}\approx-0.985\,6$，因为$|r|$非常接近1，所以可用线性回归模型拟合线下销售额$Y$与年份编号$X$的关系.

(2)由已知数据可得 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$，

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{-1711}{55-5\times3^2}=-171.1$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=1220-(-171.1)\times3=1733.3$，

所以Y关于X的线性回归方程为$Y=-171.1X+1733.3$.

令$X=6$，得$Y=-171.1\times6+1733.3=706.7$，

所以预测2023年该商场的线下销售额为706.7万元.

变式题 **解**：(1)设利润Y关于原材料投入X的线性回归方程为$Y=\hat{b}X+\hat{a}$，由已知得 $\overline{x}=\dfrac{1}{5}\times(82+84+85+86+88)=85$，

$\overline{y}=\dfrac{1}{5}\times(770+800+830+850+900)=830$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=(-3)\times(-60)+(-1)\times(-30)+0+1\times20+3\times70=440$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=9+1+0+1+9=20$，所以

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=22$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=830-22\times85=-1040$，所以利润$Y$关于原材料投入$X$的线性回归方程为$Y=22X-1040$.

(2)由(1)知，当$X=100$时，$Y=22\times100-1040=1160$，所以当原材料投入为100万元时，预测该产品的利润为1160万元.

例3 **【思路点拨】** (1)根据表格中数据的特征选择回归方程的类型.(2)(i)令$u_i=\lg x_i$，将所给数据处理，再求出$\overline{u}$，$\overline{y}$，$\sum\limits_{i=1}^{5}u_i^2$，$\sum\limits_{i=1}^{5}u_iy_i$，即可求出$\hat{c}_2$，$\hat{c}_1$，从而得到回归方程；(ii)令$Y\geqslant0.8$，得到不等式，再结合对数函数的性质解出不等式，即可得解.

解：(1)根据表格所给数据可知变量X呈现指数增长，而变量Y的增长幅度不大，

故选$Y=\hat{c}_1+\hat{c}_2\lg X$作为回归方程.

(2)(i)令$u_i=\lg x_i$，则$Y=\hat{c}_1+\hat{c}_2U$，可得如下数据：

U	-12	-10	-8	-6	-4
Y	0.1	0.24	0.46	0.76	0.94

则 $\overline{u}=\dfrac{1}{5}\times(-12-10-8-6-4)=-8$，$\overline{y}=\dfrac{1}{5}\times(0.1+0.24+0.46+0.76+0.94)=0.5$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}u_i^2=(-12)^2+(-10)^2+(-8)^2+(-6)^2+(-4)^2=360$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}u_iy_i=(-12)\times0.1+(-10)\times0.24+(-8)\times0.46+(-6)\times0.76+(-4)\times0.94=-15.6$，

所以 $\hat{c}_2=\dfrac{-15.6-5\times(-8)\times0.5}{360-5\times(-8)^2}=0.11$，$\hat{c}_1=0.5-0.11\times(-8)=1.38$，

所以$Y=1.38+0.11U$，则$Y=1.38+0.11\lg X$.

(ii)依题意得$Y=1.38+0.11\lg X\geqslant0.8$，则$0.11\lg X\geqslant-0.58$，即$\lg X\geqslant-\dfrac{58}{11}$，所以$X\geqslant10^{-\frac{58}{11}}$，则要使灭死率不低于0.8，该灭草剂的浓度至少要达到$10^{-\frac{58}{11}}$ mol/L.

变式题 (1)B **【解析】** 将$U=\ln Y$，$V=(X-4)^2$代入线性回归方程$U=-0.5V+2$得$\ln Y=-0.5(X-4)^2+2$，即$Y=\mathrm{e}^{-0.5(X-4)^2+2}$.当$X=4$时，$-0.5(X-4)^2+2$取得最大值2，则此时$Y$取得最大值$\mathrm{e}^2$.故选B.

(2)**解**：①由题中散点图可以判断$Y=\hat{c}+\hat{d}\ln X$更适宜作为年销售量Y关于年研发费X的回归方程类型.

②因为$\mu=\ln X$，所以$Y=\hat{c}+\hat{d}\mu$，可得$\hat{d}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(\mu_i-\overline{\mu})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(\mu_i-\overline{\mu})^2}=\dfrac{270}{4.5}=60$，$\hat{c}=\overline{y}-\hat{d}\overline{\mu}=222-60\times3.5=12$，所以$Y$关于$\mu$的线性回归方程为$Y=60\mu+12$，因此$Y$关于$X$的回归方程为$Y=60\ln X+12$.

③由②可知$Z=0.5Y-X=30\ln X-X+6$，则$Z'=\dfrac{30}{X}-1=\dfrac{30-X}{X}$，可得当$0<X<30$时，$Z'>0$，函数$Z=30\ln X-X+6$单调递增；当$X>30$时，$Z'<0$，函数$Z=30\ln X-X+6$单调递减.所以当研发费为30万元时，年利润$Z$的预测值最大.

例4 **【思路点拨】** (1)根据给定的频率分布直方图，估计平均数及中位数即可列方程求解；(2)补充完整列联表，求出χ^2的值，并与临界值表比较即可得到结论.

解：(1)依题意知，频率分布直方图中左起第一个小矩形的高为$\dfrac{1}{10}-m-0.04-0.025-0.01=0.025-m$，

样本平均数的估计值为$10\times[(0.025-m)\times55+m\times65+0.04\times75+0.025\times85+0.01\times95]=74.5+100m$.

显然样本数据落在区间$[80,100]$内的频率为$0.25+0.1=0.35$，落在$[70,100]$内的频率为$0.4+0.35=0.75$，因此样本中位数在区间$[70,80)$内，其估计值为$70+\dfrac{0.5-0.25}{0.04}=76.25$，则$74.5+100m=76.25$，解得$m=0.017\,5$.

(2)成绩优秀的总人数为$200\times10\times(0.025+0.01)=70$，

则可得到完整的列联表如下：

单位：人

性别	测试成绩		总计
	优秀	不优秀	
男	45	65	110
女	25	65	90
总计	70	130	200

根据表中数据可得 $\chi^2=\dfrac{200\times(45\times65-25\times65)^2}{110\times90\times70\times130}=\dfrac{2600}{693}\approx3.752>2.706$，所以有90%的把握认为测试成绩是否优秀与性别有关.

变式题 (1)有 **【解析】** 由等高堆积条形图可以看出，喜欢篮球运动的男生比例比喜欢篮球运动的女生比例大很多，因此可以判断性别与对篮球运动的态度有关联.

(2)**解**：① $P(A\mid\overline{B})=\dfrac{P(A\cdot\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A\cdot\overline{B})}{1-P(B)}=\dfrac{\frac{120+30}{400}}{1-\frac{200}{400}}=\dfrac{150}{200}=\dfrac{3}{4}$.

②由题意可得到如下2×2列联表：

单位：个

工厂	质量		总计
	优等品	合格品	
甲	175	25	200
乙	150	50	200
总计	325	75	400

由表中数据可得 $\chi^2=\dfrac{400\times(175\times50-150\times25)^2}{325\times75\times200\times200}=\dfrac{400}{39}\approx10.256>6.635$，所以有99%的把握判断两家工厂生产的糟蛋质量有差异.

第 58 讲　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

n 类　m_1　m_2　m_n　$m_1+m_2+\cdots+m_n$　n 个　m_1　m_2　m_n　$m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$

【对点演练】

1. 120　**【解析】** 根据分步乘法计数原理可知，可选择的不同的方案有 $10\times12=120$(种).

2. 21　**【解析】** 依题意知共有 $10+8+3=21$(种)不同的选法.

3. 32　1024　**【解析】** 若每位同学限报其中一个小组，则每位同学都有 2 种报名方法，由分步乘法计数原理知，不同的报名方法共有 $2\times2\times2\times2\times2=32$(种). 若没有任何限制，则每位同学可以都不报，可以报一个，也可以都报，则每位同学有 $1+2+1=4$(种)报名方法，由分步乘法计数原理知，不同的报名方法共有 $4\times4\times4\times4\times4=1024$(种).

4. 15　120　**【解析】** 从书架上任取 1 本书，有三类方案：第 1 类，从第 1 层取 1 本语文书，有 6 种方法；第 2 类，从第 2 层取 1 本数学书，有 5 种方法；第 3 类，从第 3 层取 1 本外语书，有 4 种方法. 根据分类加法计数原理，不同取法的种数为 $6+5+4=15$.

从书架的第 1 层、第 2 层、第 3 层各取 1 本书，可以分三步完成：第 1 步，从第 1 层取 1 本语文书，有 6 种方法；第 2 步，从第 2 层取 1 本数学书，有 5 种方法；第 3 步，从第 3 层取 1 本外语书，有 4 种方法. 根据分步乘法计数原理，不同取法的种数为 $6\times5\times4=120$.

5. 20　**【解析】** 由三位“凸数”的特点知，中间的数字只能是 3，4，5，即分三类. 第一类，当中间数字为“3”时，此时有 2 个“凸数”，即 132，231；第二类，当中间数字为“4”时，个位数字有 3 种选择，百位数字有 2 种选择，则“凸数”有 $2\times3=6$(个)；第三类，当中间数字为“5”时，个位数字有 4 种选择，百位数字有 3 种选择，则“凸数”有 $4\times3=12$(个). 由分类加法计数原理得，由 1，2，3，4，5 可以组成无重复数字的三位“凸数”的个数是 $2+6+12=20$.

6. (1)60　(2)125　**【解析】** (1)从 5 本不同的书中选出 3 本分别送给 3 名同学，对应于从 5 个不同元素中任取 3 个元素的一个排列，因此不同送法的种数是 $5\times4\times3=60$.

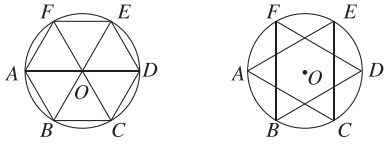
(2)由于有 5 种不同的书(每种不少于 3 本)，故每名同学都有 5 种不同的送法，因此送给 3 名同学，每人各 1 本书的不同送法的种数是 $5\times5\times5=125$.

● 课堂考点探究

例 1　**【思路点拨】** (1)由题意，分为 4 类：十位 1 根，个位 3 根；十位 2 根，个位 2 根；十位 3 根，个位 1 根；十位 4 根，个位 0 根. 根据分类加法计数原理求解. (2)利用圆的对称性，将等边三角形分两类：相邻 2 个点和圆心构成的等边三角形、相间隔的 3 个点构成的等边三角形. 根据分类加法计数原理即可求出结果.

(1)C　(2)8　**【解析】** (1)由题意知，共有 4 根算筹，分为 4 类讨论：当十位 1 根，个位 3 根时，可表示 2 个两位数；当十位 2 根，个位 2 根时，可表示 4 个两位数；当十位 3 根，个位 1 根时，可表示 2 个两位数；当十位 4 根，个位 0 根时，可表示 2 个两位数. 根据分类加法计数原理可得，共可表示 $2+4+2+2=10$(个)两位数. 故选 C.

(2)根据圆的对称性，分两类讨论. 如图①，由圆上相邻 2 个点和圆心可构成等边三角形，这样的等边三角形有 6 个；如图②，由圆上相间隔的 3 个点可构成等边三角形，这样的等边三角形有 2 个. 由分类加法计数原理可得，共能构成不同的等边三角形的个数为 $6+2=8$.



①

②

变式题　(1)A　(2)B　**【解析】** (1)因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以 $m>n$. 以 m 的值为标准分类，可分为四类：第一类，当 $m=5$ 时，使 $m>n$，n 有 4 种选择；第二类，当 $m=4$ 时，使 $m>n$，n 有 3 种选择；第三类，当 $m=3$ 时，使 $m>n$，n 有 2 种选择；第四类，当 $m=2$ 时，使 $m>n$，n 有 1 种选择. 故符合条件的椭圆共有 $4+3+2+1=10$(个). 故选 A.

(2)符合题目要求的分类方法有甲 3 张乙 1 张，甲 2 张乙 2 张，甲 1 张乙 3 张三类. ①若甲 3 张乙 1 张，则有 4 种分法；②若甲 2 张乙 2 张，则有 6 种分法；③若甲 1 张乙 3 张，则有 4 种分法. 所以不同分法的种数为 $4+6+4=14$. 故选 B.

例 2　**【思路点拨】** (1)根据题意，先排男生再排女生，由分步乘法计数原理可得答案. (2)先安排男生，再安排女生，在安排女生时，利用间接法分析运算，根据分步乘法计数原理，即可求解.

(1)C　(2)C　**【解析】** (1)第一步：排男生，第一个男生在第一行选一个位置有 3 个位置可选，第二个男生在第二行有 2 个位置可选，由于 2 名男生可以互换位置，故男生的排法有 $3\times2\times2=12$(种). 第二步：排女生，则女生的排法有 $2\times(1+2)=6$(种). 根据分步乘法计数原理可得，共有 $12\times6=72$(种)坐法，故选 C.

(2)先安排 2 名男生，保证每个小组都有男生，则有 2 种分配方案；再安排 5 名女生，若将每名女生随机安排，则有 $2^5=32$(种)分配方案，若 5 名女生都在同一小组，则有 2 种分配方案，因为每个小组都有女生，所以女生共有 $2^5-2=30$(种)分配方案. 所以共有 $2\times30=60$(种)分配方案，故选 C.

变式题　(1)B　(2)B　**【解析】** (1)完成这个事情需要三步：第 1 步，在第二、三、四笔选一笔写卧钩，有 3 种方法；第 2 步，在前四笔剩下的三笔中写左点、上点、撇，有 $3\times2\times1=6$(种)方法；第 3 步，最后一笔写右点，有 1 种方法. 根据分步乘法计数原理可知，共有 $3\times6\times1=18$(种)笔顺. 故选 B.

(2)第一步，给①③⑤着色，因为①③⑤着相同的颜色，所以有 3 种方案；第二步，给②④⑥着色，②④⑥各有 2 种着色方案，故有 $2\times2\times2=8$(种)方案. 所以共有 $3\times8=24$(种)方案. 故选 B.

例 3　**【思路点拨】** (1)由于 0 不能为百位数字，故分 2 种情况讨论：0 在个位和 0 不在个位，再由分类加法计数原理计算可得答案. (2)利用分类加法计数原理求解，按 2 与 4 两区域种植果树是否相同进行分类即可.

(1)C　(2)C　**【解析】** (1)根据题意，分 2 种情况讨论：①若 0 在个位，此时只需从 1，2，3，4，5 中任取 2 个数字，作为十位和百位数字即可，有 $5\times4=20$(个)没有重复数字的三位偶数；②若 0 不在个位，此时必须从 2 和 4 中任取 1 个数字作为个位数字，有 2 种取法，0 不能作为百位数字，则百位数字有 4 种取法，十位数字也有 4 种取法，此时有 $2\times4\times4=32$(个)没有重复数字的三位偶数. 综上可得，共有 $20+32=52$(个)没有重复数字的三位偶数. 故选 C.

(2)分两类情况：第一类，2 与 4 区域种同一种果树. 第一步种 1 区域，有 5 种方法，第二步种 2 与 4 区域，有 4 种方法，第三步种 3 区域，有 3 种方法，最后一步种 5 区域，有 3 种方法. 由分步乘法计数原理得共有 $5\times4\times3\times3=180$(种)方法. 第二类，2 与 4 区域种不同果树. 第一步种 1 区域，有 5 种方法，第二步种 2 区域，有 4 种方法，第三步种 3 区域，有 3 种方法，第 4 步种 4 区域，有 2 种方法，第五步种 5 区域，有 2 种方法. 由分步乘法计数原理得共有 $5\times4\times3\times2\times2=240$(种)方法. 综上，由分类加法计数原理得，共有 $180+240=420$(种)不同的种植方法. 故选 C.

变式题　(1)B　(2)C　**【解析】** (1)若从集合 A 中取出元素 4，则 4 不能作千位上的数字，有 $C_5^3C_3^1A_3^3=180$(个)满足题意的自然数；若不从集合 A 中取出元素 4，则有 $A_5^4=120$(个)满足题意的自然数. 综上，满足题意的自然数共有 $180+120=300$(个)，故选 B.

(2)由题意可得，只需确定区域 1，2，3，4 所涂的颜色，即可确定整个伞面的涂色. 第一步，涂区域 1，有 7 种选择. 第二步，涂区域 2，有 6 种选择. 第三步，涂区域 3，4. 当区域 3 与区域 1 涂的颜色不同时，区域 3 有 5 种选择，区域 4 有 5 种选择；当区域 3 与区域 1 涂的颜色相同时，区域 4 有 6 种选择. 故不同的涂色方案有 $7\times6\times(5\times5+6)=1302$(种). 故选 C.

第 59 讲　排列与组合

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 一定的顺序

2. 不同排列　$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$　不同组合　$\dfrac{A_n^m}{A_m^m}$

【对点演练】

1. 4 **【解析】** 4 名学生中，来自高一、高二年级的各 2 名，所以随机选 2 名学生，来自不同年级的选择方法有 $C_2^1C_2^1=4$(种).

2. 2400 **【解析】** 安排甲和乙在 3 日至 7 日中的两天值班，然后安排其他五人在剩余五天值班，所以不同的安排方法有 $A_5^2\times A_5^5=20\times120=2400$(种).

3. 20 **【解析】** A 项工作安排 3 人有 $C_5^3=10$(种)安排方式，B，C 两项工作均只安排 1 人，有 $A_2^2=2$(种)安排方式，则不同的安排方式共有 $10\times2=20$(种).

4. 5 120 96 **【解析】** 从 5 名学生中选出 4 名去参加学科竞赛，有 $C_5^4=5$(种)选法. 若这 4 名学生分别参加数学、物理、化学、生物四科竞赛，则不同的参赛方案有 $A_5^4=120$(种). 由于甲不参加生物竞赛，因此安排甲参加另外三门学科的竞赛或甲不参加任何竞赛. ①当甲参加另外三门学科的竞赛时，有 $C_3^1A_4^4=72$(种)方案；②当甲不参加任何竞赛时，有 $A_4^4=24$(种)方案. 故甲不参加生物竞赛的不同参赛方案种数为 $72+24=96$.

5. 720 720 **【解析】** (1)要将这 7 人站成一排，且 3 个女生排在一起，可以分 2 个步骤：第 1 步，将 3 个女生全排列，有 $A_3^3=6$(种)方法；第 2 步，将 3 个女生“捆绑”看作 1 个整体与男生 4 人全排列，有 $A_5^5=120$(种)方法. 根据分步乘法计数原理，3 个女生排在一起共有 $6\times120=720$(种)排法.

(2)要将这 7 人站成一排，且甲、乙 2 人之间恰好有 3 个人，可以分 3 个步骤：第 1 步，甲、乙 2 人全排列，有 $A_2^2=2$(种)方法；第 2 步，从其余 5 个人中选出 3 个人，在甲、乙 2 人之间排列，有 $A_5^3=60$(种)方法；第 3 步，将甲、乙 2 人及之间的 3 个人“捆绑”为 1 个元素，与另外 2 个人共 3 个元素全排列，有 $A_3^3=6$(种)方法. 根据分步乘法计数原理，甲、乙 2 人之间恰好有 3 个人，共有 $2\times60\times6=720$(种)排法.

6. 56 **【解析】** 8 个小球排好后对应着 8 个位置，题中的排法相当于在 8 个位置中选出 3 个位置给红球，剩下的位置给白球，由于这 3 个红球完全相同，5 个白球也完全相同，所以没有顺序，是组合问题. 故共有 $C_8^3=56$(种)排法.

7. 70 **【解析】** 选法可分为两类：第一类，从 4 台标清彩电中选 1 台，从 5 台高清彩电中选 2 台，有 $C_4^1C_5^2$ 种不同的选法；第二类，从 4 台标清彩电中选 2 台，从 5 台高清彩电中选 1 台，有 $C_4^2C_5^1$ 种不同的选法. 根据分类加法计数原理，共有 $C_4^1C_5^2+C_4^2C_5^1=4\times10+6\times5=70$(种)不同的选法.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】** (1)先求得六人的全排列数，然后结合题意，求得甲、乙在丙同侧所占的比例，即可求解. (2)分类讨论由数字 0，1，2，3，4 组成的没有重复数字的五位数的各种情况，进而得到从小到大排列的第 88 个数为 42 130.

(1)B (2)C **【解析】** (1)由题意，甲、乙、丙等六人全排列，共有 $A_6^6=720$(种)不同的排法，甲、乙、丙三人全排列，有 $A_3^3=6$(种)不同的排法，其中甲、乙在丙的同侧有 $2A_2^2=4$(种)不同的排法. 所以甲、乙两人必须坐在丙的同一侧的不同坐法的种数为 $720\times\frac{4}{6}=480$. 故选 B.

(2)由数字 0，1，2，3，4 组成的没有重复数字的五位数中，1 在万位的有 $A_4^4=24$(个)；2 在万位的有 $A_4^4=24$(个)；3 在万位的有 $A_4^4=24$(个)；4 在万位的有 $A_4^4=24$(个). 则从小到大排列的第 88 个数为 4 在万位的五位数. 4 在万位 0 在千位的五位数有 $A_3^3=6$(个)，4 在万位 1 在千位的五位数有 $A_3^3=6$(个)，4 在万位 2 在千位的五位数有 $A_3^3=6$(个)，则从小到大排列的第 88 个数为 4 在万位 2 在千位的五位数. 4 在万位 2 在千位的五位数从小到大排列依次为 42 013，42 031，42 103，42 130，42 301，42 310，则从小到大排列的第 88 个数为 42 130. 故选 C.

变式题 (1)A (2)D (3)A **【解析】** (1)每个人被安排在另外两个人前面的机会是均等的，故共有 $\frac{1}{3}A_5^3=20$(种)安排方法. 故选 A.

(2)由题意，5 只能排在 a_2 或 a_4 位置，1，2 不能排在 a_2 或 a_4 位置. 若 a_2，a_4 位置排 4，5，则排列个数为 $A_2^2A_3^3=12$；若 a_2，a_4 位置排 3，5，则 4 只能排在 a_1，a_5 中与“5”所在位置相邻的外侧位置上，即排列有 13 254，23 154，45 231，45 132，共 4 个. 综上，满足题意的排列个数为 $12+4=16$. 故选 D.

(3)不考虑限制条件，共有 A_6^6 种不同的汇报安排，B 成果最先汇报，有 A_5^5 种不同的汇报安排，则 B 成果不能最先汇报，而 A，C，D 成果按先后顺序汇报(不一定相邻)的不同的汇报安排种数为 $\frac{A_6^6-A_5^5}{A_3^3}=100$. 故选 A.

例 2 **【思路点拨】** (1)按照 A 类项目选 2 个、选 1 个进行分类，结合组合知识求解. (2)按选修 2 门或 3 门课进行分类讨论，结合组合知识求解.

(1)C (2)64 **【解析】** (1)若 A 类项目选 2 个，则不同选法有 $C_4^1C_6^1C_4^1=96$(种)；若 A 类项目选 1 个，则不同选法有 $C_6^2C_4^1+C_6^1C_4^2=96$(种). 故满足条件的不同选法共有 $96+96=192$(种). 故选 C.

(2)若选修 2 门课，则需要从体育类和艺术类选修课中各选 1 门，有 $C_4^1C_4^1=16$(种)方案；若选择 3 门课，则包含两种情况：选 2 门体育类，1 门艺术类或 2 门艺术类，1 门体育类，有 $C_4^2C_4^1+C_4^1C_4^2=48$(种)方案. 故不同的选课方案共有 $16+48=64$(种).

变式题 (1)AD (2)180 **【解析】** (1)对于 A，若 4 人中男、女生各 2 人，则有 $C_4^2C_3^2=6\times3=18$(种)选法，故 A 正确；对于 B，若男生甲和女生乙必选，则有 $C_5^2=10$(种)选法，故 B 错误；对于 C，从 7 名同学中任选 4 人，共有 $C_7^4=35$(种)选法，而甲、乙都不被选有 $C_5^4=5$(种)选法，故甲、乙至少有 1 人被选有 $C_7^4-C_5^4=35-5=30$(种)选法，故 C 错误；对于 D，若 4 人中既有男生又有女生，则有 $C_7^4-C_4^4=35-1=34$(种)选法，故 D 正确. 故选 AD.

(2)第一天从 6 人中选 3 人参加，有 C_6^3 种选法；第二天从第一天参加的 3 人中选 1 人参加，再从第一天没参加的 3 人中选 2 人参加，有 $C_3^1C_3^2$ 种选法. 故恰有 1 人在这两天都参加的不同安排方式有 $C_6^3C_3^1C_3^2=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times3\times3=180$(种).

例 3 **【思路点拨】** (1)根据两个计数原理和排列组合的知识，逐项判断即可. (2)根据甲跑的棒次进行分类讨论，由此求得不同棒次安排方案种数.

(1)C (2)B **【解析】** (1)对于 A，从 7 人中任选 3 人相互调整位置，其余 4 人位置不变，则不同的调整方案有 $C_7^3\times2\times1=70$(种)，故 A 中说法正确；对于 B，先排女生，将 4 名女生全排列，有 A_4^4 种方法，再排男生，由于男生互不相邻，因此可以在女生之间及首尾空出的 5 个空位中任选 3 个空位排男生，有 A_5^3 种方法，故共有 $A_4^4\cdot A_5^3=1440$(种)站法，故 B 中说法正确；对于 C，将女生看成一个整体，考虑女生之间的顺序，有 A_4^4 种情况，再将女生的整体与 3 名男生进行全排列，有 A_4^4 种情况，故共有 $A_4^4\cdot A_4^4=576$(种)站法，故 C 中说法错误；对于 D，若甲站在排尾，则有 A_6^6 种站法，若甲不站在排尾，则有 $A_5^1A_5^1A_5^5$ 种站法，故共有 $A_6^6+A_5^1A_5^1A_5^5=3720$(种)站法，故 D 中说法正确. 故选 C.

(2)当甲跑第 1 棒时，乙可跑第 2 棒或第 4 棒，有 $A_2^1A_4^2=24$(种)安排方案；当甲跑第 2 棒时，乙只能跑第 4 棒，有 $A_4^2=12$(种)安排方案. 故甲、乙都参加的不同棒次安排方案种数为 $24+12=36$. 故选 B.

变式题 (1)C (2)864 **【解析】** (1)若乙担任数学课代表，则不同的安排方式有 $C_2^1\cdot A_4^4=48$(种)；若丙担任数学课代表，则不同的安排方式有 $C_2^1\cdot C_2^1\cdot A_3^3=24$(种). 所以不同的安排方式共有 $48+24=72$(种). 故选 C.

(2)首先从“诗”“酒”“花”“茶”中选“两雅”，有 C_4^2 种选法；“琴”“棋”相邻用捆绑法看作一个整体，与除“书”与“画”外的“两雅”全排列，有 $A_3^3A_2^2$ 种排法；最后将“书”与“画”插入到所形成的 4 个空中的 2 个空，有 A_4^2 种插法. 按照分步乘法计数原理可得，共有 $C_4^2A_3^3A_2^2A_4^2=864$(种)排课方法.

例 4 **【思路点拨】** 先对 6 盏不同的花灯进行全排列，结合定序问题的解决方法，即可求解.

20 **【解析】** 根据题意可先对 6 盏不同的花灯进行全排列，有 A_6^6 种排法. 因为取花灯时每次只能取一盏，且只能从下往上取，每串花灯上 3 盏花灯地取下顺序已经固定，所以共有 $\frac{A_6^6}{A_3^3A_3^3}=20$(种)不同的取法.

变式题 90 **【解析】** 由于六个身高不同的人排成两排三列，每一列后面的那个人比他(她)前面的那个人高，因此有 $\frac{A_6^6}{A_2^2A_2^2A_2^2}=90$(种)排法.

例 5 **【思路点拨】** 利用隔板法可得答案.

D **【解析】** 将 8 个参赛名额看成 8 个元素，之间会产生 7 个空隙，则分配方法共有 $C_7^3=\frac{7\times6\times5}{3\times2}=35$(种)，故选 D.

变式题 21 **【解析】** 由于每只羊羔的价格均为300元,因此共有8个购买羊羔的指标,可以看成8个无差别的小球,3种不同的羊羔可以看成3个编号分别为1,2,3的盒子,则问题转化为把8个无差别的小球装入3个不同的盒子中,每个盒子至少装1个小球.用隔板法,8个小球之间共有7个空隙,从中选2个插入隔板,则共有$C_7^2=21$(种)不同的购买方案.

例6 **【思路点拨】** 先不考虑专家A不能去甲乡镇的情况,将六名农业专家分组,再分配到三个乡镇上,求出总的安排方案种数,最后根据专家A不去甲乡镇所占的比例求解即可.

360 **【解析】** 由题意,先不考虑专家A不能去甲乡镇的情况,将六名农业专家分成三组,有(1,1,4),(1,2,3),(2,2,2)三种情况.按(1,1,4)分组有$\frac{C_6^1C_5^1C_4^1}{A_2^2}=15$(种)方法,按(1,2,3)分组有$C_6^1C_5^2C_3^3=60$(种)方法,按(2,2,2)分组有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$(种)方法.再将三组农业专家分配到甲、乙、丙三个乡镇上,有A_3^3种方法.所以共有$(15+60+15)A_3^3=540$(种)安排方案.上述安排方案中,专家A去甲乡镇,去乙乡镇和去丙乡镇的安排方案种数相等,故专家A不去甲乡镇的安排方案有$540\times\frac{2}{3}=360$(种).

变式题 C **【解析】** 将五位同学分为2,1,1,1的四组,再分配到四所学校,共有$C_5^2A_4^4=240$(种)方法.故选C.

第60讲 二项式定理

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$ (1)$n+1$
2. $k+1$ 3. $C_n^ka^{n-k}b^k$
4. (2)①$C_n^{\frac{n}{2}}$ ②$C_n^{\frac{n-1}{2}}$ $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ (3)①$2^n$

【对点演练】

1. 160 **【解析】** 二项式通项为$T_{r+1}=C_6^r1^{6-r}(2x)^r=C_6^r2^rx^r$,令$r=3$,则$(1+2x)^6$的展开式中$x^3$的系数为$C_6^3\times2^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times8=160$.
2. 2 **【解析】** 设$f(x)=\left(ax^2-\frac{1}{x}\right)^9$,则由题意得$f(1)=(a-1)^9=1$,解得$a=2$.
3. 672 **【解析】** 由题意得$2^n=128$,则$n=7$,则二项式通项为$T_{r+1}=C_7^r(2x)^{7-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r2^{7-r}C_7^rx^{7-2r}$,令$7-2r=3$,可得$r=2$,所以展开式中$x^3$的系数为$(-1)^2\times2^5C_7^2=672$.
4. 10^n-1 **【解析】** $C_n^0\cdot3^{2n}+C_n^1\cdot3^{2n-2}+C_n^2\cdot3^{2n-4}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot3^2=C_n^0\cdot(3^2)^n+C_n^1\cdot(3^2)^{n-1}+C_n^2\cdot(3^2)^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot(3^2)^1+C_n^n\cdot(3^2)^0-C_n^n\cdot(3^2)^0=(3^2+1)^n-1=10^n-1$.
5. 6 **【解析】** $(x+\sqrt[4]{3}y)^{20}$的通项为$T_{r+1}=C_{20}^rx^{20-r}(\sqrt[4]{3}y)^r=C_{20}^rx^{20-r}y^r\cdot3^{\frac{r}{4}}$,所以当$\frac{r}{4}$为整数时,系数为有理数.因为$0\leqslant r\leqslant20$,且$r\in\mathbf{N}$,所以$r=0,4,8,12,16,20$,所以系数为有理数的项共有6项.
6. 3 **【解析】** 令$x=1$,则各项系数的和为4^n,又各二项式系数的和为2^n,所以$4^n-2^n=56$,即$(2^n)^2-2^n-56=0$,可得$2^n=8$,故$n=3$.

● 课堂考点探究

例1 **【思路点拨】** (1)写出二项式通项,令x的幂指数等于0,即可求得答案.(2)根据题意,写出二项式通项,由条件列出方程,即可得到结果.

(1)D (2)±1 **【解析】** (1)二项式通项为$T_{r+1}=C_6^r\times(2x)^{6-r}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r=C_6^r\times2^{6-r}\times x^{6-r}\times(-1)^r\times x^{-2r}=C_6^r\times x^{6-3r}\times2^{6-r}\times(-1)^r$,$r=0,1,2,\cdots,6$,令$6-3r=0$,得$r=2$,所以展开式中的常数项为$T_3=C_6^2\times2^4\times(-1)^2=240$.故选D.

(2)因为$(\sqrt{x}+a)^6$的通项为$T_{r+1}=C_6^r(x^{\frac{1}{2}})^{6-r}a^r=a^rC_6^rx^{\frac{6-r}{2}}$,且$x$的系数与$x^2$的系数相等,所以$a^4C_6^4=a^2C_6^2$,即$a^4=a^2$,所以$a^2(a^2-1)=0$,又$a\neq0$,所以$a=\pm1$.

变式题 $28x$和x^{-4} **【解析】** 由题意知,$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$的通项为$T_{r+1}=C_8^r(\sqrt[3]{x})^{8-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_8^r\cdot x^{\frac{16-5r}{6}}$,$r=0,1,2,\cdots,8$,令$\frac{16-5r}{6}\in\mathbf{Z}$,得$r=2$或8,所以$T_{2+1}=C_8^2\cdot x^{\frac{16-10}{6}}=28x$,$T_{8+1}=C_8^8\cdot x^{\frac{16-40}{6}}=x^{-4}$,故有理项是$28x$和$x^{-4}$.

例2 **【思路点拨】** (1)根据二项式系数的性质求得$n=7$,再根据二项式通项即可求得指定项的系数.(2)根据已知条件可得$n=8$,结合二项式通项求系数最大的项,进而可求其二项式系数.

(1)B (2)28 **【解析】** (1)因为$(x-2y)^n$的展开式中第4项与第5项的二项式系数相等,所以$C_n^3=C_n^4$,则$n=7$.$(x-2y)^7$的通项为$T_{r+1}=C_7^rx^{7-r}(-2y)^r$,令$r=2$,则展开式中$x^5y^2$的系数为$C_7^2(-2)^2=84$.故选B.

(2)因为展开式中各二项式系数的和为$2^n=256$,所以$n=8$,则$\left(\frac{1}{3x}+\sqrt{x}\right)^8$的通项为$T_{r+1}=C_8^r\left(\frac{1}{3x}\right)^{8-r}(\sqrt{x})^r=\frac{C_8^r}{3^{8-r}}x^{\frac{3r}{2}-8}$,$r=0,1,2,\cdots,8$.令$\begin{cases}\frac{C_8^r}{3^{8-r}}\geqslant\frac{C_8^{r+1}}{3^{7-r}},\\ \frac{C_8^r}{3^{8-r}}\geqslant\frac{C_8^{r-1}}{3^{9-r}},\end{cases}$得$r=6$,所以展开式中第7项的系数最大,其二项式系数为$C_8^6=28$.

变式题 (1)$240x^6$ (2)60 **【解析】** (1)由题可得$\frac{n}{2}+1=4$,解得$n=6$,所以$T_5=C_6^4\left(\frac{1}{x}\right)^2(-2x^2)^4=240x^6$.

(2)由题意得$2^{2n}=64$,解得$n=3$,则$\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$的通项为$T_{r+1}=C_6^r(\sqrt{x})^{6-r}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r\cdot2^r\cdot x^{3-r}$,令$3-r=1$,解得$r=2$,则展开式中$x$的系数为$C_6^2\cdot2^2=60$.

例3 **【思路点拨】** (1)根据展开式的特点,给x赋值0,1或-1,分析各选项即可.(2)观察已知条件,通过求导赋值构造出式子$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5$,计算即可.

(1)ACD (2)240 **【解析】** (1)$(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$,令$x=0$,则$a_0=1^5=1$,故A正确;将$x=1$代入$(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$,得$-1=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$,所以$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1-a_0=-2$,故B错误;将$x=-1$代入$(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$,得$3^5=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$,故C正确;二项式$(1-2x)^5$的通项为$T_{r+1}=C_5^r(-2)^rx^r$,所以当$r$为奇数时,$C_5^r(-2)^r$为负数,即$a_i<0$(其中$i$为奇数),当$r$为偶数时,$C_5^r(-2)^r$为正数,即$a_i>0$(其中$i$为偶数),所以$a_0-|a_1|+a_2-|a_3|+a_4-|a_5|=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1$,故D正确.故选ACD.

(2)$(3x-4)^5=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+a_4(x-1)^4+a_5(x-1)^5$,对式子两边同时求导,得$15(3x-4)^4=a_1+2a_2(x-1)+3a_3(x-1)^2+4a_4(x-1)^3+5a_5(x-1)^4$,令$x=2$,得$15\times(3\times2-4)^4=a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=240$.

变式题 (1)A (2)A (3)0 **【解析】** (1)因为$\left(a\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$($a$为常数)的展开式中各项系数的和与各二项式系数的和相等,所以$(a-1)^5=2^5$,得$a=3$,则$\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$的通项为$T_{r+1}=C_5^r(3\sqrt{x})^{5-r}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=C_5^r\cdot3^{5-r}\cdot(-1)^rx^{\frac{15-5r}{6}}$,令$\frac{15-5r}{6}=0$,得$r=3$,所以展开式中的常数项为$C_5^3\times3^{5-3}\times(-1)^3=-90$,故选A.

(2)$(2x-1)^3-(x+2)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$,令$x=1$,得$(2-1)^3-(1+2)^4=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=-80$,令$x=-1$,得$(-2-1)^3-(-1+2)^4=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=-28$,两式相加得$2(a_0+a_2+a_4)=-108$,所以$a_0+a_2+$

$a_4=-54$. 故选 A.

(3)令 $x=-\frac{1}{e}$ 可得 $0=a_0-\frac{a_1}{e}+\frac{a_2}{e^2}-\frac{a_3}{e^3}+\frac{a_4}{e^4}-\cdots-\frac{a_{2023}}{e^{2023}}$.

例 4 **【思路点拨】** 根据展开式的特征,将 $x^4+(x+1)^7$ 转化为 $[(x+2)-2]^4+[(x+2)-1]^7$,利用二项式通项即可求得答案.

B **【解析】** 由题意得 $x^4+(x+1)^7=[(x+2)-2]^4+[(x+2)-1]^7=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_7(x+2)^7$,故 $a_3=C_4^1(-2)^1+C_7^4(-1)^4=-8+35=27$,故选 B.

变式题 78 **【解析】** 令 $x=0$,可得 $a_0=2$,令 $x=1$,可得 $2^7=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7$ ①,令 $x=-1$,则 $2^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$ ②,所以 ①+② 可得 $2(a_0+a_2+a_4+a_6)=2^5+2^7=160$,所以 $2+a_2+a_4+a_6=80$,即 $a_2+a_4+a_6=78$.

例 5 **【思路点拨】** (1)将多项式按第一项展开,利用二项式通项即可求得答案.(2)根据题意可得,5 个因式中 3 个因式选择 x,2 个因式选择常数,即可求解.

(1)A (2)A **【解析】** (1)$\left(1-\frac{y}{x}\right)(2x+y)^8=(2x+y)^8-\frac{y}{x}(2x+y)^8$,$(2x+y)^8$ 的通项为 $T_{r+1}=C_8^r(2x)^{8-r}y^r$,则 $\left(1-\frac{y}{x}\right)(2x+y)^8$ 的展开式中含 x^2y^6 的项为 $C_8^6(2x)^2y^6-\frac{y}{x}C_8^5(2x)^3y^5=112x^2y^6-448x^2y^6=-336x^2y^6$,故展开式中 x^2y^6 的系数为 -336,故选 A.

(2)5 个因式中 3 个因式选择 x,2 个因式选择常数,则含 x^3 的项的系数是 $(-4)\times5+3\times5+3\times(-4)+(-2)\times5+(-2)\times3+(-2)\times(-4)+1\times5+1\times(-4)+1\times3+1\times(-2)=-23$. 故选 A.

变式题 (1)D (2)C **【解析】** (1)根据二项式定理得 $(1-x)(1+2x)^4=(1-x)(1+8x+24x^2+32x^3+16x^4)$,所以 $a_0=1$,$a_4x^4=-x\cdot32x^3+1\times16x^4=-16x^4$,则 $a_4=-16$,所以 $a_4-a_0=-16-1=-17$. 故选 D.

(2)$(x+1)^4$ 的展开式中 x^2 的系数为 $C_4^2=6$,x^3 的系数为 $C_4^1=4$,所以 $(ax-2)(x+1)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为 $6a-2\times4=6a-8$,依题意得 $6a-8=-2$,得 $a=1$. 故选 C.

例 6 **【思路点拨】** (1)根据给定的多项式,分析展开式中含 x^3 的项的构成,列式计算即可.(2)写出二项式通项,令 x 的幂指数为 0,即可求得常数项.

(1)C (2)8953 **【解析】** (1)$\left(x^3+\frac{1}{x}-1\right)^5$ 可看作 5 个 $\left(x^3+\frac{1}{x}-1\right)$ 相乘,展开式中含 x^3 的项可由 2 种情况获得:从 5 个式子中取 2 个式子提供 x^3,余下 3 个式子提供 $\frac{1}{x}$,则可得到 $C_5^2(x^3)^2\cdot C_3^3\left(\frac{1}{x}\right)^3=10x^3$;从 5 个式子中取 1 个式子提供 x^3,余下 4 个式子提供 -1,则可得到 $C_5^1(x^3)^1\cdot C_4^4(-1)^4=5x^3$. 所以 $\left(x^3+\frac{1}{x}-1\right)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 $10+5=15$. 故选 C.

(2)二项式通项为 $T_{r+1}=C_{10}^r\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10-r}=C_{10}^r\cdot C_{10-r}^m\cdot x^{10-r-m}\left(\frac{1}{x}\right)^m=C_{10}^r\cdot C_{10-r}^m\cdot x^{10-r-2m}$. 当 $m=0$,$r=10$ 时,常数项为 1;当 $m=1$,$r=8$ 时,常数项为 $C_{10}^8\cdot C_2^1=90$;当 $m=2$,$r=6$ 时,常数项为 $C_{10}^6\cdot C_4^2=210\times6=1260$;当 $m=3$,$r=4$ 时,常数项为 $C_{10}^4\cdot C_6^3=210\times20=4200$;当 $m=4$,$r=2$ 时,常数项为 $C_{10}^2\cdot C_8^4=45\times70=3150$;当 $m=5$,$r=0$ 时,常数项为 $C_{10}^0\cdot C_{10}^5=1\times252=252$. 故展开式中的常数项为 $1+90+1260+4200+3150+252=8953$.

变式题 (1)C (2)$\frac{1}{2}$ **【解析】** (1)$(x^2-x+y)^6=[(x^2-x)+y]^6$,其二项式通项为 $T_{r+1}=C_6^r(x^2-x)^{6-r}y^r$,令 $r=2$,可得 $T_3=15(x^2-x)^4y^2$,其中 $(x^2-x)^4$ 的通项为 $P_{k+1}=C_4^k(x^2)^{4-k}(-x)^k=(-1)^kC_4^kx^{8-k}$,令 $8-k=5$,得 $k=3$,所以 $P_4=-4x^5$,故 x^5y^2 的系数为 $-4\times15=-60$. 故选 C.

(2)$\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)^2(x+m)^3=\left(x-\frac{1}{x}\right)^4(x+m)^3$,其二项式通项为 $C_4^k\left(-\frac{1}{x}\right)^kx^{4-k}\cdot C_3^rm^rx^{3-r}=(-1)^kC_4^kC_3^rm^rx^{7-r-2k}$,$0\leqslant r\leqslant3$,$0\leqslant k\leqslant4$,$r,k\in\mathbf{Z}$,令 $7-r-2k=3$,则 $k=1$,$r=2$ 或 $k=2$,$r=0$,所以 $(-1)^1C_4^1C_3^2m^2+(-1)^2C_4^2C_3^0m^0=3$,即 $-12m^2+6=3$,因为 $m>0$,所以 $m=\frac{1}{2}$.

第 61 讲　随机事件与概率、古典概型

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)集合
2. (1)子集
3. 一定发生　$B\supseteq A$　$A=B$　至少有一个不能同时发生
4. (1)有限性　等可能性　(2)$\frac{A\text{ 包含的样本点个数}}{\Omega\text{ 包含的样本点总数}}$　$\frac{m}{n}$
5. (1)$0\leqslant P(A)\leqslant1$　(2)$P(A)+P(B)$　(3)$1-P(A)$　$1-P(B)$　(4)$P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
6. (1)可能性大小　(2)某个常数　稳定于

【对点演练】

1. $\{yy,yn,ny,nn\}$ **【解析】** 由题意可知该试验的样本空间 $W=\{yy,yn,ny,nn\}$.
2. 3 件中至多有 2 件一级品 **【解析】** 由题可知,“3 件都是一级品”为事件 A,则 A 的对立事件为“3 件不都是一级品”,即“3 件中至多有 2 件一级品”.
3. 0.58 **【解析】** 由数表知,取到卡片号码为奇数的次数是 $17+5+6+18+12=58$,所以取到卡片号码为奇数的频率为 $\frac{58}{100}=0.58$.
4. ③ **【解析】** ①中,硬币质地不均匀,不是等可能事件,所以不是古典概型;②④的样本空间的样本点不是有限个,不是古典概型;③符合古典概型的特点,是古典概型. 故填③.
5. 3,2 **【解析】** 三辆车的出车顺序的样本空间 $\Omega=\{123,132,213,231,312,321\}$. 按方案一乘坐到序号为 3 的车包含的样本点有 132,213,231,共 3 个;按方案二乘坐到序号为 3 的车包含的样本点有 312,321,共 2 个.
6. $\frac{1}{4}$ **【解析】** 根据题意,(m,n) 所有等可能的结果有 $4\times4=16$(种),若点 (m,n) 落在第三象限,则 $m<0$,$n<0$,所以符合条件的结果有 $(-3,-3)$,$(-3,-1)$,$(-1,-3)$,$(-1,-1)$,共 4 种,则点 (m,n) 落在第三象限的概率是 $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.
7. $\frac{2}{3}$ **【解析】** 记“朝上一面的数是 1,2,3”为事件 C,“朝上一面的数是 5”为事件 D,则 $A+B=C+D$,且 C 与 D 两个事件互斥,所以 $P(A+B)=P(C+D)=P(C)+P(D)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】** (1)对每个选项中事件的关系进行分析,选出正确答案.(2)依次分析各选项,选择与事件“2 张卡片都为红色”互斥而不对立的事件即可.

(1)D (2)BD **【解析】** (1)对于 A,恰好有 1 件次品和恰好有 2 件次品互斥,但不是对立事件;对于 B,至少有 1 件次品和全是次品可以同时发生,不是对立事件;对于 C,至少有 1 件正品和至少有 1 件次品可以同时发生,不是对立事件;对于 D,至少有 1 件次品即存在次品,与全是正品是对立事件. 故选 D.

(2)对于 A,“2 张卡片不全为红色”与“2 张卡片都为红色”是对立事件,故 A 错误;对于 B,“2 张卡片恰有 1 张红色”与“2 张卡片都为红色”互斥而不对立,故 B 正确;对于 C,“2 张卡片至少有 1 张红色”与“2 张卡片都为红色”可以同时发生,二者不互斥,故 C 错误;对于 D,“2 张卡片都为绿色”与“2 张卡片都为红色”互斥而不对立,故 D 正确. 故选 BD.

变式题 (1)C (2)AD **【解析】** (1)事件 A,B,C 都是随机事件,可能发生,也可能不发生,故 A 选项不正确;$A+B+C$ 不一定发生,故 B 选项不正确;A,B 可能同时发生,故 A 与 B 不是互斥事件,故 C 选项正确;B 与 C 既不是互斥事件也不是对立事件,故 D 选项不正确. 故选 C.

(2)A 中两个事件是互斥事件,恰有 1 名女生即选出的 2 名学生中有 1 名男生和 1 名女生,它与恰有 2 名女生不可能同时发生;B 中两个事件不是互斥事件,两个事件均包含有 1 名男生和 1 名女生的情况;C 中两个事件不是互斥事件,至少有 1 名女生包含全是女生的情况;D 中两个事件是互斥事件,至少有 1 名女生与全是男生显然不可能同时发生. 故选 AD.

例 2 **[思路点拨]** (1)先求出从 7 个数中随机取 2 个不同的数的情况种数,再求 2 个数不互质的情况种数,再根据对立事件的性质求出 2 个数互质的情况种数,最后利用古典概型的概率计算公式求解. (2)先求总的排法种数,再求甲、乙均不站在两端的排法种数,最后求概率.

(1)D (2)A **[解析]** (1)从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数,共有 $C_7^2=21$(种)情况,其中不互质的包括从 2,4,6,8 中取 2 个不同的数,或取 3 和 6,共有 $C_4^2+1=7$(种)情况,所以互质的共有 $21-7=14$(种)情况,所以所求概率 $P=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$.

(2)5 个人站成一排,共有 $A_5^5=120$(种)排法,若甲、乙均不站在两端,则从中间 3 个位置选 2 个安排甲、乙,余下 3 人全排列,有 $A_3^2A_3^3=36$(种)排法,所以甲、乙均不站在两端的概率为 $\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$. 故选 A.

变式题 (1)A (2)D (3)$\frac{2}{3}$ **[解析]** (1)方法一:连续抛掷一枚均匀的骰子 2 次,用 (x,y) 表示第 1 次和第 2 次向上的数字分别为 x,y,则样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$,共 36 个样本点,设事件 $A=$"第 1 次向上的数字比第 2 次向上的数字大",则 $A=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$,共 15 个样本点,$\therefore P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$. 故选 A.

方法二:连续抛掷一枚均匀的骰子 2 次,第 1 次向上的数字有 6 种结果,第 2 次向上的数字有 6 种结果,$\therefore$ 连续抛掷一枚均匀的骰子 2 次,样本空间包含的样本点有 $6\times6=36$(个),其中,"第 1 次向上的数字与第 2 次向上的数字相等"包含的样本点有 6 个,而"第 1 次向上的数字比第 2 次向上的数字大"包含的样本点个数,与"第 1 次向上的数字比第 2 次向上的数字小"包含的样本点个数相等,$\therefore$"第 1 次向上的数字比第 2 次向上的数字大"包含的样本点有 $\frac{36-6}{2}=15$(个),$\therefore$ 第 1 次向上的数字比第 2 次向上的数字大的概率 $P=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$. 故选 A.

(2)设盒子中装有红、黄、白三种颜色的球的个数分别为 a,b,c,因为取到红球的概率为 $\frac{1}{2}$,取到黄球的概率为 $\frac{1}{6}$,所以 $\begin{cases}\frac{a}{a+b+c}=\frac{1}{2},\\ \frac{b}{a+b+c}=\frac{1}{6},\end{cases}$ 得到 $a=3b,c=2b$,所以取到白球的概率 $P=\frac{c}{a+b+c}=\frac{2b}{6b}=\frac{1}{3}$. 故选 D.

(3)①若三地分配人数分别为 1,1,3,则共有 $\frac{C_5^1C_4^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=60$(种)安排方法,其中小赵去北京的安排方法有 $C_4^1A_2^2+C_4^2A_2^2=20$(种);②若三地分配人数分别为 1,2,2,则共有 $\frac{C_5^1C_4^2}{A_2^2}\cdot A_3^3=90$(种)安排方法,其中小赵去北京的安排方法有 $C_4^2+C_4^1C_3^2A_2^2=30$(种). 故小赵不去北京的概率为 $1-\frac{20+30}{60+90}=\frac{2}{3}$.

例 3 **[思路点拨]** (1)由题意,根据交事件的运算,结合概率与事件的关系,可得答案. (2)思路一:分别设出取到各色球的概率,由事件的关系和概率的基本性质求出概率即可;思路二:设出红球的个数,根据概率求出各色球的个数,再求取出各色球的概率即可.

(1)D (2)$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$ **[解析]** (1)由题意,事件 $A\cap B$ 为两个点数都是奇数,事件 $A\cap B$ 的对立事件的概率为 $1-P(A\cap B)$,而事件 $A\cap B$ 的对立事件为至多有一个点数是奇数. 故选 D.

(2)方法一:从袋中随机取 1 个球,记事件"取到红球""取到黑球""取到黄球""取到绿球"分别为 A,B,C,D,则事件 A,B,C,D 彼此互斥. 由已知可得,$P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{5}{12}$,$P(C\cup D)=P(C)+P(D)=\frac{5}{12}$,则 $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{2}{3}$,即 $P(B\cup C\cup D)=P(B)+P(C)+P(D)=\frac{2}{3}$,所以 $P(D)=\frac{2}{3}-\frac{5}{12}=\frac{1}{4}$,$P(C)=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$,$P(B)=\frac{5}{12}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$. 故从袋中随机取 1 个球,取到黑球、黄球和绿球的概率分别是 $\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{4}$.

方法二:设红球有 n 个,则 $\frac{n}{12}=\frac{1}{3}$,所以 $n=4$,即红球有 4 个. 因为取到黑球或黄球的概率是 $\frac{5}{12}$,所以黑球和黄球共有 5 个,所以绿球有 $12-4-5=3$(个),又取到绿球或黄球的概率也是 $\frac{5}{12}$,所以绿球和黄球共有 5 个,而绿球有 3 个,所以黄球有 $5-3=2$(个),所以黑球有 $12-4-3-2=3$(个). 因此从袋中随机取 1 个球,取到黑球、黄球和绿球的概率分别是 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4},\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

变式题 (1)0.2 (2)0.92 **[解析]** (1)由题意得 $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)]=1-(0.3+0.5)=0.2$.

(2)由题意知该产品包含正品和次品两种情况,"一个产品是正品"和"一个产品是次品"是对立事件,"一个产品是次品"的概率为 $0.05+0.03=0.08$,$\therefore$"一个产品是正品"的概率为 $1-0.08=0.92$.

例 4 **[思路点拨]** (1)根据频率与概率的关系判断. (2)由题可知 10 组随机数中表示"3 例心脏手术全部成功"的有 2 组,即可得到答案.

(1)AC (2)A **[解析]** (1)试验次数相同时,频率可能不同,说明随机事件发生的频率具有随机性,故 A 正确;试验次数较小时,频率波动较大,试验次数较大时,频率波动较小,所以试验次数越多越好,故 B 错误;随机事件发生的频率会随着试验次数的增加而逐渐稳定在一个固定值附近,此固定值就是概率,故 C 正确;我们要得到某事件发生的概率,需要进行多次试验才能得到概率的估计值,故 D 错误. 故选 AC.

(2)由题意,表示"3 例心脏手术全部成功"的随机数有 569,989,共 2 组,故估计"3 例心脏手术全部成功"的概率为 $\frac{2}{10}=0.2$,故选 A.

变式题 $\frac{3}{10}$ **[解析]** 这 20 组随机数中,表示恰有两天有强浓雾的是 588,683,569,479,表示恰有三天有强浓雾的是 779,978,所以这三天中至少有两天有强浓雾的概率近似为 $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

第 62 讲　事件的独立性与条件概率

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)概率

2. (1)$\frac{P(AB)}{P(A)}$ (2)①1 ②$P(B|A)+P(C|A)$ ③对立事件 (3)①$P(A)P(B|A)$ ②相互独立

【对点演练】

1. 0.7 **[解析]** 由事件 A 与 B 相互独立,得 $P(AB)=P(A)P(B)$,即 $0.6\times P(B)=0.42$,所以 $P(B)=0.7$.

2. $\frac{5}{6}$ **[解析]** 设"甲独立地破解出该谜题"为事件 A,"乙独立地破解出该谜题"为事件 B,"该谜题被破解"为事件 C,且事

件 A 与 B 相互独立，则 $P(C)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{6}$.

3. $\frac{3}{8}$　$\frac{3}{4}$　**[解析]** 由题意可知 $P(A)=\frac{4}{15}$，$P(B)=\frac{2}{15}$，$P(AB)=\frac{1}{10}$，所以 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{15}}=\frac{3}{8}$，$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{15}}=\frac{3}{4}$.

4. $\frac{2}{5}$　**[解析]** 3 个人中至少有 2 个人在规定的时间内完成各自的任务，即在规定的时间内 3 个人中恰有 2 个人完成各自的任务或 3 个人都完成各自的任务，其概率 $P=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{4}+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$.

5. $\frac{2}{3}$　**[解析]** 记事件 A 为“小明选择篮球”，事件 B 为“小明、小红的选择不同”，则 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(AB)=\frac{1\times2}{3\times3}=\frac{2}{9}$，所以 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{9}\times3=\frac{2}{3}$.

6. $\frac{1}{5}$　**[解析]** 设“第 1 次按对”为事件 A_1，“第 2 次按对”为事件 A_2，则不超过 2 次就按对的概率 $P=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{5}$.

● 课堂考点探究

例 1　**[思路点拨]** 根据互斥事件、对立事件的定义以及相互独立事件的概率公式，结合枚举法以及古典概型的概率计算公式，可得答案.

AC　**[解析]** 对于 A，从两个盒子中取出的数字之和有 2 种结果，偶数和奇数，而“数字之和等于 9”是结果为奇数的一种情况，所以 A 与 B 是互斥事件，故 A 正确. 从两个盒子中各取 1 个小球，共有 $4\times4=16$(种)结果，其中数字之和为偶数的有 8 种；数字之和等于 9 的有 $5+4$，$6+3$，$7+2$，$8+1$，共 4 种；数字之和大于 9 的有 $6+4$，$7+3$，$7+4$，$8+2$，$8+3$，$8+4$，共 6 种. 所以 $P(A)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

对于 B，因为 $P(B)+P(C)=\frac{5}{8}\neq1$，所以 B 与 C 不是对立事件，故 B 错误. 对于 C，事件 AC 为“取出的数字之和为偶数且大于 9”，其结果有 $6+4$，$7+3$，$8+2$，$8+4$，共 4 种，所以 $P(AC)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，因为 $P(AC)\neq P(A)P(C)$，所以 A 与 C 不是相互独立事件，故 C 正确. 对于 D，因为当取出的数字之和为偶数时，不可能出现取出的数字之和等于 9 这种情况，所以 $P(AB)=0$，又 $P(A)P(B)=\frac{1}{8}\neq0$，所以 A 与 B 不是相互独立事件，故 D 错误. 故选 AC.

例 2　**[思路点拨]** (1)由相互独立事件的乘法公式求解即可得出丁的总分为 7 分的概率，再分析丁出线的原因. (2)丁以 6 分的成绩出线分为三种情况：①第二轮中若甲负于丙或甲、丙平局；②第二轮中甲胜于丙且第三轮中乙、丙平局或丙负于乙；③第二轮中甲胜于丙且第三轮中丙胜于乙，甲、丁、丙抽签，丁不为第 3 名. 分别求出其概率，相加即可得出答案.

解：(1)记第 i 轮比赛丁胜、平、负分别为事件 A_i，B_i，C_i($i=1,2,3$)，丁总分为 7 分，则丁三场比赛两胜一平，记丁三轮比赛两胜一平为事件 D，则 $P(D)=P(A_1A_2B_3)+P(A_1B_2A_3)+P(B_1A_2A_3)=3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$.

丁总分 7 分一定出线，理由如下：

丁三场比赛中赢两场，这两场丁的对手比分最多 6 分，小组赛两队出线，所以丁一定出线.

(2)由题知，第一轮比赛甲胜乙、丙胜丁，因为丁总分为 6 分，所以丁对战甲、乙都获胜，所以乙的总分最多为 3 分，少于丁的总分.

①第二轮中甲负于丙或甲、丙平局时，甲的总分最多为 4 分，少于丁的总分，此时丁一定出线，其概率 $P_1=\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{6}\right]\times\frac{1}{6}=\frac{1}{54}$；

②第二轮中甲胜于丙且第三轮中乙、丙平局或丙负于乙时，丙的总分最多为 4 分，此时丁一定出线，其概率 $P_2=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)\times\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{6}\right]=\frac{1}{162}$；

③第二轮中甲胜于丙且第三轮中丙于胜乙时，甲、丁、丙的总分均为 6 分，此时由抽签的方式确定排名，三队中有两队出线，每队出线概率均为 $\frac{2}{3}$，此时丁队出线的概率 $P_3=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{486}$. 综上，丁以 6 分的成绩出线的概率 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{1}{54}+\frac{1}{162}+\frac{1}{486}=\frac{13}{486}$.

变式题　(1)ABD　**[解析]** 对于 A，发送 1，0，1，收到 1，0，1 的概率分别为 $1-\beta$，$1-\alpha$，$1-\beta$，因为信号传输是相互独立的，所以由相互独立事件的概率公式得，所求概率为 $(1-\alpha)(1-\beta)^2$，故 A 正确. 对于 B，采用三次传输方案，发送 1，1，1，收到 1，0，1 的概率分别为 $1-\beta$，β，$1-\beta$，由相互独立事件的概率公式得，所求概率为 $\beta(1-\beta)^2$，故 B 正确. 对于 C，采用三次传输方案，发送 1，1，1，收到的译码为 1，则收到的信号可能为(1，1，0)，(1，0，1)，(0，1，1)，(1，1，1)，故所求概率为 $3\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3$，故 C 错误. 对于 D，若采用三次传输方案，发送 0，收到的译码为 0，则收到的信号可能为(0，0，0)，(0，0，1)，(0，1，0)，(1，0，0)，故所对应的概率 $P_1=3\alpha(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^3$，若采用单次传输方案，发送 0，则收到信号 0 即为译码，所对应的概率 $P_2=1-\alpha$，因为 $0<\alpha<0.5$，所以 $P_1-P_2=3\alpha(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^3-(1-\alpha)=(1-\alpha)^2(1+2\alpha)-(1-\alpha)=(1-\alpha)(1-2\alpha)\alpha>0$，所以 $P_1>P_2$，故 D 正确. 故选 ABD.

(2)**解：**(i)记事件 A 为甲胜乙，则 $P(A)=\frac{1}{2}$，则 $P(\overline{A})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，记事件 B 为甲胜丙，则 $P(B)=\frac{1}{2}$，则 $P(\overline{B})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，记事件 C 为乙胜丙，则 $P(C)=\frac{1}{2}$，则 $P(\overline{C})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，前三场比赛结束后，丙被淘汰可用事件 $C\overline{A}C\cup CAB$ 来表示，所以前三场比赛结束后，丙被淘汰的概率 $P_1=P(C\overline{A}C)+P(CAB)=P(C)P(\overline{A})P(C)+P(C)P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

(ii)若最终的冠军为甲，则只需四场比赛就决出冠军可用事件 $CABA\cup\overline{C}BAB$ 来表示，$P(CABA\cup\overline{C}BAB)=P(CABA)+P(\overline{C}BAB)=P(C)P(A)P(B)P(A)+P(\overline{C})P(B)P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$；

若最终的冠军为乙，则只需四场比赛就决出冠军可用事件 $C\overline{A}C\overline{A}$ 来表示，$P(C\overline{A}C\overline{A})=P(C)P(\overline{A})P(C)P(\overline{A})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$；

若最终的冠军为丙，则只需四场比赛就决出冠军可用事件 $\overline{C}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{B}$ 来表示，$P(\overline{C}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{B})=P(\overline{C})P(\overline{B})P(\overline{C})P(\overline{B})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$. 综上，只需四场比赛就决出冠军的概率 $P_2=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$.

例 3　**[思路点拨]** (1)先算出同时爱好两项的概率，然后利用条件概率的知识求解. (2)利用乘法概率公式进行求解.

(1)A　(2)C　**【解析】** (1)同时爱好两项的概率为 $60\%+50\%-70\%=40\%$,记“该同学爱好滑雪”为事件 A,“该同学爱好滑冰”为事件 B,则 $P(A)=50\%$,$P(AB)=40\%$,所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{40\%}{50\%}=0.8$. 故选 A.

(2)设“从 1 号箱中取到红球放入 2 号箱”为事件 A,“从 2 号箱中取到红球”为事件 B,由题意知 $P(A)=\dfrac{4}{2+4}=\dfrac{2}{3}$,$P(B|A)=\dfrac{3+1}{8+1}=\dfrac{4}{9}$,所以 $P(BA)=P(B|A)P(A)=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$. 故选 C.

变式题　(1)B　(2)$\dfrac{2}{3}$　**【解析】** (1)记景点苍山、洱海、大理古城、崇圣寺三塔、蝴蝶泉分别为 a,b,c,d,e,则事件 A 包含的样本点有 $(a,e),(b,e),(c,e),(d,e),(e,e),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)$,共 9 个,其中“甲和乙选择的景点不同”包含的样本点有 $(a,e),(b,e),(c,e),(d,e),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)$,共 8 个,所以 $P(B|A)=\dfrac{8}{9}$. 故选 B.

(2)方法一:记第 i 次摸到红球为事件 A_i,摸到黄球为事件 B_i $(i=1,2)$. 由抽签的公平性可知 $P(B_2)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$,又 $P(A_1B_2)=\dfrac{2\times2}{4\times3}=\dfrac{1}{3}$,所以 $P(A_1|B_2)=\dfrac{P(A_1B_2)}{P(B_2)}=\dfrac{2}{3}$.

方法二:记第 i 次摸到红球为事件 A_i,摸到黄球为事件 B_i $(i=1,2)$,则 $P(B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$,$P(A_1B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$,故 $P(A_1|B_2)=\dfrac{P(A_1B_2)}{P(B_2)}=\dfrac{2}{3}$.

第 63 讲　全概率公式及应用

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$

【对点演练】

1. 0.65　**【解析】** 设 A_1 为“第一天选择一餐厅就餐”,B_1 为“第一天选择二餐厅就餐”,A_2 为“第二天选择一餐厅就餐”,则 $P(A_1)=P(B_1)=0.5$,$P(A_2|A_1)=0.6$,$P(A_2|B_1)=0.7$,由全概率公式可知 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)=0.5\times0.6+0.5\times0.7=0.65$.
2. 86.4%　**【解析】** 用 A 表示生产线初始状态良好,B 表示产品为合格品,则 $P(A)=80\%$,$P(B|A)=95\%$,$P(B|\overline{A})=60\%$,所以 $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\dfrac{80\%\times95\%}{80\%\times95\%+(1-80\%)\times60\%}\approx86.4\%$.
3. 0.25　**【解析】** 设事件 A_i=“第 i 天去 2 楼阅读”,事件 B_i=“第 i 天去 3 楼阅读”,则 $P(A_1)=P(B_1)=0.5$,$P(B_2|A_1)=1-0.7=0.3$,$P(B_2|B_1)=1-0.8=0.2$,所以 $P(B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)=0.5\times0.3+0.5\times0.2=0.25$.
4. $\dfrac{7}{30}$　**【解析】** 记事件 A_1,A_2,A_3 分别表示此人选自甲、乙、丙三个地区,事件 B=“此人被录取”,则 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{3}$,$P(B|A_1)=\dfrac{1}{3}$,$P(B|A_2)=\dfrac{1}{5}$,$P(B|A_3)=\dfrac{1}{6}$,故 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{30}$.
5. 0.998　**【解析】** 设 A=“任取一个产品,经检查是合格品”,B=“任取一个产品的确是合格品”,则 $A=BA+\overline{B}A$,则 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0.96\times0.98+0.04\times0.05=0.9428$,故所求概率为 $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0.96\times0.98}{0.9428}\approx0.998$.

● 课堂考点探究

探究点一

1. B　**【解析】** 因为 $P(A)=0.5$,所以 $P(\overline{A})=1-0.5=0.5$,所以 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.5\times P(B|A)+0.5\times0.2=0.3$,解得 $P(B|A)=0.4$. 故选 B.
2. B　**【解析】** 由全概率公式得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\dfrac{1}{20}\times0+\dfrac{19}{20}\times P(B|\overline{A})=\dfrac{1}{20}$,解得 $P(B|\overline{A})=\dfrac{1}{19}$. 故选 B.
3. $\dfrac{1}{3}$　**【解析】** 因为 $P(A)=\dfrac{1}{3}$,所以 $P(\overline{A})=\dfrac{2}{3}$,由全概率公式得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{3}$.
4. $\dfrac{83}{192}$　**【解析】** 由题意得 $P(A_2|A_1)=3P(A_1)=3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$,$P(A_2|\overline{A_1})=\dfrac{1}{4}$,则 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{24}$,则 $P(A_3|A_2)=3P(A_2)=3\times\dfrac{7}{24}=\dfrac{7}{8}$,又 $P(A_3|\overline{A_2})=\dfrac{1}{4}$,所以 $P(A_3)=P(A_2)P(A_3|A_2)+P(\overline{A_2})P(A_3|\overline{A_2})=\dfrac{7}{24}\times\dfrac{7}{8}+\left(1-\dfrac{7}{24}\right)\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{83}{192}$.

例 1　**【思路点拨】** (1)由条件根据全概率公式求解即可. (2)先根据相互独立事件的概率公式即可求出第一个空;根据古典概型的概率计算公式或全概率公式可求出第二个空.

(1)A　(2)$\dfrac{1}{20}$　$\dfrac{3}{5}$　**【解析】** (1)设事件 B 为取到男性志愿者,事件 A_1 为所抽到的单位为甲单位,事件 A_2 为所抽到的单位为乙单位,则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{13}{24}$. 故选 A.

(2)方法一:设 A=“取到的三个球都是黑球”,根据相互独立事件的概率公式得 $P(A)=40\%\times25\%\times50\%=0.05=\dfrac{1}{20}$. 设 C=“将三个盒子中的球混合后任取一个球是白球”,则 $P(C)=\dfrac{5\times(1-40\%)+4\times(1-25\%)+6\times(1-50\%)}{5+4+6}=\dfrac{3}{5}$.

方法二:设 A_1=“从甲盒子中取到一个黑球”,A_2=“从乙盒子中取到一个黑球”,A_3=“从丙盒子中取到一个黑球”,A=“取到的三个球都是黑球”,根据相互独立事件的概率公式,得 $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\dfrac{40}{100}\times\dfrac{25}{100}\times\dfrac{50}{100}=\dfrac{1}{20}$. 设 C=“将三个盒子中的球混合后任取一个球是白球”,B_1=“取到的球是甲盒子中的”,B_2=“取到的球是乙盒子中的”,B_3=“取到的球是丙盒子中的”,则 $\Omega=B_1\cup B_2\cup B_3$,且 B_1,B_2,B_3 两两互斥. 根据题意得 $P(C)=P(B_1)P(C|B_1)+P(B_2)P(C|B_2)+P(B_3)P(C|B_3)=\dfrac{5}{15}\times\dfrac{60}{100}+\dfrac{4}{15}\times\dfrac{75}{100}+\dfrac{6}{15}\times\dfrac{50}{100}=\dfrac{3}{5}$.

变式题　(1)B　(2)0.56　**【解析】** (1)设 A=“发送的信号为 0”,B=“接收到的信号为 0”,则 $\overline{A}$=“发送的信号为 1”,$\overline{B}$=“接收到的信号为 1”,则 $P(A)=0.5$,$P(\overline{A})=0.5$,$P(B|A)=0.9$,$P(\overline{B}|A)=0.1$,$P(B|\overline{A})=0.05$,$P(\overline{B}|\overline{A})=0.95$,所以接收的信号为 0 的概率 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.5\times0.9+0.5\times0.05=0.475$,所以接收的信号为 1 的概率 $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.475=0.525$. 故选 B.

(2)记取到一等麦种和二等麦种分别为事件 A_1,A_2,所结麦穗含有 50 粒以上麦粒为事件 B,则 $P(A_1)=0.9$,$P(A_2)=0.1$,$P(B|A_1)=0.6$,$P(B|A_2)=0.2$,由全概率公式可得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=0.9\times0.6+$

$0.1\times0.2=0.56$.

例 2 **[思路点拨]** (1)记事件 A 为某人患肝癌,事件 B 为化验结果呈阳性,利用全概率公式求出 $P(B)$ 的值,再利用贝叶斯公式可求得所求事件的概率.(2)利用全概率公式求得"取到一件产品为正品"的概率,再根据贝叶斯公式求得正确答案.

(1)C (2)丙 **[解析]** (1)记事件 A 为某人患肝癌,事件 B 为化验结果呈阳性,由题意可知 $P(A)=\frac{1}{1000}$,$P(B|A)=\frac{999}{1000}$,$P(B|\overline{A})=\frac{1}{1000}$,所以 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{1}{1000}\times\frac{999}{1000}+\frac{999}{1000}\times\frac{1}{1000}=\frac{999}{5\times10^5}$,现在某人的化验结果呈阳性,则他真的患肝癌的概率是 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{999}{10^6}}{\frac{999}{5\times10^5}}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

(2)"取到一件产品为正品"的概率为 $0.95\times\frac{2}{2+3+5}+0.9\times\frac{3}{2+3+5}+0.8\times\frac{5}{2+3+5}=0.86$,则它是由甲厂生产的概率为 $\frac{0.95\times\frac{2}{2+3+5}}{0.86}=\frac{19}{86}$,它是由乙厂生产的概率为 $\frac{0.9\times\frac{3}{2+3+5}}{0.86}=\frac{27}{86}$,它是由丙厂生产的概率为 $\frac{0.8\times\frac{5}{2+3+5}}{0.86}=\frac{20}{43}$,因为 $\frac{20}{43}>\frac{27}{86}>\frac{19}{86}$,所以它是由丙厂生产的概率最大.

变式题 (1)B (2)0.35 **[解析]** (1)记事件 A 为从剩下的 9 箱中随机打开 2 箱,结果是 1 箱语文书、1 箱数学书,记事件 B_1 为丢失的一箱是语文书,事件 B_2 为丢失的一箱是数学书,事件 B_3 为丢失的一箱是英语书,则 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{2}\times\frac{4\times3}{C_9^2}+\frac{3}{10}\times\frac{5\times2}{C_9^2}+\frac{1}{5}\times\frac{5\times3}{C_9^2}=\frac{1}{3}$,$P(AB_3)=P(B_3)P(A|B_3)=\frac{1}{5}\times\frac{5\times3}{C_9^2}=\frac{1}{12}$,由贝叶斯公式可得 $P(B_3|A)=\frac{P(AB_3)}{P(A)}=\frac{1}{4}$. 故选 B.

(2)记事件 M 为这人患了流感,事件 N_1,N_2,N_3 分别为这人来自 A,B,C 地区.由题意可知 $P(N_1)=0.2$,$P(N_2)=0.35$,$P(N_3)=0.45$,$P(M|N_1)=0.02$,$P(M|N_2)=0.065$,$P(M|N_3)=0.085$,则 $P(M)=P(N_1)P(M|N_1)+P(N_2)P(M|N_2)+P(N_3)P(M|N_3)=0.065$,则 $P(N_2|M)=\frac{P(N_2)P(M|N_2)}{P(M)}=0.35$.

例 3 **解:**(1)设事件 A 为"甲最终获胜",事件 B 为"乙最终获胜".设事件 C_1 为"在第一、二回射击中甲均获胜",则 $P(A|C_1)=1$;设事件 C_2 为"在第一、二回射击中乙均获胜",则 $P(A|C_2)=0$;设事件 C_3 为"在第一、二回射击中甲、乙各获胜一次",则 $P(A|C_3)=P(A)$.

显然 $P(C_1)=\alpha^2$,$P(C_2)=\beta^2$,$P(C_3)=2\alpha\beta$,由全概率公式,得 $P(A)=P(A|C_1)P(C_1)+P(A|C_2)P(C_2)+P(A|C_3)P(C_3)=\alpha^2+0+2\alpha\beta P(A)$,解得 $P(A)=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}$,

同理,$P(B)=P(B|C_1)P(C_1)+P(B|C_2)P(C_2)+P(B|C_3)P(C_3)=\beta^2+0+2\alpha\beta P(B)$,解得 $P(B)=\frac{\beta^2}{1-2\alpha\beta}$.

(2)因为 $P(A)+P(B)=\frac{\alpha^2+\beta^2}{1-2\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{1-2\alpha\beta}=1$,所以比赛不会无限地一直进行下去.

变式题 **解:**(1)①设事件 A = "该同学有购买意向",事件 B_i = "该同学来自(i)班"($i=1,2,3$).

由题意可知 $P(B_1)=\frac{2}{7}$,$P(B_2)=\frac{1}{3}$,$P(B_3)=\frac{8}{21}$,$P(A|B_1)=\frac{1}{2}$,$P(A|B_2)=\frac{1}{3}$,$P(A|B_3)=\frac{1}{4}$,由全概率公式可得 $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{8}{21}\times\frac{1}{4}=\frac{22}{63}$.

②由贝叶斯公式可得 $P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{22}{63}}=\frac{7}{22}$.

(2)由题意可得每次叫价增加 1 元的概率为 $\frac{2}{3}$,每次叫价增加 2 元的概率为 $\frac{1}{3}$.设叫价为 $n(3\leqslant n\leqslant10)$ 元的概率为 P_n,叫价出现 n 元的情况只有下列两种:

①叫价为 $n-1$ 元,且骰子点数大于 2,其概率为 $\frac{2}{3}P_{n-1}$;

②叫价为 $n-2$ 元,且骰子点数小于 3,其概率为 $\frac{1}{3}P_{n-2}$.

所以 $P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}P_{n-2}(n\geqslant3)$,易得 $P_1=\frac{2}{3}$,$P_2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$,因为 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}P_{n-2}=-\frac{1}{3}(P_{n-1}-P_{n-2})(n\geqslant3)$,所以当 $n\geqslant2$ 时,数列 $\{P_n-P_{n-1}\}$ 是首项为 $\frac{1}{9}$,公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列,所以 $P_n-P_{n-1}=\frac{1}{9}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}(n\geqslant2)$,所以 $P_{10}=P_1+(P_2-P_1)+(P_3-P_2)+\cdots+(P_9-P_8)+(P_{10}-P_9)=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{9}\times\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^9\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\approx0.75$,故甲同学获得该笔记本购买资格的概率约为 0.75.

思维拓展(四) 利用数列递推关系解决概率问题

例 1 **解:**(1)记该顾客第 $i(i\in\mathbf{N}^*)$ 次摸球抽中奖品为事件 A_i.

依题意知 $P_1=\frac{2}{7}$,$P_2=P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{7}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{19}{42}$.

当 $n\geqslant2$ 时,因为 $P(A_n|A_{n-1})=\frac{1}{3}$,$P(A_n|\overline{A}_{n-1})=\frac{1}{2}$,$P_n=P(A_n)$,所以 $P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1})+P(\overline{A}_{n-1})P(A_n|\overline{A}_{n-1})$,即 $P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{2}(1-P_{n-1})=-\frac{1}{6}P_{n-1}+\frac{1}{2}(n\geqslant2)$,所以 $P_n-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(P_{n-1}-\frac{3}{7}\right)(n\geqslant2)$,又因为 $P_1-\frac{3}{7}=-\frac{1}{7}$,所以数列 $\left\{P_n-\frac{3}{7}\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{7}$,公比为 $-\frac{1}{6}$ 的等比数列,

所以 $P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

(2)当 n 为奇数时,$P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7\times6^{n-1}}<\frac{3}{7}$. 当 n 为偶数时,$P_n=\frac{3}{7}+\frac{1}{7\times6^{n-1}}$,且 P_n 随着 n 的增大而减小,所以 $P_n\leqslant P_2=\frac{19}{42}$. 综上,该顾客第二次摸球抽中奖品的概率最大.

变式题 $\frac{2}{9}$ $\frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}$ **[解析]** 由题意,第 3 次传球后,乙、丙、丁三人均接过传出来的球发生的概率 $P_3=A_3^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$. 在第 $n(n\geqslant4)$ 次传球后,乙、丙、丁三人均接过传出来的球,有两种情况,第一种情况是第 $n-1$ 次传球后,乙、丙、丁三

人均接过传出来的球，这种情况的概率为 P_{n-1}；第二种情况是第 $n-1$ 次传球后，乙、丙、丁三人中只有两人接过传出来的球，第 n 次传球时将球传给剩余的一人，这种情况的概率为 $\left(1-P_{n-1}-3\times\frac{1}{3^{n-1}}\right)\times\frac{1}{3}$. ∴当 $n\geqslant 4$ 时，$P_n=P_{n-1}+\left(1-P_{n-1}-3\times\frac{1}{3^{n-1}}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}P_{n-1}-\frac{1}{3^{n-1}}$，即 $3^nP_n=2\cdot 3^{n-1}P_{n-1}-3+3^{n-1}$，令 $a_n=3^nP_n-3$，则 $a_n=2a_{n-1}+3^{n-1}$，则 $\frac{a_n}{3^n}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}+\frac{1}{3}$，即 $\frac{a_n}{3^n}-1=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}-1\right)$，∵$a_3=3^3\times\frac{2}{9}-3=3$，∴$\frac{a_n}{3^n}-1=-\frac{8}{9}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}=-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，∴$a_n=3^n-3\times 2^n$，∴$3^nP_n-3=3^n-3\times 2^n$，∴$P_n=\frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}$.

例 2 **解**：(1)“跳子”开始在第 1 格为必然事件，则 $P_1=1$；第一次掷硬币出现反面，“跳子”移到第 2 格，其概率为 $\frac{1}{2}$，即 $P_2=\frac{1}{2}$；第一次掷硬币出现正面或前两次掷硬币均出现反面，其概率为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，即 $P_3=\frac{3}{4}$.

(2)(i)证明：由(1)知，$P_1=1$，$P_2=\frac{1}{2}$.“跳子”前进到第 n $(3\leqslant n\leqslant 9)$ 格的情况是下面两种，而且只有两种：

①“跳子”先到第 $n-2$ 格，又掷出正面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-2}$；

②“跳子”先到第 $n-1$ 格，又掷出反面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$.

∴$P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$，则 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$，又 $P_2-P_1=-\frac{1}{2}\neq 0$，∴数列 $\{P_n-P_{n-1}\}(2\leqslant n\leqslant 9)$ 是以 $-\frac{1}{2}$ 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

(ii)由(i)得，$P_n-P_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(2\leqslant n\leqslant 9)$，∴$P_n=(P_n-P_{n-1})+(P_{n-1}-P_{n-2})+\cdots+(P_2-P_1)+P_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right](2\leqslant n\leqslant 9)$，

∴$P_8=\frac{2}{3}\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right]=\frac{85}{128}$，∴$P_{10}=\frac{1}{2}P_8=\frac{85}{256}$.

变式题 ABC **【解析】** $a_1=3(a_3+a_2)=9$，故 A 正确；因为 $a_{n+1}=n(a_n+a_{n-1})(n\geqslant 3)$，所以 $a_{n+1}-(n+1)a_n=-a_n+na_{n-1}=-(a_n-na_{n-1})(n\geqslant 3)$，又 $a_3-3a_2=-1$，所以 $\{a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}\}$ 是首项和公比均为 -1 的等比数列，故 B 正确；所以 $a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}=(-1)\times(-1)^{n-1}=(-1)^n$，所以 $\frac{a_{n+2}}{(n+2)!}-\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-1)^n}{(n+2)!}=\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}$，因为 $\frac{a_n}{n!}=\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}-\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+\frac{a_3}{3!}-\frac{a_2}{2!}+\frac{a_2}{2!}$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_n}{n!}=\frac{1}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}$，故 C 正确；装错信封的概率为 $\frac{a_n}{n!}$，因为 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$，所以 $e^{-1}=1+(-1)+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\cdots$，当 n 为奇数时，$\frac{1}{e}-\frac{a_n}{n!}=\left[\frac{1}{(n+1)!}+\frac{-1}{(n+2)!}\right]+\left[\frac{1}{(n+3)!}+\frac{-1}{(n+4)!}\right]+\cdots=\frac{n+1}{(n+2)!}+\frac{n+3}{(n+4)!}+\cdots>0$，即 $\frac{1}{e}>\frac{a_n}{n!}$，当 n 为偶数时，$\frac{1}{e}-\frac{a_n}{n!}=\left[-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{-1}{(n+2)!}\right]+\left[-\frac{1}{(n+3)!}-\frac{-1}{(n+4)!}\right]+\cdots=-\frac{n+1}{(n+2)!}-\frac{n+3}{(n+4)!}-\cdots<0$，即 $\frac{1}{e}<\frac{a_n}{n!}$，故 D 错误. 故选 ABC.

例 3 **解**：(1)由题知，随机变量 X 的所有可能取值为 1，2，3，$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_2^1}{\frac{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{A_3^3}}=\frac{8}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_3^1\cdot 2}{\frac{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{A_3^3}}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，$P(X=3)=\frac{1}{\frac{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{A_3^3}}=\frac{1}{15}$，

所以 X 的分布列为

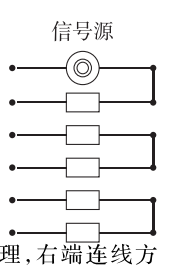
X	1	2	3
P	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$

所以 $EX=1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{1}{15}=\frac{23}{15}$.

(2)证明：不妨令绳头编号为 1，2，3，4，…，$2n$，其中 1，2 是同一根绳子的两个绳头，由题意知，与绳头 1 打结的绳头有 $2n-2$ 种可能，假设绳头 1 与绳头 3 打结，那么相当于对剩下 $n-1$ 根绳子进行打结. 令 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 根绳子打结后可形成一个圆的种数为 a_n，那么经过一次打结后，剩下 $n-1$ 根绳子打结后可形成一个圆的种数为 a_{n-1}，由此可得，$a_n=(2n-2)a_{n-1}$，$n\geqslant 2$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2n-2$，$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=2n-4$，…，$\frac{a_2}{a_1}=2$，所以 $\frac{a_n}{a_1}=(2n-2)\times(2n-4)\times\cdots\times 2=2^{n-1}\cdot(n-1)!$，又 $a_1=1$，所以 $a_n=2^{n-1}\cdot(n-1)!$.

对 $2n$ 个绳头进行任意 2 个绳头打结，总共有 $N=\frac{C_{2n}^2C_{2n-2}^2C_{2n-4}^2\cdots C_2^2}{n!}=\frac{2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times 2\times 1}{2^n\cdot n!}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$（种）可能，所以所求概率 $P=\frac{a_n}{N}=\frac{2^{n-1}\cdot(n-1)!}{\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}}=\frac{2^{2n-1}\cdot n!\,(n-1)!}{(2n)!}$.

变式题 D **【解析】** 根据题意，设右端连线方式如图，对于左端的六个接线点，将其随机地平均分成三组，共有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$（种）结果，若五个接收器能同时接收到信号，则这五个接收器必须全部在同一个串联线路中，则 1 必须和 3，4，5，6 中的一个相接，接好后，2 只有两种接法，剩下的接线点只有一种接法，所以共有 $C_4^1C_2^1C_1^1=8$（种）结果. 同理，右端连线方式变化时，左端的接线方法还是 15 种，其中有 8 种可以使这五个接收器能同时接收到信号，所以这五个接收器能同时接收到信号的概率 $P=\frac{8}{15}$. 故选 D.



第 64 讲　离散型随机变量的分布列、均值与方差

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. (1)一一列举出来

3. (1)$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$　平均水平

(2)离散程度　(3)①$aEX+b$　②a^2DX

4. (1)p　q

【对点演练】

1. 0.2 **【解析】** 由离散型随机变量分布列的性质以及已知条件得 $\begin{cases}m+n+0.2=1,\\ m+2n=1.2,\end{cases}$ 解得 $m=n=0.4$，因此 $m-\frac{n}{2}=0.2$.

2. $\frac{1}{3}$ **【解析】** 由题意可知 $P(X=0)+P(X=1)=2a+a=1$，解得 $a=\frac{1}{3}$.

3. 10.4 **【解析】** 因为 $EX=1\times 0.1+2\times 0.3+3\times 0.4+4\times 0.1+5\times 0.1=2.8$，所以 $E(3X+2)=3EX+2=3\times 2.8+2=10.4$.

4. 1，2，3，4，5，6，7 **【解析】** 因为取到白球时停止操作，所以最

少取球次数为1,即第一次就取到了白球;最多取球次数是7,即把所有的黑球取完之后才取到白球.所以取球次数可以是1,2,3,4,5,6,7.

5. $\frac{3}{7}$ **[解析]** 因为随机变量 X 的分布列为 $P(X=i)=\frac{k}{2^i}$ $(i=1,2,3)$,所以 $\frac{k}{2^1}+\frac{k}{2^2}+\frac{k}{2^3}=1$,解得 $k=\frac{8}{7}$,所以 $P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{\frac{8}{7}}{4}+\frac{\frac{8}{7}}{8}=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$.

6. $\frac{1}{2}$ $\frac{11}{16}$ **[解析]** 由题意知 $2c^2+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}c=1$,即 $2c^2+c-1=0$,即 $(2c-1)(c+1)=0$,解得 $c=\frac{1}{2}$ 或 $c=-1$,由 $c>0$,得 $c=\frac{1}{2}$.则 $EX=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,又 $EX^2=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$,所以 $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{5}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$.

7. 0.064 0.096 **[解析]** 当 $X=0$ 时,表示前三次都没有命中,第四次还要射击,但结果不计,所以 $P(X=0)=0.4^3=0.064$.当 $X=1$ 时,表示前两次都没有命中,第三次命中,所以 $P(X=1)=0.6\times0.4^2=0.096$.

● 课堂考点探究

例1 **[思路点拨]** (1)根据离散型随机变量分布列的性质即可得到 $a+c=\frac{2}{3}$,进而可求 $P(|X|=1)$.(2)根据分布列中的数据计算出 $P(X\leqslant-2)$,$P(X\leqslant0)$ 的值,然后对照数据得到结果.

(1)C (2)B **[解析]** (1)由分布列可知 $a+c=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,故 $P(|X|=1)=P(X=1)+P(X=-1)=a+c=\frac{2}{3}$,故选C.

(2)由分布列知 $P(X\leqslant-2)=0.2+0.1=0.3$,$P(X\leqslant0)=0.1+0.2+0.2=0.5$,∴当 $m\in(-2,0]$ 时,$P(X<m)=0.3$,即 m 的取值范围为 $(-2,0]$.故选B.

变式题 (1)0.6 (2)$\frac{3}{10}$ **[解析]** (1)因为随机变量 X 服从两点分布,且 $P(X=1)-P(X=0)=0.2$,所以 $\begin{cases}P(X=1)-P(X=0)=0.2,\\P(X=1)+P(X=0)=1,\end{cases}$ 解得 $P(X=1)=0.6$.

(2)∵随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=\frac{m}{k(k+1)}$ $(k=1,2,3,4,5)$,∴$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=m\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}\right)=1$,解得 $m=\frac{6}{5}$,∴$P\left(\frac{3}{2}<X<\frac{7}{2}\right)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{6}{5}\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}\right)=\frac{3}{10}$.

例2 **[思路点拨]** (1)利用期望公式与分布列的性质得到关于 a,b 的方程组,从而求得 a,b 的值,再利用方差公式即可得解.(2)根据期望公式求得随机变量 X 的期望,之后利用方差公式求得随机变量 X 的方差,再根据二次函数的性质求得结果.

(1)B (2)C **[解析]** (1)因为 $EX=\frac{1}{3}$,且各概率之和为1,所以 $\begin{cases}-2a+0\times\frac{1}{3}+b=\frac{1}{3},\\a+\frac{1}{3}+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{9},\\b=\frac{5}{9},\end{cases}$ 所以 $DX=\frac{1}{9}\times\left(-2-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left(0-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$.故选B.

(2)根据题意可得,$EX=\frac{0+a+1}{3}=\frac{a+1}{3}$,则 $DX=\left(0-\frac{a+1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(a-\frac{a+1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{a+1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{2a^2-2a+2}{9}=\frac{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}{9}$,所以当 a 在 $(0,1)$ 内逐渐减小时,DX 先减小后增大.故选C.

变式题 (1)ABC (2)ABD **[解析]** (1)由题意得,$\frac{1}{2}+b+\frac{1}{6}=1$,∴$b=\frac{1}{3}$,故选项A正确;销售该商品5件,其中3件单件销售利润为0元的概率为 $C_5^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$,故选项B正确;$EX=0\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times a+2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}(a+1)$,可知 $DX=\left[0-\frac{1}{3}(a+1)\right]^2\times\frac{1}{2}+\left[a-\frac{1}{3}(a+1)\right]^2\times\frac{1}{3}+\left[2-\frac{1}{3}(a+1)\right]^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}\times(2a^2-2a+5)=\frac{1}{9}\times\left[2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\right]$,所以当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$DX_{\min}=\frac{1}{2}$,故选项C正确;当 $DX=\frac{1}{2}$ 时,$EX=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times2=\frac{1}{2}$,故选项D错误.故选ABC.

(2)由分布列的性质可得 $\frac{1}{6}+a+b=1$,解得 $a+b=\frac{5}{6}$①.因为 $EX=0\times a+1\times b+2\times\frac{1}{6}=1$,所以 $b=\frac{2}{3}$②,联立①②解得 $a=\frac{1}{6}$,$b=\frac{2}{3}$,所以 $DX=(0-1)^2\times\frac{1}{6}+(1-1)^2\times\frac{2}{3}+(2-1)^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.因为 $Y=2X-1$,所以 $EY=2EX-1=1$,$DY=4DX=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.故选ABD.

例3 **[思路点拨]** (1)根据题意,利用全概率公式计算即可求解;(2)由题意可得 X 的所有可能取值为0,2,4,6,利用独立事件的概率公式计算求出对应的概率,列出 X 的分布列,求出 EX 即可.

解:(1)设该同学所选的题目为天文、航天、数字科技相关知识的题目分别为事件 A_1,A_2,A_3,所选的题目回答正确为事件 B,则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.4\times\frac{2}{3}+0.4\times\frac{1}{2}+0.2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$,所以该同学在题库中任选一题作答,他回答正确的概率为 $\frac{8}{15}$.

(2)由题可知 X 的所有可能取值为0,2,4,6,

$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$,

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{7}{18}$,

$P(X=4)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{7}{18}$,$P(X=6)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,

则 X 的分布列为

X	0	2	4	6
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$

所以 $EX=0\times\frac{1}{9}+2\times\frac{7}{18}+4\times\frac{7}{18}+6\times\frac{1}{9}=3$.

变式题 **解:**(1)由题意可知,某顾客抽奖一次积3分的频率是 $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$,则由频率估计概率,估计某顾客抽奖一次积3分的概率为 $\frac{1}{5}$.某顾客抽奖一次积2分的频率是 $\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$,则由频率估计概率,估计某顾客抽奖一次积2分的概率为 $\frac{3}{10}$.

(2)由题意可知 X 的所有可能取值为 4,5,6,7,8.

$P(X=8)=\frac{C_{15}^2}{C_{30}^2}=\frac{7}{29}$, $P(X=7)=\frac{C_{15}^1C_9^1}{C_{30}^2}=\frac{9}{29}$, $P(X=6)=\frac{C_9^2+C_6^1C_{15}^1}{C_{30}^2}=\frac{42}{145}$, $P(X=5)=\frac{C_6^1C_9^1}{C_{30}^2}=\frac{18}{145}$, $P(X=4)=\frac{C_6^2}{C_{30}^2}=\frac{1}{29}$.

则 X 的分布列为

X	8	7	6	5	4
P	$\frac{7}{29}$	$\frac{9}{29}$	$\frac{42}{145}$	$\frac{18}{145}$	$\frac{1}{29}$

故 $EX=8\times\frac{7}{29}+7\times\frac{9}{29}+6\times\frac{42}{145}+5\times\frac{18}{145}+4\times\frac{1}{29}=6.6$.

例 4 **[思路点拨]** (1)首先求随机抽检的 100 个“昭通苹果”中 A 级品的频率,以频率估计概率,再根据独立重复事件求概率;(2)分别求出购进 170 千克和 180 千克时的平均利润,比较后,即可确定.

解:(1)由表中的数据可知,抽到 A 级品的频率为 $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$,故估计抽到 A 级品的概率为 $\frac{1}{2}$,所以抽取的 10 个“昭通苹果”中有 4 个 A 级品的概率 $P=C_{10}^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{105}{512}$.

(2)若超市购进 170 千克“昭通苹果”,则设利润为 Y_1 元,卖出的“昭通苹果”为 X_1 千克,则 X_1 的可能取值为 170,160,150,Y_1 的可能取值为 $(10-6)\times170=680$, $(10-6)\times160+(4-6)\times10=620$, $(10-6)\times150+(4-6)\times20=560$,

$P(Y_1=680)=P(X_1=170)=\frac{20-2-4}{20}=\frac{7}{10}$, $P(Y_1=620)=P(X_1=160)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$, $P(Y_1=560)=P(X_1=150)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$,

则 Y_1 的分布列为

Y_1	680	620	560
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$EY_1=680\times\frac{7}{10}+620\times\frac{1}{5}+560\times\frac{1}{10}=656$.

若超市购进 180 千克“昭通苹果”,则设利润为 Y_2 元,卖出的“昭通苹果”为 X_2 千克,则 X_2 的可能取值为 180,170,160,150,Y_2 的可能取值为 $(10-6)\times180=720$, $(10-6)\times170+(4-6)\times10=660$, $(10-6)\times160+(4-6)\times20=600$, $(10-6)\times150+(4-6)\times30=540$,

$P(Y_2=720)=P(X_2=180)=\frac{20-2-4-5}{20}=\frac{9}{20}$, $P(Y_2=660)=P(X_2=170)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$, $P(Y_2=600)=P(X_2=160)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$, $P(Y_2=540)=P(X_2=150)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$,

则 Y_2 的分布列为

Y_2	720	660	600	540
P	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$EY_2=720\times\frac{9}{20}+660\times\frac{1}{4}+600\times\frac{1}{5}+540\times\frac{1}{10}=663$.

因为 $EY_1<EY_2$,

所以超市应购进 180 千克“昭通苹果”.

变式题 **解:**(1)设投资项目一获利 X_1 万元,则 X_1 的分布列为

X_1	60	-30
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$

$\therefore EX_1=60\times\frac{7}{9}+(-30)\times\frac{2}{9}=40$.

设投资项目二获利 X_2 万元,则 X_2 的分布列为

X_2	100	0	-60
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$

$\therefore EX_2=100\times\frac{3}{5}+0\times\frac{1}{15}+(-60)\times\frac{1}{3}=40$,

$\therefore EX_1=EX_2$.

$DX_1=(60-40)^2\times\frac{7}{9}+(-30-40)^2\times\frac{2}{9}=1400$,

$DX_2=(100-40)^2\times\frac{3}{5}+(0-40)^2\times\frac{1}{15}+(-60-40)^2\times\frac{1}{3}=5600$, $\therefore DX_1<DX_2$,

这说明虽然项目一、项目二获利的均值相等,但项目一更稳妥.综上所述,建议该投资公司选择项目一进行投资.

(2)假设 n 年后总资产可以翻两番,依题意得 $200\times\left(1+\frac{40}{200}\right)^n=800$,即 $1.2^n=4$,等号两边取对数,得 $n\cdot\lg1.2=\lg4$,则 $n=\frac{2\lg2}{2\lg2+\lg3-1}\approx7.61$, $\therefore$ 大约在 2031 年年底总资产可以翻两番.

第 65 讲 二项分布与超几何分布、正态分布

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. (1)$P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$ $X\sim B(n,p)$ (3)np $np(1-p)$

3. (1)$\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ $\leqslant$ $\leqslant$ (3)$\frac{nM}{N}$

4. (1)$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ③μ σ^2 (2)①上方 ②$x=\mu$ ③ $x=\mu$ ④1 ⑥x 轴 ⑦集中 分散 (3)0.682 6 0.954 4 0.997 4 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$

【对点演练】

1. 6 **[解析]** 由随机变量 X 服从正态分布 $N(4,3)$,得 $\mu=4$, $\sigma^2=3$,又由 $P(X<a-5)=P(X>a+1)$,可得直线 $x=a-5$ 和直线 $x=a+1$ 关于直线 $x=4$ 对称,所以 $a-5+a+1=8$,解得 $a=6$.

2. $\frac{3}{7}$ **[解析]** $\because$ 该班有 50 名学生,$\therefore$ 从该班中任选 2 名学生共有 C_{50}^2 种不同的选法,又 $\because$ 15 人选修 A 课程,另外 35 人选修 B 课程,$\therefore$ 他们是选修不同课程的学生的选法有 $C_{15}^1C_{35}^1$ 种,故从该班中任选 2 名学生,他们选修不同课程的概率 $P=\frac{C_{15}^1C_{35}^1}{C_{50}^2}=\frac{3}{7}$.

3. $\frac{7}{8}$ **[解析]** 因为是有放回地取产品,所以每次取到次品的概率为 $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. 任取 3 次,X 表示取得次品的次数,则 $X\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$,所以 $P(X\leqslant2)=P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_3^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$.

4. ③ **[解析]** 将一枚硬币连抛 3 次,记正面向上的次数为 X,则 X 服从二项分布,①不满足题意;某射手的射击命中率为 0.8,现对目标射击 1 次,记命中的次数为 X,则 X 服从两点分布,②不满足题意;从 7 男 3 女共 10 名学生干部中选出 5 名学生干部,记选出女生的人数为 X,则 X 服从超几何分布,③满足题意;盒中有 4 个白球和 3 个黑球,每次从中随机摸出 1 个球且不放回,记第一次摸出黑球时摸取的次数为 X,则 X 不服从超几何分布,④不满足题意. 故填③.

5. 0.35 **[解析]** 因为随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$,所以 $P(X\leqslant0)=P(X\geqslant4)$,又 $P(X\leqslant0)=0.15$,所以 $P(2\leqslant X\leqslant4)=\frac{1-2P(X\leqslant0)}{2}=\frac{1-2\times0.15}{2}=0.35$.

6. $\frac{4}{25}$ $\frac{1}{10}$ **[解析]** 若采取放回简单随机抽样，则每次摸出的1个球是白球的概率为$\frac{2}{5}$，所以摸出的2个球都是白球的概率$P_1=C_2^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$. 若采取不放回简单随机抽样，则摸出的2个球都是白球的概率$P_2=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$.

● 课堂考点探究

例1 **[思路点拨]** (1)由题可求出一次试验成功的概率，设试验成功的次数为Y，可知Y服从二项分布，再利用方差的性质即可求解. (2)①由题意可求得$P(B)$和$P(A)$，$P(AB)$，结合条件概率的计算公式即可求得$P(B|A)$；②分析X的可能取值，得到$X\sim B\left(4,\frac{2}{5}\right)$，求得相应的概率，列出分布列，利用期望公式即可求解.

(1)$\frac{100}{3}$ **[解析]** 由题意得，启动一次出现的数字为$A=1010$的概率$P=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$. 设试验成功的次数为$Y$，则$Y\sim B\left(54,\frac{2}{27}\right)$，所以$Y$的方差$DY=54\times\frac{2}{27}\times\frac{25}{27}=\frac{100}{27}$，易得$X=2Y-1\times(54-Y)=3Y-54$，所以$DX=D(3Y-54)=9DY=\frac{100}{3}$.

(2)**解：**①由题意得，第二次抽到男生的概率$P(B)=\frac{6\times4+4\times3}{10\times9}=\frac{2}{5}$. 因为$P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，$P(AB)=\frac{6\times4}{10\times9}=\frac{4}{15}$，所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{4}{9}$.

②由题意得，X的所有可能取值为0，1，2，3，4，且$X\sim B\left(4,\frac{2}{5}\right)$. 可得$P(X=0)=C_4^0\times\left(\frac{3}{5}\right)^4\times\left(\frac{2}{5}\right)^0=\frac{81}{625}$，$P(X=1)=C_4^1\times\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{216}{625}$，$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$，$P(X=3)=C_4^3\times\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}$，$P(X=4)=C_4^4\times\left(\frac{3}{5}\right)^0\times\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$，

所以随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

所以$EX=4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$.

变式题 (1)D **[解析]** 由题意，袋子中有除颜色外完全相同的4个红球和8个白球，则从袋中随机摸出1个球，该球为红球的概率为$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，现从中有放回地摸球8次，每次摸球的结果不会相互影响，表示进行了8次独立重复试验，设Y表示摸出红球的个数，则$Y\sim B\left(8,\frac{1}{3}\right)$，故$DY=8\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{9}$. 因为$X=3Y$，所以$DX=D(3Y)=9DY=9\times\frac{16}{9}=16$，故选D.

(2)**解：**(i)设“抽取的3箱西梅中恰好有1箱是一等品”为事件A_1，则$P(A_1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，因此，从这10箱西梅中任取3箱，恰好有1箱是一等品的概率为$\frac{1}{2}$.

(ii)由题意可知，从这10箱西梅中随机抽取1箱，恰好是一等品的概率为$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，由题可知X的所有可能取值为0，1，2，3，$X\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$，所以$P(X=0)=C_3^0\times\left(\frac{2}{5}\right)^0\times\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，$P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$，$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{36}{125}$，$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{8}{125}$，所以$X$的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$EX=0\times\frac{27}{125}+1\times\frac{54}{125}+2\times\frac{36}{125}+3\times\frac{8}{125}=\frac{6}{5}$（或$EX=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$）.

例2 **[思路点拨]** (1)对于有放回抽检，随机变量X服从二项分布，进而可求出分布列和数学期望；对于不放回抽检，随机变量X服从超几何分布，进而可求出分布列和数学期望. (2)由条件可知，$f_{10}=\frac{Y}{10}$是一个随机变量，分有放回抽取和不放回抽取求出$P(|f_{10}-0.25|\leqslant0.15)=P(1\leqslant Y\leqslant4)$比较大小即可.

解：(1)对于有放回抽检，每次抽到混合动力汽车的概率为$\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$，且各次抽检结果是独立的，则$X\sim B\left(2,\frac{1}{4}\right)$，$X$的所有可能取值为0，1，2，$P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，$P(X=1)=C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$，$P(X=2)=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$，

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

则$EX=0\times\frac{9}{16}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$（或$EX=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$）. 对于不放回抽检，各次抽检的结果不独立，则$X$服从超几何分布，$X$的所有可能取值为0，1，2，$P(X=0)=\frac{C_{90}^2}{C_{120}^2}=\frac{267}{476}$，$P(X=1)=\frac{C_{30}^1C_{90}^1}{C_{120}^2}=\frac{45}{119}$，$P(X=2)=\frac{C_{30}^2}{C_{120}^2}=\frac{29}{476}$，

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{267}{476}$	$\frac{45}{119}$	$\frac{29}{476}$

则$EX=0\times\frac{267}{476}+1\times\frac{45}{119}+2\times\frac{29}{476}=\frac{1}{2}$（或$EX=\frac{2\times30}{120}=\frac{1}{2}$）.

(2)样本中混合动力汽车的台数的比例$f_{10}=\frac{Y}{10}$是一个随机变量，根据参考数据得：

对于有放回抽取，易知Y服从二项分布，则$P(|f_{10}-0.25|\leqslant0.15)=P(1\leqslant Y\leqslant4)\approx0.187\ 71+0.281\ 57+0.250\ 28+0.146\ 00=0.865\ 56$；对于不放回抽取，易知$Y$服从超几何分布，则$P(|f_{10}-0.25|\leqslant0.15)=P(1\leqslant Y\leqslant4)\approx0.182\ 54+0.290\ 51+0.261\ 34+0.147\ 01=0.881\ 40$.

因为$0.865\ 56<0.881\ 40$，所以在相同的误差限制下，采用不放回抽取估计的结果更可靠.

变式题 **解：**(1)由折线图可知，应对土壤做进一步调研的村共有4个，即甲、乙、庚、辛，从8个村中随机抽取2个进行调查，样本点有$C_8^2=28$(个)，其中抽取的2个村应对土壤做进一步调研的样本点有$C_4^2=6$(个)，∴所求概率$P=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$.

(2)由折线图可知，环境空气等级为尚清洁的村共有5个，则X所有可能的取值为0，1，2，3，

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$，$P(X=1)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}=\dfrac{5}{28}$,

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

$\therefore EX=0\times\dfrac{1}{56}+1\times\dfrac{15}{56}+2\times\dfrac{15}{28}+3\times\dfrac{5}{28}=\dfrac{15}{8}$.

例 3 **【思路点拨】**(1)由正态密度曲线的性质结合图象可得 $\mu_1<\mu_2$,$0<\sigma_1<\sigma_2$,可判断 A,B;由服从正态分布的随机变量在某区间内取值的概率的几何意义可判断 C,D.(2)①根据频率分布直方图中各矩形面积之和为 1 可求得 m 的值,进而可求得 $\overline{x}$;②根据题意可求得 μ,σ 的值,结合 $P(1.145\ 2<X<1.175\ 2)=P(\mu-2\sigma<X<\mu+\sigma)$ 可得 1 件产品的内径在 $(1.145\ 2,1.175\ 2)$ 内的概率,进而可得解;③先求出 1 件产品是优质品的概率,再根据 Y 服从二项分布即可得解.

(1)C **【解析】** 对于 A 选项,X,Y 的正态密度曲线分别关于直线 $x=\mu_1$,$x=\mu_2$ 对称,因此结合所给图象可得 $\mu_1<\mu_2$,所以 $P(Y\geqslant\mu_2)<P(Y\geqslant\mu_1)$,故 A 错误;对于 B 选项,$X$ 的正态密度曲线比 Y 的正态密度曲线"瘦高",所以 $0<\sigma_1<\sigma_2$,所以 $P(X\leqslant\sigma_2)>P(X\leqslant\sigma_1)$,故 B 错误;对于 C,D 选项,由服从正态分布的随机变量在某区间内取值的概率的几何意义可知,对任意正数 t,都有 $P(X\leqslant t)\geqslant P(Y\leqslant t)$,$P(X\geqslant t)\leqslant P(Y\geqslant t)$,故 C 正确,D 错误.故选 C.

(2)**解:**①由频率分布直方图可知,$0.02\times(4+15+20+m)=1$,解得 $m=11$,$\therefore$ 估计这批产品内径的平均数 $\overline{x}=1.13\times4\times0.02+1.15\times15\times0.02+1.17\times20\times0.02+1.19\times11\times0.02=1.165\ 2$(cm).

②由题意和①可知,$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,且 $\mu=1.165\ 2$,$\sigma=0.01$,

$\therefore\mu-2\sigma=1.145\ 2$,$\mu+\sigma=1.175\ 2$,$\therefore P(1.145\ 2<X<1.175\ 2)=P(\mu-2\sigma<X<\mu+\sigma)=\dfrac{1}{2}P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)+\dfrac{1}{2}P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx\dfrac{1}{2}\times0.682\ 6+\dfrac{1}{2}\times0.954\ 4=0.818\ 5$,$\therefore$ 估计 1500 箱产品中内径在 $(1.145\ 2,1.175\ 2)$ 内的产品件数为 $1500\times20\times0.818\ 5=24\ 555$.

③由频率分布直方图可知,样本中内径在 $[1.14,1.18)$ 内的频率为 $(15+20)\times0.02=0.7$,

用样本估计总体,视频率为概率,则随机打开 1 箱,从中随机抽取 1 件产品,这件产品为优质品的概率为 0.7.

由题知,Y 的所有可能取值为 $0,1,2,3,\cdots,20$,且 Y 服从二项分布 $B(20,0.7)$,$\therefore EY=20\times0.7=14$.

变式题 (1)ACD (2)ABD **【解析】** 由题意得,X 的正态密度曲线与 y 轴只有一个交点 $\left(0,\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\right)$,故 A 正确;$X$ 的正态密度曲线关于直线 $x=\mu$ 对称,故 B 错误;$P(|X-\mu|>3\sigma)=P(X<\mu-3\sigma)+P(X>\mu+3\sigma)=2P(X>\mu+3\sigma)$,故 C 正确;$EX=\mu$,则 $EY=\dfrac{EX-\mu}{\sigma}=0$,故 D 正确.故选 ACD.

(2)由题意可知,$\mu=100$,$\sigma^2=100$,故 A,B 正确;由题意得 $\mu+\sigma=110$,$\mu+3\sigma=130$,所以 $P(X>\mu+\sigma)=\dfrac{1}{2}[1-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)]\approx\dfrac{1}{2}\times0.317\ 4=15.87\%$,故 C 错误;$P(X<\mu+3\sigma)=1-\dfrac{1}{2}[1-P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)]\approx1-0.001\ 3=99.87\%$,故 D 正确.故选 ABD.

增分微课 5　统计、概率的综合问题

例 1 **【思路点拨】**(1)根据在频率分布直方图中中位数的求法计算即可;(2)写出随机变量 X 的所有可能取值,求出对应概率,即可得出分布列,再求期望即可.

解:(1)因为 $10\times(0.004+0.008+0.012)=0.24$,$0.24+10\times0.028=0.52$,

所以中位数在区间 $[70,80)$ 内,设中位数的估计值为 x,

则 $10\times(0.004+0.008+0.012)+0.028(x-70)=0.5$,解得 $x\approx79.3$,所以估计这 100 位居民成绩的中位数约为 79.3.

(2)从成绩在 $[40,50)$ 内的居民中抽取 $12\times\dfrac{0.004}{0.004+0.008+0.012}=2$(人),从成绩在 $[50,60)$ 内的居民中抽取 $12\times\dfrac{0.008}{0.004+0.008+0.012}=4$(人),从成绩在 $[60,70)$ 内的居民中抽取 $12\times\dfrac{0.012}{0.004+0.008+0.012}=6$(人),则 X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$,

$P(X=0)=\dfrac{C_8^3}{C_{12}^3}=\dfrac{14}{55}$,$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_8^2}{C_{12}^3}=\dfrac{28}{55}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_8^1}{C_{12}^3}=\dfrac{12}{55}$,$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{12}^3}=\dfrac{1}{55}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

所以 $EX=0\times\dfrac{14}{55}+1\times\dfrac{28}{55}+2\times\dfrac{12}{55}+3\times\dfrac{1}{55}=1$.

变式题 **解:**(1)将这组数据从小到大进行排列,得 7.4,7.8,8.3,8.5,8.5,8.6,8.9,9.1,9.5,9.9,因为 $75\%\times10=7.5$,所以这组数据的 75% 分位数为第 8 个数据,即为 9.1.

(2)样本数据中评分超过 9.0 的有 3 个,将频率视为概率,所以评分超过 9.0 的概率为 0.3,依题意,X 的所有可能取值为 0,1,2,3,且 $X\sim B(3,0.3)$,则 $P(X=0)=C_3^0\times0.7^3=0.343$,$P(X=1)=C_3^1\times0.3\times0.7^2=0.441$,$P(X=2)=C_3^2\times0.3^2\times0.7=0.189$,$P(X=3)=C_3^3\times0.3^3=0.027$,所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.343	0.441	0.189	0.027

所以 $EX=3\times0.3=0.9$,$DX=3\times0.3\times0.7=0.63$.

例 2 **【思路点拨】**(1)(i)根据条件填写 2×2 列联表并计算 χ^2,即可判断;(ii)根据列联表求出 P_1,P_2,由方案二在一次测试中通过的情况求出其概率.(2)根据方案二在每次测试中通过的情况,求出其概率及它的最大值,再由 n 次测试中通过的次数服从二项分布,即可求解.

解:(1)(i)依题意得 2×2 列联表如下:

单位:首

软件类型	是否正确识别音乐		总计
	正确识别	错误识别	
A 组软件	40	20	60
B 组软件	20	20	40
总计	60	40	100

根据列联表中的数据,经计算得到 $\chi^2=\dfrac{100\times(40\times20-20\times20)^2}{60\times40\times60\times40}=\dfrac{25}{9}\approx2.778>2.706$,所以有 90% 的把握判断是否正确识别音乐与软件类型有关.

(ii)由(i)得 $P_1=\dfrac{2}{3}$,$P_2=\dfrac{1}{2}$,故方案二在一次测试中通过的概率为 $C_2^1\times\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times C_2^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+C_2^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times C_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+C_2^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times C_2^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

(2)方案二每次测试通过的概率 $P=C_2^1\cdot P_1(1-P_1)\cdot C_2^2\cdot P_2^2+C_2^2P_1^2\cdot C_2^1\cdot P_2(1-P_2)+C_2^2P_1^2\cdot C_2^2P_2^2=P_1P_2\left(\dfrac{8}{3}-3P_1P_2\right)=-3(P_1P_2)^2+\dfrac{8}{3}P_1P_2=-3\left(P_1P_2-\dfrac{4}{9}\right)^2+\dfrac{16}{27}$,

所以当 $P_1P_2=\dfrac{4}{9}$ 时,P 取得最大值 $\dfrac{16}{27}$,

又 $P_1+P_2=\dfrac{4}{3}$,所以此时 $P_1=P_2=\dfrac{2}{3}$.

设 n 次测试中通过的次数为 X,则 $X\sim B(n,P)$,则 $EX=nP=16$,因为 $P\leqslant\dfrac{16}{27}$,所以 $n=\dfrac{16}{P}\geqslant16\times\dfrac{27}{16}=27$,

所以该测试至少要进行 27 次，此时 $P_1=P_2=\frac{2}{3}$.

变式题 **解**：(1)补充完整的 2×2 列联表如下：

单位：人

商品摆放的位置与收银台的距离远近	顾客是否购买		总计
	购买	未购买	
商品摆放在收银台附近的位置	40	160	200
商品摆放在距离收银台较远的柜架上	20	180	200
总计	60	340	400

根据列联表中的数据，经计算得到 $\chi^2=\frac{400\times(40\times180-20\times160)^2}{60\times340\times200\times200}=\frac{400}{51}\approx7.843>6.635$，所以有 99%的把握判断顾客是否购买该商品与该商品摆放的位置与收银台的距离远近有关.

(2)由题意，抽取的 6 人中在第一个月内购买该商品的有 $\frac{40}{20+40}\times6=4$(人)，在第二个月内购买该商品的有 $\frac{20}{20+40}\times6=2$(人)，则随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2，

$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P(X=1)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以 $EX=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$.

例 3 **【思路点拨】**(1)先求出每个芯片智能检测达标的概率，再根据对立事件求出每个芯片智能检测不达标的概率；(2)由题意可知 $\varphi(p)=C_{30}^1\cdot p\cdot(1-p)^{29}(0<p<1)$，利用导数即可求出 $\varphi(p)$ 的极大值点 p_0；(3)由(2)知 $p=p_0=\frac{1}{30}$，先求出人工抽检的综合指标达标的概率，再求出每个芯片是合格品的概率，进而得解.

解：(1)每个芯片智能检测达标的概率为 $\frac{99}{100}\times\frac{98}{99}\times\frac{97}{98}=\frac{97}{100}$，

∴每个芯片智能检测不达标的概率为 $1-\frac{97}{100}=\frac{3}{100}$.

(2)由题意可知，$\varphi(p)=C_{30}^1\cdot p\cdot(1-p)^{29}=30p(1-p)^{29}(0<p<1)$，∴$\varphi'(p)=30(1-p)^{29}+30p\cdot29(1-p)^{28}(-1)=30(1-p)^{28}(1-p-29p)=30(1-p)^{28}(1-30p)$，令 $\varphi'(p)=0$，得 $p=\frac{1}{30}$.

当 $p\in\left(0,\frac{1}{30}\right)$ 时，$\varphi'(p)>0$，$\varphi(p)$ 单调递增；当 $p\in\left(\frac{1}{30},1\right)$ 时，$\varphi'(p)<0$，$\varphi(p)$ 单调递减. ∴当 $p=\frac{1}{30}$ 时，$\varphi(p)$ 取得极大值，即 $\varphi(p)$ 的极大值点 $p_0=\frac{1}{30}$.

(3)由(2)知 $p=p_0=\frac{1}{30}$，

∴人工抽检的综合指标达标的概率 $P_1=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$，

∴每个芯片是合格品的概率 $P_{合格}=\frac{99}{100}\times\frac{98}{99}\times\frac{97}{98}\times\frac{29}{30}=\frac{2813}{3000}\approx0.938$，$0.938\times100\%=93.8\%$，

∵93.8%<96%，∴该企业需要对生产工序进行改良.

变式题 **解**：(1)一天中生产的 2 件产品中至少有 1 件的质量等级为一级的概率 $P=0.5^2+C_2^1\times0.5\times(1-0.5)=0.75$.

(2)设 1 件产品的质量等级为一级、二级、不合格分别为事件 A,B,C，则 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(C)=0.1$，

X 的所有可能取值为 −0.6，0.3，1.2，0.5，1.4，1.6，

$P(X=-0.6)=[P(C)]^2=0.01$，$P(X=0.3)=C_2^1P(B)P(C)=2\times0.4\times0.1=0.08$，

$P(X=0.5)=C_2^1P(A)P(C)=2\times0.5\times0.1=0.1$，$P(X=1.2)=[P(B)]^2=0.16$，

$P(X=1.4)=C_2^1P(A)P(B)=2\times0.5\times0.4=0.4$，$P(X=1.6)=[P(A)]^2=0.25$，

所以 X 的分布列为

X	−0.6	0.3	0.5	1.2	1.4	1.6
P	0.01	0.08	0.1	0.16	0.4	0.25

所以 $EX=-0.6\times0.01+0.3\times0.08+0.5\times0.1+1.2\times0.16+1.4\times0.4+1.6\times0.25=1.22$.

(3)由(2)可知，每件产品的平均利润为 $1.22\div2=0.61$(万元)，则每天增产 n 件产品，每天的利润平均增加 $0.61n$ 万元，每天的成本也相应提高 $n-\ln n$ 万元，所以每天的毛利润平均增加 $0.61n-n+\ln n=\ln n-0.39n$(万元).

设 $f(x)=\ln x-0.39x(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-0.39$.

当 $0<x<\frac{100}{39}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>\frac{100}{39}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

所以当 $x=\frac{100}{39}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，

又 $2<\frac{100}{39}<3$，$f(2)=\ln2-0.39\times2\approx0.69-0.78=-0.09$，

$f(3)=\ln3-3\times0.39\approx1.1-1.17=-0.07$，

所以当 $n=3$ 时，$\ln n-0.39n$ 取得最大值，且为负值，所以该公司目前不该增产.

增分微课 6　推理、想象之创新思维试题

例 1 **解**：(1)$p=11$，$a=2$，则 $a^{p-1,\otimes}=2^{10,\otimes}$ 为 2^{10} 除以 11 的余数，即为 1，∴$a^{p-1,\otimes}=1$.

(2)证明：方法一：设 $\log(p)_ab=m_1$，$\log(p)_ac=m_2$，

∴a^{m_1} 除以 p 的余数为 b，a^{m_2} 除以 p 的余数为 c，

∴$a^{m_1}=\lambda p+b$，$a^{m_2}=\mu p+c$，$m_1,m_2\in\{0,1,\cdots,p-2\}$，$\lambda,\mu\in\mathbf{N}$，即证 $\log(p)_a(b\otimes c)=m_1+m_2$，

又 $\frac{a^{m_1+m_2}}{p}=\frac{(\lambda p+b)(\mu p+c)}{p}=\frac{\lambda\mu p^2+(\lambda c+b\mu)p+bc}{p}$，

∴$a^{m_1+m_2}$ 除以 p 的余数为 bc，即为 $b\otimes c$，

∴$\log(p)_a(b\otimes c)=m_1+m_2=\log(p)_ab\oplus\log(p)_ac$.

方法二：令 $n=\log(p)_a(b\otimes c)$，$n_1=\log(p)_ab$，$n_2=\log(p)_ac$，

则 $a^{n_1}=p^\lambda+b$，$a^{n_2}=p^\mu+c$，其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{N}$，

∴$a^{n_1+n_2}\equiv bc\pmod p$，而 $a^n\equiv b\otimes c\pmod p\equiv bc\pmod p$，

∴$a^n=a^{n_1+n_2}\pmod p$，

由费马小定理得 $a^{s(p-1)+t}\equiv a^t\pmod p$，

则 $n=n_1+n_2$ 或 $n=(n_1+n_2)+p-1$，

则 $n=n_1\otimes n_2$，∴$\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_ab\oplus\log(p)_ac$.

(3)证明：方法一：若 m 除以 n 的余数为 b，可记为 $m\equiv b\pmod n$，由 $n=\log(p)_ab$，得 $a^n\equiv b\pmod p$，

∴$y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}\equiv y_2\cdot y_1^{n(p-2)}\pmod p\equiv x\cdot b^k\cdot(a^k)^{n(p-2)}\pmod p=xa^{nk}\cdot a^{nk(p-2)}\pmod p=x\cdot a^{nk(p-1)}\pmod p=x(a^{p-1})^{nk}\pmod p$(∵$a^{p-1}$ 除以 p 的余数为 1)$\equiv x\cdot1^{nk}\pmod p\equiv x\pmod p$，

∵$y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$，$x\in\{1,2,\cdots,p-1\}$，∴$x=y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$.

方法二：∵$n=\log(p)_ab$，∴$a^n\equiv b\pmod p$，

且 $y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}\equiv y_2\cdot y_1^{n(p-2),\otimes}\equiv x\pmod p$，

∴$x\in X$，∴$x=y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$.

变式题 (1)ABC　(2)0001　**【解析】**(1)由 $(\sqrt5+2)^{2n+1}=C_{2n+1}^0(\sqrt5)^{2n+1}+C_{2n+1}^1(\sqrt5)^{2n}\cdot2^1+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}2^{2n+1}$，$(\sqrt5-2)^{2n+1}=C_{2n+1}^0(\sqrt5)^{2n+1}-C_{2n+1}^1(\sqrt5)^{2n}\cdot2^1+\cdots-C_{2n+1}^{2n+1}2^{2n+1}$，得 $(\sqrt5+2)^{2n+1}-(\sqrt5-2)^{2n+1}=2[C_{2n+1}^1(\sqrt5)^{2n}\cdot2^1+C_{2n+1}^3(\sqrt5)^{2n-2}\cdot2^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}2^{2n+1}]=2[C_{2n+1}^15^n\cdot2^1+C_{2n+1}^35^{n-1}\cdot2^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}2^{2n+1}]$，因为 $C_{2n+1}^15^n\cdot2^1+C_{2n+1}^35^{n-1}\cdot2^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}2^{2n+1}$ 为整数，且 $0<(\sqrt5-2)^{2n+1}<1$，所以 $(\sqrt5+2)^{2n+1}$ 的整数部分即为 $(\sqrt5+2)^{2n+1}-(\sqrt5-2)^{2n+1}$，小数部分即为 $(\sqrt5-2)^{2n+1}$，即 $a_n=(\sqrt5+2)^{2n+1}-(\sqrt5-2)^{2n+1}$，$b_n=(\sqrt5-2)^{2n+1}$，所以 $a_n+b_n=(\sqrt5+2)^{2n+1}$，即 $\{a_n+b_n\}$ 是以 $(\sqrt5+2)^3$ 为首项，$(\sqrt5+2)^2$ 为公比的等比

数列，故 A 正确；因为$\sqrt{5}+2>1$，$0<\sqrt{5}-2<1$，所以$\{a_n\}$为递增数列，故 B 正确；$b_n(a_n+b_n)=(\sqrt{5}-2)^{2n+1}(\sqrt{5}+2)^{2n+1}=[(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)]^{2n+1}=1$，故 C 正确；$(1-b_n)(a_n+b_n)=[1-(\sqrt{5}-2)^{2n+1}](\sqrt{5}+2)^{2n+1}=(\sqrt{5}+2)^{2n+1}-1\neq1$，故 D 错误. 故选 ABC.

(2)若 m 除以 n 的余数为 b，可记为 $m\equiv b\pmod n$. $3^{1000}=9^{500}=(10-1)^{500}$，由二项式定理知$(10-1)^{500}=(-1+10)^{500}\equiv(-1)^{500}+C_{500}^{1}(-1)^{499}\times10+C_{500}^{2}(-1)^{498}\times10^2+C_{500}^{3}(-1)^{497}\times10^3\equiv1-5000+25\times499\times10^3-\frac{5\times498\times499}{6}\times10^5\equiv1-5000+5000-0\equiv1\pmod{10\ 000}$，所以最后四位是 0001.

例 2 **解**：(1)由题知 A_4：1，0.1，−0.2，0.5，

即 $a_1=1$，$a_2=0.1$，$a_3=-0.2$，$a_4=0.5$，

因为$|a_1-a_0|=|a_1-a_4|=0.5\leqslant1$，$|a_2-a_1|=0.9\leqslant1$，$|a_3-a_2|=0.3\leqslant1$，$|a_4-a_3|=0.7\leqslant1$，

所以 A_4 具有性质 P，

又因为 $T_n=\{(i,j)\mid|a_i-a_j|\leqslant1,2\leqslant j-i\leqslant n-2(i,j=1,2,\cdots,n)\}$，

所以当 $n=4$ 时，$2\leqslant j-i\leqslant4-2$，即 $j-i=2$，

又$|a_1-a_3|=1.2>1$，$|a_2-a_4|=0.4\leqslant1$，

所以 $T_4=\{(2,4)\}$.

由题知 A_5：1，2，0.7，1.2，2，即 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=0.7$，$a_4=1.2$，$a_5=2$，

因为$|a_3-a_2|=1.3>1$，所以 A_5 不具有性质 P.

综上，A_4 具有性质 P，$T_4=\{(2,4)\}$，A_5 不具有性质 P.

(2)证明：要证 $T_4\neq\varnothing$，即证(1,3)，(2,4)两个元素至少有一个在 T_4 中，

假设(1,3)，(2,4)两个元素均不在 T_4 中，

则$|a_1-a_3|>1$，$|a_2-a_4|>1$，

不妨设 $a_1\leqslant a_2$，若 $a_2>a_3$，则 $-1\leqslant a_1-a_2\leqslant0$，$0<a_2-a_3\leqslant1$，

由 $a_1-a_3=a_1-a_2+a_2-a_3$，得$-1<a_1-a_3\leqslant1$，

与$|a_1-a_3|>1$矛盾，所以 $a_2\leqslant a_3$，同理可得 $a_3\leqslant a_4$，

所以 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4$，所以$|a_1-a_0|=|a_1-a_4|=a_4-a_1=a_4-a_2+a_2-a_1\geqslant a_4-a_2>1$，

这与 A_4 具有性质 P 矛盾，所以假设不成立，所以 $T_4\neq\varnothing$.

变式题 **解**：(1)由题意，m 是正奇数，

当 $m=1$ 时，由 $a_1=1$，得 $a_2=1+1=2$，$a_3=\frac{1}{2}a_2=1=a_1$，这与前 6 项各不相同矛盾，不合题意；

当 $m=3$ 时，由 $a_1=1$，得 $a_2=1+3=4$，$a_3=2$，$a_4=1=a_1$，这与前 6 项各不相同矛盾，不合题意；

当 $m=5$ 时，由 $a_1=1$，得 $a_2=1+5=6$，$a_3=3$，$a_4=3+5=8$，$a_5=4$，$a_6=2$，符合题意.

综上，m 的最小值为 5，此时数列的前 6 项依次为 1，6，3，8，4，2.

(2)证明：假设集合 $B=\{k\in\mathbf{N}^*\mid a_k\in A_m,a_k>2m\}$ 是非空集合，

当 $k=1$ 时，$a_1=1$，又 m 是正奇数，$2m\geqslant2$，所以 $a_1<2m$，不合题意.

当 $k=2$ 时，$a_2=1+m$，若 $a_2>2m$，则需 $m<1$，而 m 是正奇数，不合题意.

设 B 中元素的最小值为 k（显然 $k\geqslant3$），

因为 $a_k>2m\geqslant a_{k-1}$，所以 $a_k=a_{k-1}+m$，因此 a_{k-1} 为奇数，且 $a_{k-1}>m$.

若 $a_{k-1}=a_{k-2}+m$，则 a_{k-2} 为偶数，

但此时应有 $a_{k-1}=\frac{1}{2}a_{k-2}$，与 $a_{k-1}=a_{k-2}+m$ 矛盾；

若 $a_{k-1}=\frac{1}{2}a_{k-2}$，则 $a_{k-2}>2m$，即 $k-2\in B$，与 B 中元素的最小值为 k 矛盾.

综上，假设不成立，故集合 B 为空集.

(3)猜想 $S=\{1,2\}$.

易知 $S_1=\{1,2\}$，以下只需证明对任意大于 1 的奇数 m，$1\in S_m$，$2\in S_m$ 均成立.

若 $a_j=1$，$j>1$，则 $a_{j-1}=2$，故只需证明必存在 $a_j=1$，$j>1$.

由(2)知无穷数列 A_m 中所有的项都属于集合$\{1,2,\cdots,2m\}$，因此必存在 $i<j$，使得 $a_i=a_j$，取其中 i 的值最小的一组.

若 $a_i>1$，则 $a_i=a_j=K>1$；

若 $K>m$，则必有 $a_{i-1}=a_{j-1}=K-m\geqslant1$，当 $a_{i-1}=a_{j-1}=1$ 时，$a_{i-2}=a_{j-2}=2>1$，与 i 的值最小矛盾；

若 $K\leqslant m$，则必有 $a_{i-1}=a_{j-1}=2K>1$，也与 i 的值最小矛盾.

因此只能 $a_i=1$，因此 $a_j=a_i=1$，$j>1$，$a_{j-1}=2$，即 $1\in S_m$，$2\in S_m$.

综上，$S=\{1,2\}$.

例 3 **解**：(1)因为 $A_0=\begin{pmatrix}1&3\\3&6\end{pmatrix}$，$S=\{1,3\}$，

所以 A_0 经过 φ_1 变换后得到的数阵 $A_1=\begin{pmatrix}-1&-3\\3&6\end{pmatrix}$，

A_1 经过 φ_3 变换后得到的数阵 $A_2=\begin{pmatrix}1&3\\-3&-6\end{pmatrix}$，

所以 $T_s(A_0)=1+3-3-6=-5$.

(2)若 $e_1=2$，$e_2=4$，$e_3=5$，则 $A_3=A_0$，可得 $T_s(A_0)=1+3+3+6=13$.

若 $e_1=1$，$e_2,e_3\in\{2,4,5\}$，则 $A_3=\begin{pmatrix}-1&-3\\3&6\end{pmatrix}$，可得 $T_s(A_0)=-1-3+3+6=5$.

若 $e_3=6$，$e_1,e_2\in\{2,4,5\}$，则 $A_3=\begin{pmatrix}1&3\\-3&-6\end{pmatrix}$，可得 $T_s(A_0)=1+3-3-6=-5$.

若 e_1,e_2,e_3 中一个为 3，另外两个属于 $\{2,4,5\}$，则 $A_3=\begin{pmatrix}-1&-3\\-3&-6\end{pmatrix}$，

可得 $T_s(A_0)=-1-3-3-6=-13$.

若 $e_1=1$，$e_2\in\{2,4,5\}$，$e_3=6$，则 $A_3=\begin{pmatrix}-1&-3\\-3&-6\end{pmatrix}$，可得 $T_s(A_0)=-1-3-3-6=-13$.

若 $e_1=1$，e_2,e_3 中一个为 3，另外一个属于$\{2,4,5\}$，

则 $A_3=\begin{pmatrix}1&3\\-3&-6\end{pmatrix}$，可得 $T_s(A_0)=1+3-3-6=-5$.

若 $e_3=6$，e_1,e_2 中一个为 3，另外一个属于$\{2,4,5\}$，

则 $A_3=\begin{pmatrix}-1&-3\\3&6\end{pmatrix}$，可得 $T_s(A_0)=-1-3+3+6=5$.

若 $e_1=1$，$e_2=3$，$e_3=6$，则 $A_3=A_0$，可得 $T_s(A_0)=1+3+3+6=13$.

综上所述，$T_s(A_0)$的所有可能取值为 13，−13，5，−5.

变式题 **解**：(1)设 $A(x,y)$，则$\begin{pmatrix}2&-1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$，

$\therefore\begin{cases}2x-y=3,\\-2x+3y=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}\therefore A(2,1)$.

(2)证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x,y)$，

当 P 不与 A，B 重合时，

$\because A,B,P$ 三点共线，$\therefore\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2}$，

$\because M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，$\therefore A'(ax_1+by_1,cx_1+dy_1)$，$B'(ax_2+by_2,cx_2+dy_2)$，$P'(ax+by,cx+dy)$，

$\because k_{P'A'}=\frac{cx+dy-(cx_1+dy_1)}{ax+by-(ax_1+by_1)}=$

$\frac{c(x-x_1)+d(y-y_1)}{a(x-x_1)+b(y-y_1)}=\frac{c+d\cdot\frac{y-y_1}{x-x_1}}{a+b\cdot\frac{y-y_1}{x-x_1}}$，

$k_{P'B'}=\frac{cx+dy-(cx_2+dy_2)}{ax+by-(ax_2+by_2)}=$

$\frac{c(x-x_2)+d(y-y_2)}{a(x-x_2)+b(y-y_2)}=\frac{c+d\cdot\frac{y-y_2}{x-x_2}}{a+b\cdot\frac{y-y_2}{x-x_2}}$，

$\therefore k_{P'B'}=k_{P'A'}$，$\therefore P'$在直线 $A'B'$ 上.

当 P 与 A 或 B 重合时，P' 与 A' 或 B' 重合.

综上，点 P' 在直线 $A'B'$ 上.